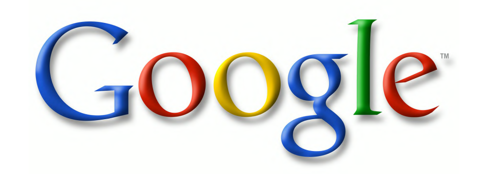



B 463715



ARTES
1837
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

HYDRAULIQUE

*Tous les exemplaires de l'*HYDRAULIQUE *de M. Flamant, devront être revêtus de la signature de l'auteur.*

ENCYCLOPÉDIE
DES
TRAVAUX PUBLICS
Fondée par M.-C. LECHALAS, Inspr génal des Ponts et Chaussées
Médaille d'or à l'Exposition universelle de 1889

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

HYDRAULIQUE

PAR

A. FLAMANT

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ET A L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE
BAUDRY ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
15, RUE DES SAINTS-PÈRES
MÊME MAISON A LIÈGE

1891

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT DES LIQUIDES

§ 1. — *Mouvement des liquides en général.*

§ 2. — *Mouvement permanent.*

§ 3. — *Mouvement uniforme.*

CHAPITRE III

CIRCONSTANCES ACCIDENTELLES DU MOUVEMENT

§ 1. — *Orifices.*

§ 2. — *Etude détaillée de l'écoulement.*

§ 3. — *Causes de perte de charge.*

§ 4. — *Ajutages.*

§ 5. — *Déversoirs.*

§ 6. — *Étude des nappes déversantes.*

§ 7. — *Application des formules.*

§ 8. — *Ressaut.*

§ 9. — *Tourbillons.*

CHAPITRE IV

TUYAUX DE CONDUITE

§ 1. — *Formules et tables.*

§ 2. — *Problèmes divers.*

§ 3. — *Étude détaillée de l'écoulement.*

CHAPITRE V

CANAUX DÉCOUVERTS

§ 1. — *Mouvement uniforme.*

§ 2. — *Étude détaillée de l'écoulement.*

§ 3. — *Applications.*

§ 4. — *Mouvement varié.*

§ 5. — *Remous.*

§ 6. — *Étranglement ou élargissement du lit.*

CHAPITRE VII

COURS D'EAU NATURELS

§ 1. — *Mobilité du lit.*

§ 2. — *Entraînement et suspension.*

§ 3. — *Influence de la forme des rives.*

§ 4. — *Écoulement souterrain.*

§ 5. — *Jaugeages.*

CHAPITRE VII

MOUVEMENT NON PERMANENT

§ 1. — *Généralités.*

§ 3. — *Crues des cours d'eau.*

§ 3. — *Prévision des crues.*

§ 4. — *Atténuation des effets des crues.*

CHAPITRE VIII

MOUVEMENTS ONDULATOIRES

§ 1. — *Ondes de translation.*

§ 2. — *Onde solitaire.*

§ 3. — *Houle.*

§ 4. — *Clapotis.*

§ 5. — *Colonnes liquides oscillantes.*

§ 6. — *Marées.*

CHAPITRE IX

FLUIDES ÉLASTIQUES

§ 1. — *Equations et formules générales.*

§ 2. — *Réservoirs d'air.*

§ 3. — *Mouvement des gaz.*

CHAPITRE X

RÉSISTANCE DES FLUIDES

§ 1. — *Étude théorique.*

§ 2. — *Étude expérimentale.*

ANNEXES

Documents législatifs et administratifs concernant l'utilisation des eaux.

a. Lois et arrêtés généraux.

b. Documents législatifs spéciaux aux irrigations.

c. Circulaires et instructions ministérielles concernant le règlement des retenues d'eau.

d. Documents relatifs à la compétence.

AVANT-PROPOS

Ainsi que les autres sciences appliquées, l'*hydraulique* n'était, à ses débuts, qu'un art purement empirique. Les auteurs des remarquables ouvrages d'aménagement et de conduite des eaux exécutés dans l'antiquité et au moyen âge se guidaient par des règles que la tradition leur avait transmises, qu'ils perfectionnaient sans doute peu à peu, mais qui ne sont pas arrivées jusqu'à nous. A la fin du siècle dernier, ces traditions étaient perdues et la science n'était pas encore établie, l'ignorance était complète. Voici ce que Du Buat écrivait en 1786, dans le *Discours préliminaire de ses Principes d'hydraulique.*

« On sait que jusqu'à présent nos connaissances en « hydraulique sont extrêmement bornées ; car, quoique « de grands génies s'y soient appliqués en différents « temps, nous sommes encore, depuis tant de siècles, « dans une ignorance presque absolue des vraies lois « auxquelles le mouvement de l'eau est assujetti ; à « peine, depuis cent cinquante ans, a-t-on découvert, à « l'aide de l'expérience, quelle est la durée, la quantité « et la vitesse de l'écoulement de l'eau par un orifice « quelconque.

« Tout ce qui concerne le cours uniforme des eaux qui « arrosent la surface de la terre nous est inconnu ; et, « pour se faire une idée du peu que nous savons, il suffit

« de jeter un coup d'œil sur ce que nous ignorons. Faut-« il apprécier la vitesse d'un fleuve dont on connaît la « largeur, la profondeur et la pente ; déterminer à quelle « hauteur il élèvera ses eaux, s'il vient à recevoir un « autre fleuve dans son lit ; prévoir de combien il bais-« sera si on lui fait une saignée ; fixer la pente qui con-« vient à un aqueduc, pour conserver à ses eaux une vi-« tesse donnée, ou la capacité du lit qui lui convient « pour amener dans une ville, avec une pente donnée, « une quantité d'eau qui suffise à ses besoins ; tracer les « contours d'une rivière de telle sorte qu'elle ne travaille « point à changer le lit dans lequel on l'a enfermée ; « prévoir l'effet d'un redressement, d'une coupure, d'un « reversoir ; calculer la dépense d'un tuyau de conduite « dont la longueur, le diamètre et la charge sont don-« nés ; déterminer de combien un pont, une retenue, « une vanne feront hausser les eaux d'une rivière ; mar-« quer jusqu'à quelle distance ce remous sera sensible « et prévoir si le pays n'en deviendra pas sujet aux inon-« dations ; calculer la longueur et les dimensions d'un « canal destiné à dessécher des marais perdus depuis « longtemps pour l'agriculture ; assigner la forme la plus « convenable aux entrées des canaux, aux confluents ou « aux embouchures des rivières ; déterminer la figure la « plus avantageuse à donner aux vaisseaux ou aux ba-« teaux, pour fendre l'eau avec le moindre effort ; calcu-« ler en particulier la force nécessaire pour mouvoir un « corps qui flotte sur l'eau ; toutes ces questions et une « infinité d'autres du même genre sont encore insolubles. « Le croirait-on ? On ignore presque encore à quoi est « égal le choc de l'eau, quand elle frappe directement un « plan ; à plus forte raison quand elle se meut contre « des surfaces convexes de toute espèce.

« Tout le monde raisonne sur l'hydraulique, mais il est « peu de personnes qui l'entendent. »

Si j'ai donné à cette citation un aussi grand développement, c'est que la nomenclature des questions qui s'y trouvent posées constitue à peu près le programme du présent ouvrage : on verra, en le parcourant, comment les travaux exécutés depuis un siècle permettent de répondre d'une façon plus ou moins complète à chacune d'elles. Les travaux de Du Buat, ceux de Prony, d'Eytelwein, de d'Aubuisson et d'un grand nombre d'autres savants ou expérimentateurs ont contribué à l'établissement des principes fondamentaux de la science. Plus récemment, ceux de Darcy et surtout ceux de M. Bazin, au point de vue expérimental, et ceux de M. Boussinesq pour la théorie, ont ouvert la véritable voie dans laquelle il convient de s'engager pour la perfectionner.

Assurément il reste encore bien des incertitudes, et les solutions ne peuvent être considérées comme rigoureuses ni définitives ; mais elles sont en général suffisantes pour les besoins de la pratique, si elles sont judicieusement appliquées. Nulle part comme en hydraulique il n'est plus important de bien se rendre compte des conditions dans lesquelles on peut employer les formules : ces conditions sont tellement variées que l'on ne peut en envisager, dans les solutions, qu'un petit nombre à la fois ; et il est nécessaire d'avoir toujours présentes à l'esprit les hypothèses simplificatives que l'on a été obligé de faire pour obtenir les formules dont on veut se servir. On s'expose, autrement, à commettre les erreurs les plus graves.

Il ne faut, le plus souvent, prendre les résultats des formules que comme de premières indications qui doivent être interprétées, rectifiées ou complétées par la

considération des circonstances spéciales relatives au cas particulier que l'on a en vue.

Ce que je viens de dire des formules peut se dire aussi des coefficients numériques, déduits de l'expérience, dont on les affecte.

Mais alors, dans le choix à faire entre les divers coefficients proposés, on ne peut plus se laisser guider par le seul raisonnement : c'est la pratique, et seulement une longue pratique, qui peut indiquer les corrections à faire subir à ces coefficients et les meilleures valeurs qu'il convient de leur attribuer dans les diverses circonstances. Aussi ai-je donné un grand nombre de ces coefficients et même de tables numériques correspondant à diverses formules. Peut-être trouvera-t-on que j'ai manqué, à cet égard, de précision ; mais c'est avec intention que je me suis abstenu de conclure et que je ne me suis pas borné à une seule formule ni à une seule table. Chacun choisira, d'après les faits qu'il aura pu constater, celle qui répondra le mieux aux conditions particulières du problème qu'il aura à traiter; l'état de nos connaissances n'est pas encore assez avancé pour que l'on puisse faire ce choix d'une façon générale et certaine.

Voici maintenant comment se répartissent entre les dix chapitres de l'ouvrage, les différentes matières qui y sont traitées. Je dois déclarer, tout d'abord, que l'on n'y trouvera rien, ou presque rien d'original; tout est emprunté aux travaux des nombreux savants, hydrauliciens et ingénieurs qui, depuis un siècle, ont apporté leur contingent à l'avancement de cette science. Indépendamment de ceux que j'ai déjà cités plus haut, je mentionnerai plus spécialement St-Venant, Dupuit, Dausse, Kleitz, Graëff, M. Lechalas et M. Fargue, sans préjudice de tous ceux dont les travaux, d'une importance moindre, sont signa-

lés au fur et à mesure, aux divers articles où il en est parlé. Mais à défaut d'originalité, j'espère que l'on me saura gré d'avoir recueilli et réuni tout ce qui m'a paru de nature à intéresser les ingénieurs dans les très nombreux travaux qui ont été publiés depuis un siècle sur les questions d'hydraulique.

Le premier Chapitre est consacré à résumer sommairement les principes généraux de l'*Hydrostatique* ou de l'équilibre des fluides, dont la connaissance est nécessaire pour l'étude de leur mouvement. Ces premières notions, qui se trouvent aussi dans la plupart des traités de mécanique générale et de physique, ont été rendues aussi succinctes que possible : on doit admettre qu'elles sont déjà familières au lecteur. A propos de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, on trouvera dans ce chapitre une démonstration, due à Rankine, de la propriété principale du métacentre, et qui m'a semblé plus simple, bien qu'un peu moins générale peut-être, que celle que l'on en donne ordinairement. Les applications aux prismes carrés, encore que très connues, et pour ainsi dire classiques, m'ont paru bonnes à rappeler.

Avec le Chapitre II commence l'étude du mouvement des liquides et des conditions générales de ce mouvement. Après les équations générales de l'hydrodynamique, on y trouvera l'équation fondamentale de l'hydraulique de laquelle se déduit immédiatement, pour le mouvement permanent, le théorème de Bernoulli. L'étude du mouvement uniforme, qui vient ensuite, a donné l'occasion de définir le frottement intérieur des liquides et de rappeler une remarquable expérience faite par M. Couette, rapportée par lui dans sa thèse de doctorat du 30 mai 1890, et qui est de nature à apporter une vive lumière sur les conditions, encore si peu connues, de ce frotte-

ment. L'expression du coefficient du frottement intérieur, donnée par M. Boussinesq, sert ensuite à établir les formules générales du mouvement uniforme dans une section circulaire ou demi-circulaire, ainsi que dans une section rectangulaire très large.

Après toutes ces généralités sur le mouvement des liquides vient l'étude des circonstances accidentelles de ce mouvement, qui constitue le Chapitre III que l'on pourrait intituler : étude des points singuliers des courants liquides. On y trouve d'abord les lois de l'écoulement par des orifices en mince paroi ou en paroi épaisse, avec les coefficients de débit qui ont été proposés soit par Poncelet et Lesbros, soit par M. Graeff, soit en dernier lieu par M. Hamilton Smith, ingénieur américain qui a publié en 1886 un important ouvrage où sont discutées toutes les expériences connues, y compris les plus récentes, sur ce sujet. Les diverses causes de perte de charge : l'élargissement brusque de la section d'écoulement, le passage à travers une section rétrécie, l'entrée dans un tuyau, le passage dans les coudes, forment un paragraphe spécial de ce chapitre, qui comprend ensuite l'étude de l'écoulement par les ajutages, puis par les déversoirs.

Pour le paragraphe relatif aux déversoirs j'ai emprunté la théorie aux travaux les plus récents de M. Boussinesq qui est parvenu, au moyen d'une hypothèse simple mais assez plausible sur la forme des trajectoires des filets liquides, à donner une explication parfaite de l'écoulement par un déversoir en mince paroi. Les expériences nombreuses et précises de M. Bazin ont confirmé ces vues théoriques jusque dans leurs plus petits détails. M. Bazin a en outre fait une étude expérimentale très complète des nappes déversantes; cette étude n'est pas encore terminée, mais il a eu l'obligeance de m'autoriser à faire con-

naître les premiers résultats qui doivent être publiés prochainement dans les Annales des ponts et chaussées. De cette première partie, il résulte que le coefficient de débit des déversoirs varie dans des limites beaucoup plus étendues qu'on ne le supposait et que, par suite, les débits que l'on calculait avec un coefficient unique sont souvent fort éloignés de la réalité.

Après quelques exemples d'application des formules établies dans les paragraphes précédents, je continue l'étude des points singuliers des cours d'eau par celle du ressaut superficiel, d'après les travaux de M. Bazin et ceux de M. Boussinesq. La division des cours d'eau en deux catégories, les rivières et les torrents, s'y trouve faite d'après la distinction qui a été établie par ce savant, dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Le Chapitre III se termine par une étude très sommaire des tourbillons liquides d'après M. Boussinesq.

Le chapitre IV est consacré aux tuyaux de conduite. L'étude de l'écoulement dans les tuyaux est relativement simple, elle ne donne lieu à aucune particularité intéressante ; la seule difficulté consiste à choisir une formule qui donne la vitesse moyenne en fonction du diamètre et de la charge. Je cite un grand nombre de celles qui ont été proposées, avec les coefficients correspondants. En France on se sert, presque exclusivement, soit de celle de Prony, soit de celle de Darcy, ou des tables qui en ont été déduites. A l'étranger, au contraire, c'est la formule et les tables de Weisbach qui sont le plus usitées. J'en propose une autre, qui donnera le plus souvent des résultats intermédiaires entre celles-là; elle présente, en apparence, plus de complication, mais son emploi est rendu facile par les tables numériques que j'en ai déduites.

La résolution de quelques-uns des problèmes les plus ordinaires auxquels donne lieu l'établissement des tuyaux de conduite forme la partie la plus importante de ce chapitre qui se termine par une étude très sommaire des conditions de l'écoulement, c'est-à-dire de la répartition des vitesses dans un tuyau circulaire.

L'étude des cours d'eau commence avec le Chapitre V. Elle se divise en deux parties principales, la première s'applique aux canaux découverts ou aux cours d'eau de section transversale et de pente constantes contenus dans un lit de forme invariable. Après y avoir donné les formules du mouvement uniforme, j'y étudie, d'après M. Bazin et M. Cunningham, la loi de la répartition des vitesses aux divers points de la section transversale, et, après quelques applications des formules spéciales, je considère le mouvement permanent varié, ou la théorie des remous d'exhaussement et d'abaissement; j'emprunte à Dupuit une grande partie de ce paragraphe, ainsi que du suivant où sont calculés les effets d'un étranglement ou d'un élargissement du lit.

La seconde partie de l'étude des cours d'eau, consacrée aux cours d'eau naturels, forme le Chapitre VI. Par opposition aux canaux qui font l'objet du chapitre précédent, je considère alors les cours d'eau à fond mobile et les conditions nouvelles qui résultent de la mobilité du lit. Après avoir rappelé la loi primordiale exprimant l'équilibre des matériaux du fond, déjà énoncée par Guglielmini, je donne une explication sommaire de l'entraînement et de la suspension de ces matériaux, puis une théorie de l'équilibre des rivières à fond de sable d'après M. Lechalas. Abordant ensuite la question de l'influence de la forme des rives, je résume les importants

travaux de M. Fargue sur ce sujet. Je ne pouvais avoir la prétention, dans ce seul paragraphe d'un ouvrage dont le programme comprend tant d'autres sujets, de traiter d'une manière complète et détaillée l'importante question de l'amélioration des rivières; M. Lechalas a écrit, sur l'*Hydraulique fluviale*, un volume tout entier de l'Encyclopédie, et M. Guillemain a aussi traité la question dans son *Cours de navigation intérieure*. Je devais donc, sous peine de reproduire ce qui avait déjà été publié par ces deux savants ingénieurs, me borner à des considérations générales, en quelque sorte théoriques, résumant, autant que possible, les lois applicables à tous les cours d'eau à fond mobile.

J'ai donc simplement constaté que la correction des rivières par l'établissement de digues longitudinales a les conséquences suivantes: l'abaissement des hauts fonds du thalweg; la diminution de la pente et l'abaissement de l'étiage vers l'amont.

Cet abaissement peut produire en amont, ou la chute des rives, si elles ne sont pas suffisamment protégées, ou bien des rapides raccordant l'ancien niveau avec le niveau abaissé. Ces désordres ne peuvent être évités que si l'on établit, dans le lit, des barrages de soutènement, ou seuils résistants, en des points convenablement choisis. La construction de ces seuils, dans le lit, peut d'ailleurs être complétée par l'établissement de hausses ou barrages mobiles augmentant le tirant d'eau et les chutes à racheter par des écluses.

Chacun de ces barrages de soutènement du lit localise en un point l'effet de la diminution de pente produite par le règlement des rives. Quand la pente est faible, on peut arriver à une solution définitive, sans écluses, en maintenant ainsi la pente naturelle dans chaque section de

rivière après avoir régularisé les rives. Si au contraire la pente est forte, on laisse le nouveau tracé des rives produire son effet sur des sections séparées par de véritables barrages créant des chutes où l'on établit des écluses. Mais si, dans un cours d'eau à forte pente, on place ces barrages (qui, construits d'ordinaire sur une partie seulement de la largeur et alternativement sur chaque rive, portent alors le nom d'épis-noyés, assez près les uns des autres pour que le fond conserve sa pente générale, on arrive à créer une vitesse moyenne trop grande qui peut rendre le cours d'eau impraticable à la remonte.

A la suite de cet exposé sommaire, je donne, d'après Dupuit, dans un court paragraphe, les lois de l'écoulement souterrain, ou à travers des terrains perméables, et enfin, je termine ce chapitre, consacré aux cours d'eau naturels, par l'indication des méthodes de jaugeage : par l'observation des hauteurs, par déversoirs, par flotteurs simples et doubles, par bâtons lestés, par tube de Pitot ou de Darcy, par moulinet de Woltmann ou de Harlacher.

Le Chapitre suivant est consacré aux crues des cours d'eau, ou plus généralement au mouvement non permanent. Après avoir donné les équations générales de ce mouvement je résume les travaux de M. Kleitz sur les crues, et j'indique les méthodes approximatives qu'il a employées sur le Rhône pour l'étude de ces phénomènes. Je passe ensuite à la prévision des crues et, après avoir rappelé sommairement les travaux de Belgrand, j'indique les méthodes proposées et adoptées par M. Allard et par M. Mazoyer pour la prévision des crues de la Seine et de la Loire. Enfin je donne quelques idées générales sur la question de l'atténuation des effets des crues par des réservoirs, digues submersibles ou insubmersibles.

Le Chapitre VIII traite des mouvements ondulatoires, dont l'étude théorique élémentaire est aujourd'hui possible, grâce aux travaux de M. Boussinesq, dont les résultats se sont accordés d'une manière si remarquable avec les recherches expérimentales de M. Bazin sur la propagation des ondes. J'étudie d'abord les ondes de translation de forme quelconque, puis l'onde solitaire qui seule se propage sans se déformer. Je donne ensuite, d'après Gerstner, une théorie élémentaire des ondes d'oscillation ou de la houle, avec quelques indications sommaires sur le clapotis. J'ai rattaché à ce chapitre les mouvements oscillatoires de l'eau dans les tubes et les colonnes liquides oscillantes proposées pour économiser l'eau dans les écluses de navigation. Enfin, je termine le chapitre par quelques indications générales sur les marées de la mer et les marées fluviales, d'après Comoy. On trouvera, dans ce dernier paragraphe, l'indication des méthodes données par M. Lechalas pour déterminer la vitesse moyenne, à un instant quelconque, dans l'une des sections transversales du fleuve, dans la partie soumise à l'action de la marée ; et aussi le résumé d'un travail de M. le professeur Cauthorne Unwin relatif au mouvement des eaux dans les estuaires et à la manière dont s'y mélangent les eaux de diverses provenances. Le chapitre se termine par quelques considérations générales sur l'amélioration des estuaires des fleuves à marée, empruntées à M. le professeur Franzius.

C'est là que se termine, à proprement parler, l'hydraulique, ou l'étude du mouvement de l'eau.

Le Chapitre IX, qui suit, est relatif aux fluides élastiques. Il est impossible d'établir une théorie des mouvements de ces fluides sans s'appuyer sur les principes de la thermodynamique et, d'autre part, il m'était diffi-

cile de donner, dans un traité d'hydraulique où les fluides élastiques ne figurent que d'une façon accessoire, un exposé complet de la théorie mécanique de la chaleur. J'ai essayé d'en établir d'une façon simple, qui sera peut-être trouvée peu rigoureuse, les équations générales nécessaires à l'objet spécial que j'avais en vue : l'étude du mouvement des gaz parfaits.

Après avoir donné ces formules générales, je les applique aux réservoirs d'air en communication avec les conduites d'eau et à l'étude du mouvement des gaz. D'après M. Haton de la Goupillière, j'indique la loi du mouvement varié d'un gaz remplissant un réservoir et j'aborde ensuite le problème, plus important, de l'écoulement des gaz par longues conduites. Les travaux de M. Arson sur le gaz d'éclairage servent encore aujourd'hui de règle aux ingénieurs qui s'occupent de la distribution du gaz ; mais il semble que les coefficients numériques qu'il a déduits de ses expériences et les tables qu'il a calculées ne sont pas applicables au transport de l'air comprimé. C'est du moins ce qui résulte d'expériences faites d'abord par M. Stockalper, puis par M. Kraft et en dernier lieu par M. Riedler. Ces expériences paraissent encore trop peu nombreuses et trop peu précises pour que l'on puisse en déduire de nouveaux coefficients et une nouvelle formule et je me borne à conseiller provisoirement, d'après l'avis de M. Kraft, l'usage des tables numériques dressées pour le calcul des conduites d'eau, qui fournira tout au moins une approximation.

Enfin le Chapitre X et dernier est relatif à la résistance des fluides, question encore très obscure sur laquelle la théorie et l'expérience font également défaut. La théorie ne donne un résultat positif que pour le problème de l'impulsion d'une veine fluide contre un plan indéfini ; lors-

qu'il s'agit au contraire d'un solide soumis à l'action d'un courant indéfini, elle ne peut plus donner que des aperçus qui doivent être complétés ou rectifiés par l'observation des faits. J'indique les tentatives théoriques de Poncelet et de Saint-Venant ; puis j'emprunte à Du Buat des renseignements expérimentaux et en même temps des vues qui, pour avoir été négligées pendant un siècle, ne me paraissent pas moins devoir conduire à la route sur laquelle on aura le plus de chances de trouver une solution satisfaisante. De nouvelles expériences, entreprises sous la direction de M. de Mas, permettront sans doute de faire un progrès marqué dans la connaissance des efforts mutuels des liquides et des solides en mouvement relatif.

On voit, d'après ces indications sommaires, que la plupart des problèmes que Du Buat proposait dans son discours préliminaire se trouvent aujourd'hui, sinon définitivement résolus, au moins pourvus d'une solution à peu près suffisante pour les besoins de la pratique. Toutefois, dans bien des cas encore, les formules ne sont guère qu'un masque qui recouvre notre ignorance ; il faut donc éviter de les employer sans discernement, ce qui n'a pas toujours eu lieu, et l'on pourrait peut-être, en paraphrasant la dernière proposition de Du Buat, dire aujourd'hui :
« Tout le monde applique les formules de l'hydraulique,
« mais bien peu de personnes les entendent. »

Le présent ouvrage est destiné aux ingénieurs, et l'un des problèmes les plus délicats qu'ils aient à résoudre est celui du règlement des retenues d'eau. J'ai cru devoir donner, comme annexes, les lois, arrêtés, circulaires et instructions ministérielles relatives à cette question. J'y ai ajouté quelques considérations générales sur l'interprétation qui pouvait leur être donnée, et j'ai cherché à réagir contre la tendance naturelle que l'on peut avoir à

s'en tenir strictement à la lettre de ces recommandations administratives. Enfin j'ai pu, grâce surtout à des renseignements qui m'ont été obligeamment fournis par M. Sorel, donner quelques exemples d'ouvrages destinés au partage des eaux d'irrigation.

Un ouvrage d'hydraulique doit nécessairement être complété par des tables numériques ; les formules, si exactes qu'elles soient, sont presque toujours trop compliquées pour les besoins de la pratique ; leur emploi donne souvent lieu à des tâtonnements ou à des pertes de temps par suite desquels elles sont abandonnées dès qu'elles ne sont pas très simples. Les tables calculées à l'avance, fournissant immédiatement, sans travail et surtout sans erreur, les solutions dont on a besoin, sont la seule forme sous laquelle les formules un peu compliquées puissent se faire accepter.

Je ne donne pas moins de 18 tables numériques, dont quelques-unes sont entièrement nouvelles. Même dans celles dont les chiffres ont été empruntés à d'autres ouvrages, on trouvera des dispositions qui m'ont paru plus commodes, et qui sont destinées à en rendre l'emploi plus facile et plus expéditif ; j'espère qu'elles seront bien accueillies.

Je dois en terminant, exprimer mes remerciments à tous les ingénieurs qui ont bien voulu me fournir des documents et dont les noms se trouvent cités dans le cours de l'ouvrage. Mais je dois en outre un témoignage de reconnaissance tout spécial à M. Lechalas dont la collaboration m'a été précieuse. Sa connaissance approfondie des questions d'hydraulique fluviale, dont il m'a obligeamment fait profiter, m'a été de la plus grande utilité, ainsi que les renseignements bibliographiques nombreux et détaillés qu'il a bien voulu me fournir. Grâce à lui j'ai pu,

malgré mon inexpérience de ce sujet, écrire sur les cours d'eau naturels un chapitre entier où j'ai cherché à condenser le plus possible tout ce qu'il m'a appris concernant cette importante application des principes de l'hydraulique à l'art de l'ingénieur.

Dans un ouvrage où tant de sujets divers sont traités, il est difficile d'avoir des notations spéciales pour chaque objet : l'alphabet n'y suffirait pas. On trouvera, en général, au commencement de chaque chapitre ou de chaque paragraphe la signification des notations qui y sont employées. Toutefois, il y a certaines lettres auxquelles j'ai conservé, autant que possible, la même signification dans toute l'étendue du volume, sauf quelques exceptions pour lesquelles il ne peut y avoir d'ambiguité.

Je désigne donc en général par :

g, l'accélération due à la pesanteur,

π, le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

Π, un poids spécifique,

ρ, une densité,

p, une pression,

v, V, des vitesses (ou des volumes dans le chapitre IX),

u, U, des vitesses moyennes,

h, H, des hauteurs verticales, ou des profondeurs de cours d'eau,

i, la pente du lit d'un cours d'eau,

I, la pente superficielle,

J, la perte de charge par unité de longueur dans les tuyaux de conduite,

Q, le débit total d'un cours d'eau ou d'une conduite,

q, le débit par unité de largeur d'un cours d'eau,

L, la longueur d'un courant, suivant la direction du mouvement,

l, la largeur dans une direction perpendiculaire,

D, le diamètre d'une conduite,

ω, l'aire d'une section transversale,

χ, le périmètre mouillé,

R, le rayon moyen d'un courant, $R = \frac{\omega}{\chi}$ (par exception, R représente quelquefois le rayon d'un cercle dans les premiers chapitres; dans les chapitres IX et X, R a des significations spéciales),

log., le logarithme vulgaire ou décimal,

Log., le logarithme naturel ou népérien,

sih., le sinus hyperbolique: $\text{sih}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

coh., le cosinus hyperbolique: $\text{coh}\, x = \frac{e^x + e^{x-}}{2}$,

tah., la tangente hyperbolique: $\text{tah}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

Les valeurs de ces fonctions hyperboliques, pour diverses valeurs de leur argument, sont données dans la table XVII, page 672.

A. F.

HYDRAULIQUE

CHAPITRE PREMIER

HYDROSTATIQUE

§ 1. Généralités. — § 2. Équilibre des fluides. — § 3. Équilibre des corps immergés.

§ 1.

GÉNÉRALITÉS

1. Fluides. — On donne, en général, le nom de fluide à un corps qui n'offre aucune résistance appréciable aux déformations, ou qui prend, de lui-même, la forme des corps solides avec lesquels il est en contact.

Si, à travers un pareil corps, on imagine une surface plane le séparant en deux parties, l'effort nécessaire pour faire glisser l'une de ces deux parties sur l'autre sera extrêmement faible.

On désigne sous le nom de *fluide parfait* un fluide idéal, dans lequel cet effort serait rigoureusement nul : il n'existe pas, dans la nature, de fluides parfaits, pas plus qu'il n'existe de solides indéformables. Il est cependant utile de considérer et d'étudier les lois de l'équilibre et du mouvement de ces corps fictifs, auxquels les corps naturels peuvent être assimilés avec une approximation qui, dans un certain nombre de questions, est suffisante. Il est toutefois à remarquer

que les fluides naturels diffèrent, du fluide parfait que l'on vient de définir, assez notablement pour que l'assimilation dont il s'agit ne puisse se faire que dans des cas assez restreints. Lorsqu'il s'agit d'en étudier le mouvement, il est presque toujours indispensable, à moins que l'on n'ait à considérer que des mouvements très lents ou très limités, de faire entrer en ligne de compte l'effort qui serait nécessaire pour faire glisser l'une sur l'autre deux parties séparées par une surface plane fictive, menée à travers le fluide.

2. Viscosité. — Cet effort est ce que l'on appelle souvent la *viscosité* du fluide. Il peut être considéré comme une résistance tangentielle, située dans le plan de glissement, et dirigée en sens inverse du mouvement. Il a donc une grande analogie avec le *frottement* des corps solides ; cette même dénomination de frottement lui est attribuée en même temps que celle de viscosité, et c'est celle dont nous nous servirons de préférence, bien que le *frottement* d'un fluide sur lui-même soit différent, à certains égards, de celui des solides.

3. Liquides. Gaz. — On sait qu'il y a, dans la nature, au moins deux espèces différentes de fluides : les liquides et les gaz. Les premiers sont caractérisés par l'incompressibilité et la constance du volume, à une température déterminée ; les autres, au contraire, sont compressibles et tendent à occuper toujours un espace plus grand, si l'on diminue la pression qui agit sur eux. On les appelle souvent, pour ce motif, fluides élastiques.

Nous nous occuperons d'abord exclusivement des fluides incompressibles, ou liquides. Un chapitre spécial sera consacré aux fluides élastiques.

4. Hydrostatique, hydrodynamique, hydraulique. — L'étude de l'équilibre des liquides porte le nom d'hydrostatique ; celle de leur mouvement s'appelle hydrodynamique ; mais cette dernière dénomination s'applique surtout à l'étude

analytique du mouvement. Lorsque l'on a en vue, comme dans cet ouvrage, les applications et les lois pratiques du mouvement des liquides, on en désigne l'ensemble sous le nom d'*hydraulique*.

Avant d'aborder l'étude de l'hydraulique proprement dite, nous rappellerons brièvement les principales notions les plus élémentaires de l'hydrostatique.

§ 2.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES

3. Pression hydrostatique. — Si, dans un fluide en équilibre, on considère un plan idéal quelconque, le divisant en deux parties, et la résultante des actions qui s'exercent à travers ce plan, entre les molécules situées d'un côté sur celles de l'autre, cette résultante est la *pression* de l'une de ces parties sur l'autre. Et si, au lieu d'une surface indéfinie, on considère un élément plan infiniment petit, en un point M du fluide, la pression, rapportée à l'unité de surface, sur cet élément plan, est dite la *pression au point* M.

L'expérience montre que, dans les fluides naturels, le frottement intérieur est fonction de la vitesse de glissement, et s'annule avec elle. Il en résulte que, dans un fluide en équilibre, les vitesses relatives des diverses molécules étant égales à zéro, il ne s'exerce pas de frottement ou d'effort tangentiel sur un élément plan quelconque et que, par suite, le fluide naturel peut, dans toutes les questions d'équilibre, être assimilé rigoureusement à un fluide parfait. Et l'on peut énoncer ce théorème : *Dans un fluide naturel en équilibre, la pression en un point quelconque est normale à la surface sur laquelle elle s'exerce.*

Si, en un point M d'un fluide en équilibre, on mène trois plans rectangulaires quelconques et un quatrième plan oblique, la pression au point M, sur l'un quelconque de ces plans, sera

normale à ce plan. Si, à une distance infiniment petite du plan oblique, on en mène un autre parallèle, interceptant, entre les trois plans rectangulaires, un tétraèdre infiniment petit, la pression, sur la base oblique du tétraèdre, devra faire équilibre aux autres forces qui agissent sur ce corps. Ces forces sont, d'une part, celles qui peuvent s'exercer sur sa masse, qui proviennent de causes extérieures et qui sont proportionnelles à cette masse, c'est-à-dire infiniment petites d'ordre supérieur par rapport aux pressions sur les faces ; et, d'autre part, ces pressions elles-mêmes qui, pour chacune des faces, sont proportionnelles à l'étendue de ces faces. Or, l'équilibre de ces quatre forces exige que les trois pressions sur les faces rectangulaires du tétraèdre soient respectivement les projections, sur leurs directions, de la pression sur la face oblique. D'un autre côté, les aires des faces rectangulaires sont les projections sur leurs plans respectifs de l'aire de la face oblique; il en résulte que la pression, rapportée à l'unité de surface, sur l'une quelconque de ces faces rectangulaires, est la même que sur la face oblique, et par suite que *la pression au point* M *est la même sur tout élément de surface passant par ce point, quelle que soit sa direction.*

La pression en un point d'un fluide en équilibre est donc une quantité parfaitement définie et qui ne dépend que de la position de ce point. On l'appelle la *pression hydrostatique.*

6. Équation d'équilibre d'un fluide. — Soit toujours un fluide en équilibre, dont nous rapporterons les points à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. Considérons, dans ce fluide, un parallélépipède rectangle infiniment petit ABEF (fig. 1), ayant ses arêtes parallèles aux axes et respectivement égales à dx, dy, dz. Écrivons les équations d'équilibre de ce parallélépipède, et pour cela, égalons à zéro les sommes des projections, sur les trois axes, des forces qui agissent sur lui.

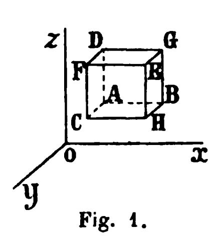


Fig. 1.

Ces forces sont, d'abord, les pressions sur les six faces, lesquelles sont respectivement parallèles aux axes, et ensuite les forces extérieures appliquées à la masse fluide, et dont nous appellerons X, Y, Z les sommes de composantes, rapportées à l'unité de masse, suivant les axes coordonnés, de telle sorte que, ρ étant la densité du fluide considéré, $\rho dxdydz$ la masse de l'élément parallélépipède, la composante, suivant les x, de ces forces extérieures sera $\rho X dxdydz$ et ainsi des autres. Appelons p la pression au point A; au point B, elle sera $p + \frac{dp}{dx} dx$, et, les seules pressions ayant une projection sur l'axe des x étant celles qui s'exercent sur les faces AF et BE, lesquelles ont toutes deux pour surface $dydz$, la somme des projections, sur l'axe des x, des pressions qui s'exercent sur les six faces de l'élément sera $\left[p - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right)\right] dydz$ ou $-\frac{dp}{dx} dxdydz$, et cette somme ajoutée à la composante $\rho X dxdydz$ des forces extérieures doit être égalée à zéro, ce qui donne, après avoir divisé par $dxdydz$, la première des trois équations suivantes dont les deux autres s'obtiennent en considérant les deux autres axes :

$$\frac{dp}{dx} = \rho X;$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho Y;$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par dx, dy, dz; ajoutons-les et remarquons que le premier membre devient alors la différentielle totale de la pression p considérée comme fonction des coordonnées x, y, z, nous obtiendrons l'équation générale de l'hydrostatique

$$(1) \qquad dp = \rho\,(X dx + Y dy + Z dz).$$

Si l'on imagine, à la place du fluide, un point mobile d'une masse égale à l'unité, parcourant l'espace occupé par le fluide

et soumis, en chaque point, aux mêmes forces extérieures que ce fluide, la variation du potentiel de ce point, lorsqu'il passera d'une position à une autre, sera égale et de signe contraire à la différence de pression dans le fluide aux points correspondants.

7. Surfaces de niveau. — Par suite, les *surfaces de niveau* des forces extérieures agissant sur le liquide, définies par l'équation

$$(2) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0, \text{ ou } dp = 0,$$

représentent les surfaces sur lesquelles la pression est la même en tous les points. Si, en particulier, on considère la surface *libre* d'un liquide, en tous les points de laquelle la pression est égale à la pression atmosphérique supposée constante, l'équation précédente définira la forme de cette surface libre ou le *niveau* du liquide en chaque point. C'est à cette propriété qu'est due la dénomination de surfaces de niveau, appliquée aux surfaces d'égal potentiel, et usitée en mécanique générale.

On sait qu'en tous leurs points les surfaces de niveau sont normales à la force extérieure, et que celle-ci est dirigée dans le sens vers lequel le potentiel diminue, ou bien vers lequel la pression augmente. La pression, comme le potentiel, est la même en tous les points d'une même surface de niveau, puisque l'équation de ces surfaces est $dp = 0$.

Nous supposons que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ soit la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées x, y, z, et nous laissons de côté le cas où cette condition ne serait pas satisfaite, lequel n'a pas d'applications pratiques. Si l'on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\,f(x, y, z),$$

on en déduit, d'après l'équation (1)

$$\rho = \frac{dp}{df}.$$

L'équation des surfaces de niveau est $f(x, y, z) = C$, la fonction f, comme la pression p, est constante sur une même surface de niveau et varie d'une surface à une autre. Ces deux quantités sont ainsi fonction l'une de l'autre, et par suite ρ ne peut être que constant ou fonction de p. Dans les liquides homogènes, ρ est constant; il est fonction de p dans les fluides élastiques à température constante où l'on a, en supposant exacte la loi de Mariotte, $p = k\rho$.

La densité ρ étant constante tout le long d'une même surface de niveau, il en résulte que les surfaces de séparation des couches de densités différentes coïncident avec les surfaces de niveau. Il est du reste facile de vérifier que si l'on a un fluide de densité variable, ou des fluides de densités différentes, l'équilibre ne peut être stable que si les densités vont en croissant dans le sens dans lequel est dirigée la force extérieure qui agit sur le fluide; il est instable dans le cas contraire.

8. Application aux fluides pesants. — Si l'on considère un fluide pesant soumis uniquement à l'action de la pesanteur, et si l'on prend l'axe des z vertical et dirigé de bas en haut, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g;$$

et par suite l'équation (1) devient

$$(3) \qquad dp + \rho g dz = 0.$$

L'équation (2), des surfaces de niveau, se réduit à $dz = 0$, ou $z = \text{const}$: les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

Examinons d'abord le cas d'un liquide, dans lequel la densité ρ est constante.

L'équation (3) intégrée depuis une limite inférieure (z_0, p_0) jusqu'à un point quelconque (z, p), donne

$$(4) \qquad p - p_0 = -\rho g (z - z_0) = -\Pi (z - z_0),$$

en désignant par Π le poids spécifique du liquide. *La différence*

de pression entre deux points est égale au poids d'une colonne liquide ayant une section horizontale égale à l'unité, et une hauteur égale à la différence de niveau des deux points considérés.

Nous avons vu, n° 6, que cette différence de pression était égale au signe près à la variation du potentiel d'un point mobile d'une masse égale à l'unité et soumis aux mêmes forces que celles qui agissent sur le liquide. Le poids de la colonne liquide dont il s'agit est donc aussi la mesure de cette différence de potentiel.

L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$z + \frac{p}{\Pi} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = \mathrm{H},$$

en appelant H une quantité constante. La quantité $\frac{p}{\Pi}$, rapport de la pression au poids spécifique du liquide, est dite la *hauteur représentative* de la pression p. Si en chaque point d'un liquide pesant en équilibre, on élève une verticale égale à la hauteur représentative de la pression en ce point, les extrémités de toutes ces verticales se trouveront dans un même plan horizontal, défini par l'ordonnée H. Ce plan s'appelle le *plan de charge*. On voit que si le liquide pouvait s'élever jusqu'à ce plan de charge, la pression sur sa surface libre serait nulle. Si p_0 représente la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface libre réelle, le plan de charge est placé à une hauteur $\frac{p_0}{\Pi}$ audessus de cette surface.

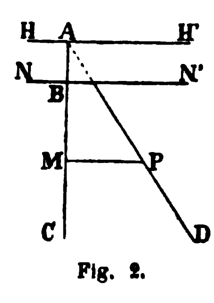


Fig. 2.

NN' (fig. 2) représentant la surface libre d'un liquide, HH' le plan de charge, si, aux différents points tels que M d'une verticale ABC, on mène des horizontales MP proportionnelles aux pressions en ces points, c'est-à-dire à MA, le lieu des points P sera une droite AD, dont l'inclinaison sur la verticale dépendra du rapport que l'on

aura adopté entre MP et MA. Ce mode de représentation des pressions est fréquemment employé.

Si au lieu d'un liquide, nous avons un fluide élastique à température constante, dans lequel (n° 7) la densité soit liée à la pression par la relation $p = k\rho$, l'équation (3) devient, en divisant tous ses termes par p :

$$\frac{dp}{p} + \frac{g}{k} dz = 0;$$

ou bien, en l'intégrant entre les mêmes limites que ci-dessus :

$$\text{Log} \frac{p_0}{p} = \frac{g}{k}(z - z_0).$$

Cette équation, complétée pour tenir compte des variations de température, est employée, comme on sait, dans le nivellement barométrique.

9. Liquide pesant tournant autour d'un axe vertical. — Considérons un liquide pesant animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical que nous prendrons pour axe des z, et supposons ce liquide arrivé à sa position d'équilibre ou de repos relatif par rapport à des axes mobiles animés du même mouvement de rotation. Quel que soit le point M (fig. 3) dont nous étudions l'équilibre, nous pouvons prendre pour plan des zx le méridien qui le contient, et le point M est en équilibre, dans ce plan, sous l'action de la force réelle, son poids, et de la force apparente due à l'inertie dans le mouvement d'entraînement. Les grandeurs de ces forces rapportées à l'unité de masse sont respectivement g et $\omega^2 x$, en appelant ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation et x la distance MP du point M à l'axe ; et elles sont dirigées suivant MB et MA. On a ainsi :

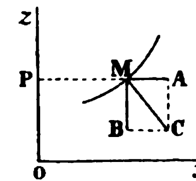


Fig. 3.

$$X = \omega^2 x, \quad Z = -g,$$

et l'équation (1) réduite à deux coordonnées x, z, devient

$$dp = \rho(\omega^2 x dx - g dz).$$

Les surfaces de niveau ont ainsi pour trace sur le plan méridien zx les courbes représentées par l'équation

$$\omega^2 x dx - g dz = 0,$$

ou bien

$$\omega^2 \frac{x^2}{2} - gz = C.$$

Ce sont des paraboles ayant pour axe vertical l'axe de la rotation. Les surfaces de niveau sont les paraboloïdes de révolution engendrés par le mouvement de ces courbes. Elles sont, en chaque point, normales à la résultante MC des deux forces $MB = g$, et $MA = \omega^2 x$ appliquées à l'unité de masse au point M. Cette résultante a pour grandeur $\sqrt{g^2 + \omega^4 x^2}$, elle est toujours supérieure à g et la différence est d'autant plus grande que la vitesse angulaire de la rotation, ω, est plus grande. L'élément de la masse liquide au point M, et en tous les points situés à la même distance x de l'axe, se trouve ainsi dans les mêmes conditions que si la gravité était accrue dans le rapport de g à $\sqrt{g^2 + \omega^4 x^2}$. Si deux de ces éléments ont des densités différentes, la différence des efforts qui agiront sur eux, à égalité de volume, sera également accrue dans le même rapport, et elle sera la même que si, dans un liquide en repos, la différence des densités était aussi augmentée dans la même proportion. Il en résulte que la séparation de liquides de densités peu différentes s'effectuera plus facilement et plus rapidement lorsqu'on les fera ainsi tourner qu'en les laissant immobiles, ces liquides se plaçant d'ailleurs, pour la stabilité de l'équilibre, de telle façon que les densités aillent en croissant dans le sens MC, c'est-à-dire en s'éloignant de l'axe.

Cette propriété est usitée dans l'industrie et l'opération à laquelle elle conduit porte souvent le nom de *turbinage* : le vase animé d'un mouvement de rotation vertical étant appelé turbine. On applique le turbinage, notamment à la fabrication du beurre, opération qui n'est autre chose que la séparation des parties les plus denses du lait, à la filtration des eaux ou des liquides industriels, etc. Le turbinage du sucre, bien qu'étant opéré dans

des appareils analogues, n'est que l'application de la force centrifuge : la paroi latérale de la turbine est percée de trous assez fins pour retenir les cristaux de sucre en laissant passer la mélasse qui s'écoule au dehors.

10. Liquide pesant tournant autour d'un axe horizontal. — Soit encore une masse liquide animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal projeté en O (fig. 4). Une molécule M décrit une circonférence MN d'un rayon r, avec une vitesse angulaire constante ω. A la force réelle MB $= g$ appliquée à l'unité de masse, nous devons encore ajouter, pour ramener cette question à un problème d'équilibre, la force apparente due à l'inertie du mouvement d'entraînement, laquelle, égale à $\omega^2 r$, est dirigée suivant MA, prolongement du rayon OM. La résultante de ces deux forces, MC, sera la normale à la surface de niveau du point M. Prolongeons cette normale MC jusqu'à sa rencontre en P avec la verticale du point O ; les deux triangles semblables MCB, PMO nous donnent :

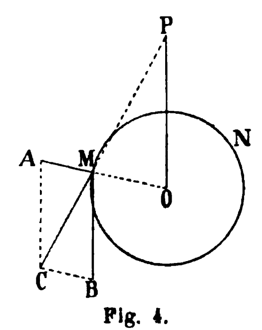


Fig. 4.

$$\frac{\text{PO}}{\text{MB}} = \frac{\text{OM}}{\text{CB}};$$

d'où :

$$\text{PO} = \frac{gr}{\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2}.$$

La position du point P est ainsi indépendante de celle du point M. Toutes les normales aux surfaces de niveau rencontrent le plan vertical passant par l'axe à une même hauteur au-dessus de cet axe.

Ces surfaces sont donc des cylindres à génératrices horizontales parallèles à l'axe de rotation, ayant pour bases des circonférences décrites du point P comme centre. La distance

verticale OP est inversement proportionnelle au carré de la vitesse angulaire ω : lorsque cette vitesse est assez grande, OP devient très petit. Cela explique comment on peut faire tourner comme une fronde un vase en partie rempli d'eau, sans le renverser. Il est nécessaire, pour cela, que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit par les molécules de la surface libre, ou que $OP = \frac{g}{\omega^2}$ soit plus petit que $OM = r$.

§ 3.

ÉQUILIBRE DES CORPS IMMERGÉS

11. Pression d'un liquide pesant sur une surface plane. — La pression dans un liquide pesant et homogène, à une profondeur h mesurée de haut en bas, au-dessous du plan horizontal où la pression est nulle, est, d'après l'équation (4) du n° 8, dans laquelle on fait $p_0 = 0$, et $h = -(z - z_0)$:

$$p = \Pi h.$$

Le plan horizontal de pression nulle à partir duquel on mesure les profondeurs h sera le plan de charge défini au n° 8, ou bien la surface libre du liquide si l'on fait abstraction de la pression atmosphérique, en appelant alors p l'excès de la pression sur celle de l'atmosphère.

Si, dans ce liquide en équilibre, nous imaginons une aire plane AB, limitée par un contour quelconque et la droite MN (fig. 5) d'intersection du plan de cette aire avec la surface libre du liquide, la pression sur un élément ω sera proportionnelle à la profondeur h de cet élément au-dessous de la surface libre. En appelant α l'angle du plan de l'aire

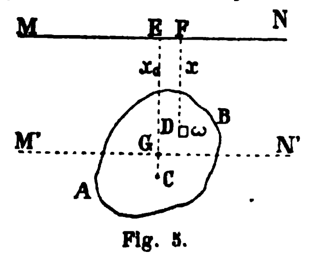


Fig. 5.

considérée avec celui de la surface libre et x la distance DF de l'élément ω à la ligne MN, nous avons $h = x \sin \alpha$, la pression sur l'élément ω est $\Pi h.\omega = \Pi \omega x \sin \alpha$, et la pression totale P $= \Sigma \Pi \omega x \sin \alpha = \Pi \sin \alpha \Sigma \omega x$. La pression est, en chaque point, proportionnelle à la distance de ce point à la droite MN. Or, si l'on appelle x_0 la distance GE du centre de gravité à la ligne MN et Ω l'aire totale AB, on a $\Sigma \omega x = \Omega x_0$ et par suite la pression totale $P = \Pi \Omega x_0 \sin \alpha$: Elle est égale au produit de l'aire Ω par la pression au centre de gravité, laquelle est ainsi la pression moyenne.

Le point C, d'application de la résultante P, ou le centre de pression, sera à une distance x_1 de MN déterminée par l'équation suivante qui exprime l'égalité du moment par rapport à MN de la résultante et des pressions élémentaires :

$$P x_1 = \Sigma \Pi \omega x \sin \alpha .\ x = \Pi \sin \alpha \Sigma \omega x^2.$$

Or, $\Sigma \omega x^2$ est le moment d'inertie, par rapport à MN, de l'aire considérée, et si l'on appelle I le moment d'inertie de cette surface par rapport à une horizontale M'N' menée par le centre de gravité, l'on a :

$$\Sigma \omega x^2 = I + \Omega x_0^2 ;$$

et par suite : $x_1 = \frac{P x_1}{P} = \frac{\Pi \sin \alpha \Sigma \omega x^2}{\Pi \sin \alpha \Sigma \omega x} = \frac{\Omega x_0^2 + I}{\Omega x_0} = x_0 + \frac{I}{\Omega x_0}$.

Le centre de pression est donc toujours plus bas que le centre de gravité.

On reconnaît d'ailleurs l'identité du centre de pression ainsi défini avec celui dont il est question au n° 22 du traité de *Résistance des matériaux* qui fait partie de l'*Encyclopédie*. Alors, sans qu'il soit nécessaire de reproduire la démonstration qui en a été donnée, il suffira de rappeler que le centre de pression est l'anti-pôle, par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de l'aire considérée, de la ligne neutre laquelle est ici la ligne d'intersection MN de la surface plane avec la surface libre du liquide.

Lorsque l'aire plane dont on s'occupe a un diamètre de ses cordes horizontales, le centre de pression se trouve nécessairement sur ce diamètre; et alors la formule ci-dessus, donnant sa distance x_1 à la ligne MN, permettra d'en trouver la position.

Nous rappellerons seulement les résultats pour deux formes simples de l'aire plane pressée par un liquide.

1° *Rectangle ayant deux côtés horizontaux.* — Soit b la largeur horizontale, a la hauteur du rectangle ; on a $\Omega = ab$ et $I = \frac{a^3 b}{12}$. On en déduit

$$x_1 = x_0 + \frac{a^3 b}{12\, ab x_0} = x_0 + \frac{a^2}{12\, x_0}.$$

La distance du centre de pression au centre de gravité, $x_1 - x_0$ est égale à $\frac{a^2}{12\, x_0}$; elle est inversement proportionnelle à x_0. Lorsque le côté supérieur du rectangle coïncide avec la surface libre, on a $x_0 = \frac{a}{2}$ et $x_1 - x_0 = \frac{a}{6}$; résultat que l'on a déjà trouvé dans la *Résistance des matériaux.*

2° *Cercle.* — Soit r le rayon du cercle :

$$\Omega = \Pi r^2, \quad I = \frac{1}{4} \Pi r^4 ;$$

et l'on a

$$x_1 = x_0 + \frac{\pi r^4}{4 \pi r^2 x_0} = x_0 + \frac{r^2}{4\, x_0}.$$

La distance du centre de pression au centre de gravité, $x_1 - x_0$ est alors égale à $\frac{r^2}{4\, x_0}$ ou bien à $\frac{(2r^2)}{16\, x_0}$. Si donc l'on compare une aire rectangulaire à une aire circulaire ayant pour diamètre la hauteur du rectangle, le centre de pression, dans le cercle, sera plus rapproché du centre de gravité que dans le rectangle.

12. Pression d'un fluide sur une surface quelconque. Principe d'Archimède. — *Quand une surface fermée se trouve soumise en tous ses points à une pression normale cons-*

tante par unité superficielle, la résultante de toutes ces pressions élémentaires est nulle.

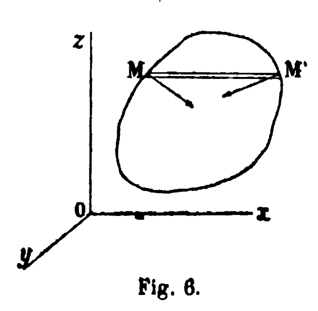


Fig. 6.

Rapportons la surface à trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques et divisons-la en prismes infiniment petits parallèles à l'un des axes, Ox, par exemple. La pression sur la base oblique M de l'un de ces prismes a pour valeur la pression p par unité de surface multipliée par l'étendue de cette base oblique. La projection de cette pression sur l'axe des x est égale au produit de p par l'aire de la section droite du prisme. De même, la pression sur l'autre base M′ du même prisme aura pour projection sur l'axe des x le produit de p par l'aire de la section droite, c'est-à-dire la même valeur que l'autre. La somme de ces deux projections égales et de sens contraire sera ainsi nulle et il en sera de même des projections des pressions sur les bases de tous les autres prismes. La somme des projections sur l'axe des x des pressions qui s'exercent sur toute la surface fermée est donc égale à zéro; et comme on peut faire le même raisonnement pour les deux autres axes, on en conclut la nullité de la résultante elle-même.

Ce théorème donne le moyen de déterminer la résultante de pressions normales, constantes par unité superficielle, sur une surface irrégulière quelconque limitée à un plan. Soit AMB (fig. 7) cette surface limitée au plan AB et soumise en tous ses points à une pression normale p.

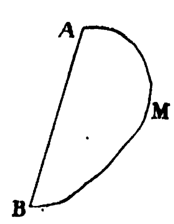


Fig. 7.

Si nous considérons le volume formé par cette surface et par le plan AB et si nous le supposons soumis en tous ses points à la pression normale p, il sera en équilibre. Il en résulte, par conséquent, que la pression p sur le plan AB fait équilibre à la pression p sur la surface AMB, ou bien que la résultante des pressions sur cette surface est la même que celle de la pression p sur le plan AB, laquelle est égale au

produit de p par l'aire de cette surface AB, normale à AB et appliquée a son centre de gravité.

Si un corps solide est plongé dans un fluide pesant en équilibre, la composante horizontale de la résultante des pressions qui s'exercent sur lui est nulle, c'est à-dire que cette résultante est verticale. Supposons le corps solide divisé en tranches horizontales infiniment minces par des plans horizontaux parallèles, la pression par unité superficielle sera la même en tous les points du contour de l'une de ces tranches, et en raisonnant comme nous venons de le faire, nous reconnaîtrons que la somme des projections, sur deux axes horizontaux, des pressions qui s'exercent sur le contour de chacune des tranches est égale à zéro et qu'il en est de même, par suite, de la composante horizontale de la résultante de toutes les pressions. Celle-ci est donc verticale.

Lorsqu'un corps solide est plongé dans un fluide pesant en équilibre, la résultante verticale des pressions qui s'exercent sur sa surface est égale au poids du fluide déplacé, et passe par le centre de gravité de ce fluide.

Divisons le corps solide en prismes verticaux infiniment petits, et soit ω la section droite de l'un de ces prismes MM' (fig. 8). Si p et p' sont les pressions par unité superficielle qui s'exercent en M et en M', la somme des projections, sur un axe vertical, des pressions sur les bases obliques du prisme MM' sera $p'\omega - p\omega$ ou $(p'-p)\omega$. Si h et h' sont les profondeurs des points M et M' au-dessous de la surface libre, on a (n° 11)

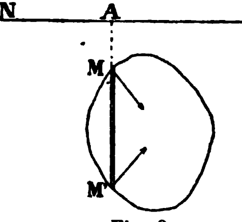


Fig. 8.

$$p = \Pi h, \quad p' = \Pi h' \quad \text{et} \quad (p' - p)\omega = \Pi(h' - h)\omega.$$

Or, $h' - h =$ MM'; on voit donc que la somme des projections, sur un axe vertical, des pressions qui s'exercent sur les bases M et M' est égale au poids de ce prisme supposé rempli du fluide dans lequel le corps est plongé et que la résultante ver-

cale de ces pressions agit de bas en haut, ou en sens inverse de la pesanteur. En faisant le même raisonnement pour tous les autres prismes élémentaires on voit que la résultante totale des pressions sur la surface du solide est bien égale au poids du fluide qui remplirait le volume du solide et qu'elle passe par le centre de gravité du fluide déplacé, car les diverses pressions élémentaires qu'il faudra composer pour obtenir la résultante occupent exactement la position des prismes.

C'est ce théorème qui porte le nom de *principe d'Archimède.* La pression de bas en haut à laquelle sont soumis de la part d'un liquide les corps solides qui y sont plongés produit une diminution apparente de leur poids que l'on qualifie quelquefois de *perte* de poids.

Nous avons démontré ce principe dans l'hypothèse où le fluide a un poids spécifique constant. Il est également vrai lorsque le poids spécifique est variable, et il se démontre de la même manière. On peut d'ailleurs en reconnaître l'exactitude dans tous les cas par le raisonnement suivant : si l'on considère, dans un fluide en équilibre, la portion qui sera déplacée par le corps solide qu'on y plongera, cette portion supporte, de la part du fluide ambiant, une pression verticale, égale et directement opposée à son poids. Cette pression, qui est la résultante de celles qui s'exercent en tous les points de la surface de séparation, sera la même lorsque le solide aura remplacé le liquide puisque cette surface de séparation sera la même.

Le point d'application de cette résultante verticale, qui est le centre de gravité du liquide déplacé, s'appelle, lorsqu'il s'agit de corps flottants à la surface, le centre de *carène* ; on peut sans inconvénient étendre cette dénomination au cas d'un corps entièrement immergé.

12. Stabilité de l'équilibre des corps immergés. — Un corps solide, entièrement immergé dans un liquide, est donc soumis à deux forces : son poids, appliqué en son centre

de gravité G; la pression du fluide ambiant, égale au poids du fluide déplacé et appliquée au centre de carène C. Pour que le corps soit en équilibre sous l'action de ces deux forces, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées, c'est-à-dire que le poids du corps soit égal au poids du liquide qu'il déplace, et que le centre de gravité et le centre de carène soient sur la même verticale. Mais, pour que l'équilibre soit stable, il faut en outre que le centre de gravité soit placé au-dessous du centre de carène. On voit en effet qu'alors (fig. 9), si le corps solide subit un petit déplacement, les deux forces auxquelles il est soumis formeront un couple qui tendra à le ramener vers sa position d'équilibre. Il en serait autrement si le centre de gravité (fig. 10) était au-dessus du centre de carène : l'équilibre serait instable.

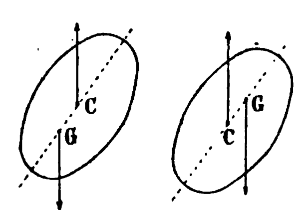


Fig. 9. Fig. 10.

14. Stabilité de l'équilibre des corps flottants. Métacentre. —Lorsque le poids du corps solide est inférieur à celui du liquide qu'il déplacerait, s'il était entièrement plongé, il flotte à la surface en plongeant seulement d'une quantité suffisante pour déplacer un poids de liquide égal au sien. Alors la résultante des pressions du liquide peut faire équilibre à son poids, il suffit encore pour cela que le centre de gravité et le centre de carène soient sur une même verticale. Mais la condition de la stabilité de cet équilibre reçoit une forme nouvelle provenant de ce que, lorsque le solide subit un déplacement, la forme de la partie plongée change et que, par suite, la position du centre de carène change aussi dans l'intérieur du solide.

Soit G le centre de gravité d'un corps flottant, C le centre de carène correspondant à l'équilibre. Si l'on suppose que le corps flottant se soit déplacé de manière que la ligne GC (fig. 11) soit venue en GC', le nouveau centre de carène sera venu quelque part en D, ou D_1, ou D_2. S'il est venu en D, c'est-

à-dire s'il est resté sur la verticale du point G, les deux forces auxquelles est soumis le corps flottant) son poids et la pression du fluide) sont encore directement opposées ; le solide reste en équilibre, et cet équilibre est ainsi *indifférent ;* il subsiste quel que soit le déplacement attribué au solide. Si le centre de carène est venu en D_1, le couple formé par les deux forces tend à écarter davantage le solide de sa position d'équilibre : l'équilibre est instable. Il ne peut être stable que si le nouveau centre de carène vient en D_2 au-delà de la verticale du point G, ou, ce qui revient au même, que si la verticale $D_2 M_2$ du nouveau centre de carène rencontre la ligne C'G au-delà du point G.

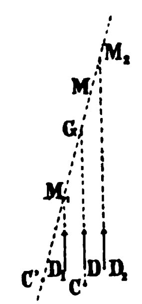


Fig. 11.

La limite de la position du point M_2 lorsque le déplacement du solide est infiniment petit, s'appelle le *métacentre*[1] M.

On énoncera donc la condition de la stabilité de l'équilibre en disant que pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable il faut que le métacentre soit au-dessus du centre de gravité.

Il reste à déterminer la position du métacentre. Soit un corps flottant dont le centre de gravité est G (fig. 12), soit DE la trace sur ce corps du plan de flottaison dans la position d'équilibre et C le centre de carène correspondant ; supposons ce corps déplacé d'une quantité très petite et soit AB la trace du plan de flottaison dans cette nouvelle position, et C' le nouveau centre de carène. Le métacentre est, par définition, la limite de la position du point M, intersection de la droite CG prolongée

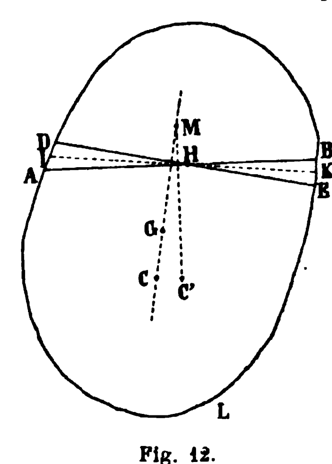


Fig. 12.

1. Le nom de métacentre a été donné à ce point par Bouguer, dans son *Traité du navire* de 1746. On trouvera aussi dans cet ouvrage la définition de la *courbe métacentrique*, dont le métacentre est le point de rebroussement.

avec la verticale du point C'. Prenons pour plan de la figure un plan vertical perpendiculaire à l'intersection des deux plans AB, DE. Si, comme nous le supposons, le déplacement du corps est très petit, les deux sections AB, DE différeront très peu l'une de l'autre et chacune d'elles sera à très peu près égale à la section faite par le plan IK bissecteur de l'angle de ces deux plans, lequel contiendra ainsi les centres de gravité des deux fuseaux DHA et BHE, dont les volumes sont égaux puisque ALB, DLE le sont nécessairement, chacun d'eux déplaçant un volume de liquide dont le poids est égal à celui du corps flottant. Soit V ce volume.

Prenons les moments, par rapport à IK, des deux volumes DLE et ALB. Si nous supposons connu le premier de ces moments, pour en déduire le second, nous devrons en retrancher le moment du fuseau DHA, lequel est nul puisque le centre de gravité de ce fuseau est sur IK; et y ajouter le moment du fuseau BHE qui est également nul. Les moments, par rapport à IK, des deux volumes considérés sont donc égaux, et puisque ces volumes sont égaux leurs centres de gravité sont à la même distance de IK, c'est-à-dire que le centre de carène C' se trouve sur une parallèle à IK menée par le point C.

Prenons ensuite les moments de ces deux mêmes volumes par rapport à une ligne perpendiculaire à IK; ils différeront du produit de V par la distance CC'. Or nous pouvons encore passer du premier moment au second en y ajoutant le moment du fuseau BHE puis en retranchant celui du fuseau DHA. La différence des moments des deux volumes $V \times CC'$, sera la même que celle des deux fuseaux, et cette différence restera aussi la même quelle que soit la position de la ligne, perpendiculaire à IK, par rapport à laquelle on prendra les moments: supposons la passer par le point H, le moment de l'un des fuseaux sera négatif et l'autre positif, et leur différence algébrique sera leur somme arithmétique. Soit, sur le plan IK, un élément infiniment petit ω à une distance y de la ligne projetée en H. Cet élément peut être considéré comme la section droite d'un prisme tronqué limité aux deux plans

AB et DE. En appelant θ l'angle de ces deux plans, la hauteur de ce prisme sera $2y \sin \frac{\theta}{2}$; son volume, $2y\omega \sin \frac{\theta}{2}$, ou bien, puisque l'angle θ est supposé très petit, $y\omega\theta$. Le moment de ce prisme par rapport à la droite projetée en H sera ainsi $y^2\omega\theta$ et la somme des moments de tous les prismes constituant ensemble les deux fuseaux sera $\Sigma\, y^2\omega\theta = \theta\Sigma\omega y^2$, la somme étant étendue à tous les éléments ω de la section IK.

Nous avons ainsi, d'après ce qui vient d'être dit,

$$V \times CC' = \theta\Sigma\omega y^2.$$

Or, l'angle CMC' étant égal à θ, CC' est égal à $2\,MC \sin \frac{\theta}{2}$ ou à $MC.\theta$, ce qui donne, en substituant :

$$V \times MC.\theta = \theta\ \Sigma\omega y^2.$$

A la limite, la section IK se confond avec la section DE et la droite H passe par le centre de gravité de cette section.

Désignons par I le moment d'inertie, $\Sigma\omega y^2$ par rapport à un axe mené par son centre de gravité, de la section DE faite dans le corps flottant par la surface libre du liquide dans la position d'équilibre, l'équation précédente donnera :

$$MC = \frac{I}{V}.$$

Enfin, désignons par a la distance CG du centre de carène au centre de gravité dans la position d'équilibre, la distance MG du métacentre au centre de gravité du solide sera :

$$MG = \frac{I}{V} \mp a,$$

le signe + s'appliquant au cas où le centre de gravité G serait au-dessous du centre de carène C. Alors, pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que MG soit positif et la grandeur de cette quantité MG mesure en quelque sorte la stabilité

de l'équilibre ; elle est en effet, pour un même déplacement, proportionnelle au bras de levier du couple qui tend à ramener le solide dans sa position d'équilibre.

Le moment d'inertie I qui entre dans l'expression de MG doit être évidemment le plus petit des moments d'inertie de la section DE par rapport à tous les axes passant par son centre de gravité.

Le métacentre ainsi déterminé a une position définie indépendante de l'angle θ lorsque cet angle est très petit. Mais si les oscillations du corps flottant ne sont pas très petites, il faut calculer la position du métacentre pour une inclinaison finie que l'on détermine d'après l'amplitude des oscillations auxquelles pourra être soumis le corps flottant [1].

15. Application aux prismes carrés. — Considérons un prisme homogène à base carrée et de longueur indéfinie, flottant sur un liquide. Appelons a le côté de la base et d le rapport du poids spécifique du prisme à celui du liquide, d étant nécessairement plus petit que l'unité : ce sera le poids spécifique du prisme si celui du liquide est pris pour unité. On voit immédiatement que la première condition d'équilibre consistant en ce que le centre de gravité du solide et celui du volume déplacé se trouvent sur une même verticale peut être satisfaite pour deux positions du prisme : deux de ses faces étant paralèlles à la surface du liquide (fig. 13) ; ou bien ses faces étant inclinées à 45 degrés (fig. 14). Dans cette dernière hypothèse, le prisme aura une seule arête ou trois arêtes dans le liquide suivant que son poids spécifique sera inférieur ou su-

1. On démontre facilement que la période des oscillations qu'exécute ainsi un corps flottant écarté de sa position d'équilibre est égale à celle d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{\rho^2}{MG}$, en appelant ρ le rayon de giration du corps solide par rapport à un axe longitudinal horizontal mené par son centre de gravité. Voir, sur ce sujet, le mémoire *Du roulis sur mer houleuse*, par de St. Venant, Société des sciences naturelles de Cherbourg, tome XVI.

périeur à 0,50. Il faut chercher laquelle de ces deux positions sera stable.

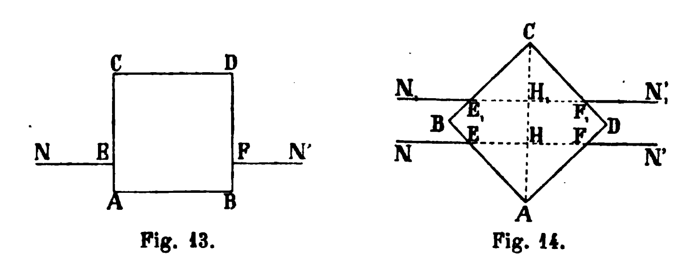


Fig. 13. Fig. 14.

Dans le premier cas, représenté par la figure 13, appelons z la distance à la surface libre NN′ de la face horizontale AB plongée dans le liquide, ou faisons $z = AE = FB$; si nous supposons la longueur du prisme égale à l'unité, nous avons $I = \frac{a^3}{12}$, $V = az$ et par suite $\frac{I}{V} = \frac{a^2}{12z}$. C'est la distance du métacentre au centre de carène et elle doit être supérieure à la distance du centre de gravité du solide à ce dernier point, ou à $\frac{a-z}{2}$.

L'équilibre ne sera donc stable que si l'on a $\frac{a^2}{12z} > \frac{a-z}{2}$, ce qui exige que le rapport $\frac{z}{a}$, ou le poids spécifique d qui lui est égal, soit inférieur à $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,212$, ou supérieur à $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,788$. Il sera instable si le poids spécifique est compris entre ces deux limites.

Considérons alors le second cas, représenté par la figure 14, où, les faces étant inclinées à 45 degrés, une seule arête plonge dans le liquide, et appelons maintenant z la profondeur AH de cette arête au-dessous de la surface libre. Le volume du prisme étant toujours a^2 et le volume déplacé V étant alors z^2, le poids spécifique $d = \frac{z^2}{a^2}$. Le moment d'inertie I est $\frac{(2z)^3}{12} = \frac{2z^3}{3}$ et le rapport $\frac{I}{V}$ est égal à $\frac{2}{3}z$. Ce rapport doit être plus

grand que la distance du centre du prisme au centre de carène ou que $\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}z$. La condition de la stabilité de l'équilibre est ainsi $\frac{2}{3}z > \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}z$, ou $\frac{8}{3}z > a\sqrt{2}$. On en déduit $\frac{z^2}{a^2}$ ou $d > \frac{9}{32}$ ou 0,281. En examinant de même le cas où trois arêtes seraient plongées dans le liquide, on verrait que l'équilibre ne peut être stable que si l'on a $d < \frac{23}{32} = 0,719$.

Ainsi, en résumé, le prisme à base carrée flottera avec sa face supérieure horizontale lorsque son poids spécifique sera inférieur à 0,212 ou supérieur à 0,788. Il aura ses faces inclinées à 45 degrés lorsque son poids spécifique sera compris entre 0,281 et 0,719. On pourra donc, par exemple, au seul aspect d'une pièce de bois flottant sur l'eau, reconnaître si elle est en chêne ou en sapin : le poids spécifique du chêne étant environ 0,87, la pièce en chêne aura sa face supérieure horizontale, et celui du sapin étant environ 0,49, la pièce en sapin aura ses faces inclinées à 45 degrés.

Lorsque le poids spécifique du prisme flottant est compris entre 0,212 et 0,281 d'une part ou entre 0,719 et 0,788 de l'autre, l'équilibre ne peut être stable, ni dans l'une ni dans l'autre des deux positions que nous avons considérées. Le prisme prend alors des positions obliques intermédiaires en passant graduellement de l'une à l'autre à mesure que le poids spécifique varie. Par exemple, le prisme ayant une de ces faces horizontales au poids spécifique limite 0,212, si ce poids spécifique augmente, la face d'abord horizontale fera, avec la surface libre, un angle α variable et lié au poids spécifique par la relation $\cos^2\alpha = \frac{1}{12d - 12d^2 - 1}$ jusqu'à ce que l'un des sommets plongés dans le liquide vienne affleurer la surface, ce qui aura lieu pour $d = 0,25$. A partir de ce moment, le poids spécifique continuant à augmenter, il n'y aura plus qu'un seul sommet dans le liquide et l'angle α formé par la face supérieure avec l'horizon

sera donné par $\sin 2\alpha = \frac{16\, d}{9 - 16 d}$, jusqu'à ce qu'il atteigne 45 degrés pour $d = \frac{9}{32}$.

Les mêmes phénomènes se reproduisent en sens inverse lorsque le poids spécifique varie de 0,719 à 0,788.

L'étude de la stabilité de l'équilibre des prismes rectangulaires flottants donne lieu à des considérations analogues.

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT DES LIQUIDES

§ 1. *Mouvement des liquides en général.* — § 2. *Mouvement permanent.*
§ 3. *Mouvement uniforme.*

§ 1.

MOUVEMENT DES LIQUIDES EN GÉNÉRAL

16. Equations générales de l'hydrodynamique. — Considérons un fluide parfait en mouvement et rapportons les positions de ses divers points à trois axes de coordonnées rectangulaires, x, y, z. Le mouvement de ce fluide sera complètement déterminé si, à une époque t quelconque nous connaissons, en grandeur et en direction, la vitesse V d'un point quelconque laquelle pourra être définie par ses trois projections u, v, w, sur les trois axes. L'état du fluide en chaque point sera, d'autre part déterminé par la pression p et la densité ρ. Le problème comporte donc cinq quantités inconnues, u, v, w, p, ρ, à exprimer en fonction de quatre variables indépendantes x, y, z et t.

L'hypothèse de la fluidité parfaite est nécessaire pour ne pas compliquer outre mesure la question. C'est grâce à elle que la pression p, en un point donné, conserve une valeur unique parfaitement définie. Si, au lieu d'un fluide parfait, nous considérions un fluide naturel, nous aurions à faire intervenir les efforts tangentiels qui, sur un élément plan quelconque, sont alors, par unité de surface, proportionnels à la vitesse de glissement de

l'une des parties limitées par cet élément sur l'autre [1]. La pression n'est plus normale à l'élément plan sur lequel elle s'exerce; elle n'a plus la même valeur, au même point, sur les éléments de directions diverses.

Nous supposons donc le fluide parfait.

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait au n° 6 pour écrire les conditions d'équilibre d'un parallélépipède rectangle, nous trouverons les équations exprimant l'équilibre dynamique d'un pareil élément et ces équations ne seront autre chose que celles de l'équilibre statique, trouvées à ce n° 6 (page 5), à la condition que nous ajoutions aux forces réelles, dont nous avons désigné les composantes suivant les trois axes par X, Y, Z, la force d'inertie de l'élément, c'est-à-dire que nous ajoutions à ces trois composantes celles, changées de signe, de l'accélération suivant les trois axes. Désignons donc par u', v', w' les projections, sur les trois axes, de l'accélération de l'élément considéré, lesquelles sont les dérivées par rapport au temps des projections u, v, w de la vitesse V du même élément sur les mêmes axes, nous aurons les trois équations d'équilibre dynamique :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \rho\,(X - u'), \\ \dfrac{dp}{dy} = \rho\,(Y - v'), \\ \dfrac{dp}{dz} = \rho\,(Z - w'). \end{cases}$$

1. Si, en un point quelconque, on considère trois éléments rectangulaires parallèles aux plans coordonnés, les composantes des vitesses de glissement qui sont deux à deux égales, ont, comme on sait, les valeurs suivantes :

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx},$$

et l'effort tangentiel a pour composantes suivant les trois axes ces mêmes binômes, multipliés par un même coefficient ε qui est à peu près indépendant de la pression normale p, mais qui dépend énormément de l'agitation qui règne au point considéré, lorsque u, v, w représentent, non pas les composantes réelles des vitesses des molécules, mais les composantes de la vitesse moyenne locale dont il sera question plus bas [après les équations (3)].

Les composantes u, v, w de la vitesse V sont des fonctions des coordonnées x, y, z et du temps t ; l'accroissement différentiel de l'une d'elles, u par exemple, s'exprime par

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt\ ;$$

et sa dérivée par rapport au temps, que nous avons désignée par u', s'obtiendra en divisant cet accroissement par dt ; nous aurons ainsi :

$$u' = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt}.$$

Mais les rapports $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ne sont autre chose que les composantes u, v, w de la vitesse V ; en substituant, la valeur de u' devient :

$$u' = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}, \tag{2}$$

et cette valeur portée dans la première équation (1) donne la première des suivantes dont les deux autres s'obtiennent de la même manière :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz} - \frac{du}{dt}, \\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dt}, \\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dt}.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ce sont les équations générales de l'hydrodynamique. Elles sont applicables, d'après ce qui vient d'être dit, aux mouvements réels des molécules d'un fluide parfait. Mais M. Boussinesq a montré (*Essai sur la théorie des Eaux courantes*, 1[re] partie) qu'elles s'appliquent aussi rigoureusement si, au lieu des mouvements réels, on considère les mouvements *moyens locaux* qui permettent de négliger les changements fréquents et rapides, les irrégularités locales que subissent les vitesses des différentes molécules.

M. Boussinesq a remarqué en effet que le mouvement des liquides est caractérisé par de pareils changements dans la grandeur et la direction de la vitesse en chaque point, mais que ces changements sont assujettis à une sorte de périodicité irrégulière en vertu de laquelle si l'on prend la moyenne des valeurs que reçoit, durant un temps assez court, la composante, parallèle à une direction donnée, de la vitesse en un point fixe, cette moyenne est fonction continue des coordonnées du point considéré. Elle est en outre indépendante du temps t lorsque le mouvement est dit *permanent*, et graduellement variable avec le temps dans le cas contraire.

Alors les équations (3) s'appliquent rigoureusement lorsque u, v, w y représentent les valeurs moyennes des composantes de la vitesse ; et la résultante de ces trois moyennes u, v, w est dite la *vitesse moyenne locale* au point considéré. Il est bien évident que cette vitesse moyenne locale est indépendante du choix des axes. Désormais, ce sera toujours la vitesse moyenne locale, ou ses composantes, que nous aurons en vue.

Les équations (3) s'appliquent aussi d'une manière approximative aux fluides naturels lorsque les mouvements sont lents, ou que l'on ne considère ces mouvements que dans une étendue restreinte de l'espace et du temps.

17. Equation de continuité. — Ces trois équations ne suffisent pas pour déterminer les cinq inconnues, il faut en trouver deux autres. La première se déduira de la nature même du fluide dont on étudie le mouvement. On aura, si c'est un liquide :

$$\rho = \text{constante}, \tag{4}$$

et si c'est un fluide élastique :

$$\rho = Kp = \frac{kp}{1+\alpha\theta}, \tag{5}$$

α étant le coefficient de dilatation et θ la température.

La dernière équation, dite de *continuité*, se trouvera en exprimant que le fluide reste continu, qu'il ne s'y forme pas de vides et que, pour chaque élément, la masse reste bien égale au produit du volume par la densité. On prendra pour cela, dans le fluide en mouvement, un volume en forme de parallélépipède rectangle, $dxdydz$, ayant une position invariable et dont les faces sont traversées par le fluide qui entre et qui sort. Si l'on considère la face $dydz$ la plus rapprochée de l'origine, u étant la composante, normale à cette face, de la vitesse des molécules qui la traversent et ρ leur densité, la masse qui pénètre dans le parallélépipède à travers cette face, pendant le temps dt, est $\rho udydzdt$ et la masse qui sort par la face opposée est égale à celle-ci augmentée de sa différentielle par rapport à x, ou bien à $\left(\rho u + \frac{d\rho u}{dx} dx\right) dydzdt$. La masse comprise dans le parallélépipède s'est donc ainsi accrue de $-\frac{d.\rho u}{dx} dxdydzdt$. On peut appliquer le même calcul aux deux autres paires de faces, de sorte que l'accroissement de masse, pendant le temps dt, a en totalité pour valeur

$$-\left(\frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz}\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Le volume étant resté constant et égal à $dxdydz$, cet accroissement de masse doit être égal au produit de ce volume par l'accroissement de densité pendant le temps t, lequel est $\frac{d\rho}{dt} dt$. Écrivant cette égalité et supprimant le facteur commun il reste l'équation de continuité :

$$(6) \qquad \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

S'il s'agit d'un liquide, elle se simplifie en raison de ce que la densité ρ est constante. On a alors $\frac{d\rho}{dt} = 0$ et ρ, constant,

sort du signe de différentiation en devenant facteur commun que l'on peut supprimer; il reste ainsi

(7) $$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

pour l'équation de continuité applicable aux liquides.

Dans le cas d'un liquide, les équations (3), (4) et (7); dans le cas d'un gaz, les équations (3), (5) et (6), donnent les cinq équations cherchées entre les cinq inconnues, u, v, w, p, ρ et les variables indépendantes.

L'équation de continuité (7) peut se mettre sous une forme un peu différente lorsqu'il s'agit d'un *courant* liquide caractérisé par ce fait que les molécules liquides qui traversent une section transversale plane ont toutes des vitesses normales à cette section et égales entre elles. Soit ω l'aire de cette section transversale, U la vitesse commune de toutes les molécules qui la traversent et $q = U\omega$ le *débit* ou la *dépense* d'eau du courant, à travers cette section, par unité de temps. Le volume entré par cette section dans le temps dt est qdt, le volume sorti par la section suivante, distante de ds de la première, est $(q+\frac{dq}{ds}ds)\,dt$, de sorte que le volume compris entre ces deux sections infiniment voisines a augmenté, pendant le même temps, de $-\frac{dq}{ds}dsdt$. Cette augmentation de volume ne peut être que le résultat de l'accroissement de la section transversale ω, laquelle est devenue $(\omega+\frac{d\omega}{dt}dt)$, ce qui correspond à une augmentation de volume de $\frac{d\omega}{dt}dtds$. Égalant ces deux expressions, supprimant le facteur commun $dtds$, il vient

(8) $$\frac{d\omega}{dt}+\frac{dq}{ds}=0,$$

qui exprime sous une nouvelle forme la condition de continuité et qui s'applique à divers problèmes sur les cours d'eau.

18. Equation fondamentale de l'hydraulique. — On peut, comme nous l'avons fait au n° 6, réunir en une seule les trois équations générales (1) du n° 16 (p.28). Il suffit, pour cela, de les additionner après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz ; mais, au lieu de prendre quelconques ces trois multiplicateurs, on peut les prendre précisément égaux aux projections du déplacement réel que subit une molécule pendant le temps dt, c'est à-dire prendre $dx = udt$, $dy = vdt$, $dz = wdt$. On trouve ainsi :

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = \rho(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) - \rho(uu' + vv' + ww')dt.$$

Le premier membre n'est plus, ici, la différentielle totale dp de la pression p, car cette pression est fonction, à la fois, du temps t et des trois coordonnés x, y, z, et l'on a

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz + \frac{dp}{dt}dt\ ;$$

ce premier membre est donc égal à $dp - \frac{dp}{dt}dt$. D'autre part, on a $u'dt = du$, $v'dt = dv$, $w'dt = w$, de sorte qu'en substituant, on obtient

$$\frac{1}{\rho}\left(dp - \frac{dp}{dt}dt\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz - (udu + vdv + wdw).$$

Puisque u, v, w sont les projections de la vitesse V sur les trois axes, on a $u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{V}^2$ ce qui donne $udu + vdv + wdw = \mathrm{V}d\mathrm{V}$ et par suite :

$$(9) \qquad \frac{1}{\rho}\left(dp - \frac{dp}{dt}dt\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz - \mathrm{V}d\mathrm{V},$$

équation analogue à l'équation générale (1) de l'hydrostatique.

On peut donner, à cette équation générale (9) une autre forme quelquefois plus commode à employer. Si l'on convient que les caractéristiques d de différentiation représentent, non pas les différentielles totales des quantités p, V, fonctions des

quatre variables x, y, z, et t, mais les différentielles par rapport aux trois variables x, y, z seulement, la notation dp exprimera ce qui se trouve dans la parenthèse du premier membre, c'est-à-dire la différentielle totale de p diminuée de $\frac{dp}{dt}dt$. Inversement, la notation dV n'exprimera plus la différentielle totale de la vitesse, qui figure dans le dernier terme, mais, avec cette nouvelle notation, cette différentielle totale devra être écrite $dV + \frac{dV}{dt}dt$, puisque dV n'exprime plus que la différentielle par rapport aux trois variables x, y, z. Avec ces notations, la formule fondamentale (9) devient :

$$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + Zdz - V\left(dV + \frac{dV}{dt}dt\right),$$

ou bien, en effectuant le produit indiqué et remarquant que Vdt n'est autre chose que l'élément d'arc ds de la trajectoire d'une molécule :

$$(10) \qquad \frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + Zdz - VdV - \frac{dV}{dt}ds.$$

Mais lorsqu'on emploie cette équation, il convient de se rappeler la signification particulière des notations dp et dV qui y figurent.

L'équation qui précède, sous sa forme primitive (9) ou sous la forme (10), est l'équation fondamentale de l'hydraulique; avec l'équation de continuité (7), elle permet de résoudre tous les problèmes relatifs aux mouvements des liquides, lorsqu'on y fait abstraction des frottements.

§ 2

MOUVEMENT PERMANENT

19. Mouvement permanent. — On dit que le mouvement d'un fluide est *permanent* lorsque les molécules qui se succèdent en un point donné quelconque y sont toutes animées

de la même vitesse en grandeur et en direction, y sont soumises à la même pression et y ont la même densité. Cela veut dire que les quantités V, u, v, w, p, ρ sont indépendantes du temps et ne dépendent plus que des coordonnées des divers points.

Il suffit, pour rendre les équations applicables au mouvement permanent, d'y faire égales à zéro les dérivées par rapport à t de ces six quantités. L'équation fondamentale (9) devient ainsi :

$$\frac{dp}{\rho} - (Xdx + Ydy + Zdz) + VdV = 0. \tag{11}$$

Si on l'applique, par exemple, à un fluide élastique pesant, l'axe des z étant pris vertical et dirigé de bas en haut, on a d'abord, d'après (5), $\rho = kp$, et $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$. Elle devient :

$$\frac{dp}{kp} + gdz + VdV = 0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{k}\operatorname{Log} p + gz + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

S'il s'agit d'un liquide pesant, ρ est constant et l'on a

$$\frac{dp}{\rho} + gdz + VdV = 0. \tag{12}$$

ou bien

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

20. Théorème de Bernoulli. Plan de charge. Niveau piézométrique. — Divisons par g tous les termes de cette équation, désignons par H la constante qui se trouvera alors dans le second membre et remplaçons par Π le produit ρg, nous aurons

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = H. \tag{13}$$

Cette équation constitue le théorème de Bernoulli. Elle est susceptible, comme l'équation analogue du n° 8, d'une interprétation géométrique. Si, en chaque point d'un liquide parfait en mouvement permanent, on élève une ordonnée verticale égale à la hauteur $\frac{p}{\Pi}$ représentative de la pression qui s'y exerce, puis une autre ordonnée égale à la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ due à la vitesse de cette molécule, les extrémités supérieures de toutes ces ordonnées se trouveront dans un même plan horizontal défini par l'ordonnée H et que l'on appelle le *plan de charge*. Il serait sans doute préférable de l'appeler plan de charge *dynamique* pour le distinguer du plan de charge *statique* ou d'équilibre que nous avons considéré au n° 8 ; mais cette dénomination n'est pas en usage. La somme $\left(z + \frac{p}{\Pi}\right)$ des deux premiers termes de l'équation (13) est la hauteur, au-dessus du plan de comparaison, du niveau *piézométrique*.

Si l'on suppose placé, dans le liquide en mouvement, un tube vertical AB (fig. 15) ouvert aux deux bouts, appelé *piézomètre*, le niveau dans ce tube s'élèvera à une hauteur telle la pression due à cette colonne liquide au point A, placé à une hauteur z au-dessus du plan de comparaison, équilibre la pression p qui existe en ce même point du liquide en mouvement. L'extrémité supérieure B du liquide dans ce tube sera donc, au-dessus du plan de comparaison, à une hauteur $z + \frac{p}{\Pi}$ c'est-à-dire au niveau piézométrique. La colonne AB qui mesure effectivement la pression au point A s'appelle la *colonne piézométrique* et sa hauteur est égale à $\frac{p}{\Pi}$.

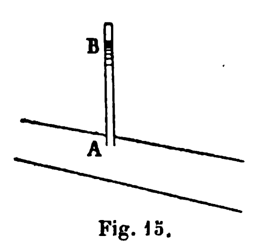


Fig. 15.

Deux tubes piézométriques, réunis à leur partie supérieure, permettent d'évaluer la différence de pression entre deux

points voisins, ils constituent le piézomètre différentiel de Bélanger.

Si l'on représente par une seule lettre h la hauteur du niveau piézométrique, qui est constante dans un liquide en équilibre, mais qui est variable dans un liquide en mouvement, l'équation (13) devient $h + \frac{V^2}{2g} = H$; et en se reportant à ce qui a été dit aux n°s 6 et 8, on reconnaîtra que si l'on considère un point matériel d'un poids égal à l'unité, soumis aux mêmes forces que le fluide et occupant successivement les positions d'une même molécule liquide avec les mêmes vitesses, l'énergie actuelle ou cinétique de ce point étant égale à $\frac{V^2}{2g}$, son énergie potentielle sera proportionnelle à la hauteur piézométrique h, telle qu'elle vient d'être définie.

Si la section du courant liquide varie comme elle ferait, par exemple, si l'écoulement avait lieu dans un conduit de dimension variable, la vitesse du liquide doit, en chaque point, se modifier de telle manière que le volume débité à travers chacune des sections transversales, dans l'unité de temps soit le même partout. La vitesse varie donc en sens inverse de l'aire de la section transversale ; elle est moindre dans la section la plus large B (fig. 16) que dans les sections plus étroites A, C. Si donc l'on place des piézomètres aux points A, B, C, le niveau piézométrique en B sera plus élevé qu'en A et en C. L'écoulement étant supposé avoir lieu dans le sens de la flèche, le liquide qui va de A vers B rencontre devant lui une pression plus grande qu'à l'arrière et il ne surmonte cette différence de pression qu'en perdant un peu de sa vitesse : une portion de son énergie actuelle se transforme en énergie potentielle. L'effet contraire se produit lorsque le liquide va de

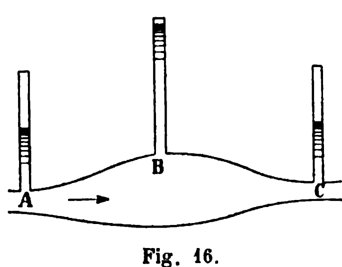


Fig. 16.

B vers C; la pression qu'il a devant lui est moindre que celle qui le pousse, sa vitesse augmente, et cette augmentation de son énergie actuelle ou cinétique est due à la diminution de la pression ou de son énergie potentielle.

La façon dont nous avons démontré l'équation fondamentale (9) du n° 18 (page 33), en prenant pour dx, dy, dz les projections du déplacement réel d'une molécule pendant le temps dt, nous montre que cette équation, et par suite celle de Bernoulli (13) que nous en avons déduite, n'est applicable qu'à un même *filet* liquide, c'est-à-dire aux points situés sur la trajectoire d'une même molécule liquide.

Ces équations sont encore applicables lorsque, au lieu des vitesses réelles des molécules, on considère leurs vitesses moyennes locales définies comme plus haut. Alors, ce que l'on appelle *filet* liquide, ce n'est plus la trajectoire réelle d'une molécule, qui présenterait des sinuosités nombreuses et des changements brusques de direction, mais c'est une courbe telle qu'en tous ses points elle soit tangente à la direction de la vitesse moyenne locale en ce point.

C'est toujours ce que nous aurons en vue lorsque nous parlerons de filet liquide; et nous assimilerons toujours le mouvement réel du liquide à son mouvement moyen en admettant, pour simplifier le langage, que les molécules suivent effectivement les filets liquides tels qu'ils viennent d'être définis.

Le théorème de Bernoulli, qui est d'une grande utilité en hydraulique, peut être démontré directement au lieu d'être déduit, comme ci-dessus, des équations générales de l'hydrodynamique. C'est, en somme, une application du théorème des forces vives, et il peut se déduire simplement de ce théorème de mécanique générale. Soit MN la trajectoire d'une molécule liquide; par le point M (fig. 17, page 39) menons-lui un plan normal dans lequel nous prendrons une aire AB ayant son centre de gravité en M.

Nous admettrons que dans l'étendue très petite (ou même

infiniment petite) de l'aire AB les vitesses soient normales à ce plan et que les trajectoires s'écartent très peu de la ligne MN de manière à former une sorte de cylindre à section transversale très petite et ayant pour axe cette ligne MN. Le liquide contenu dans ce cylindre sera ce que nous avons appelé un filet liquide.

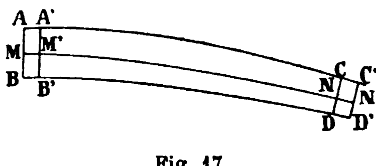


Fig. 17.

Prenons une autre section CD de ce filet au point N, et appliquons, au liquide compris entre AB et CD, le théorème des forces vives.

Soient V_0 et p_0, V et p la vitesse et la pression dans la section AB et dans la section CD, dont nous désignerons les aires respectivement par ω_0 et ω. Considérons le mouvement pendant un temps infiniment petit dt au bout duquel le volume liquide d'abord placé en ABCD sera venu en A'B'C'D'. Le mouvement étant, par hypothèse, permanent, toutes les molécules comprises entre les plans A'B' et CD auront les mêmes vitesses au commencement et à la fin de l'intervalle de temps, de sorte que l'accroissement de la force vive du système proviendra seulement de la différence entre les forces vives des portions CDC'D' et ABA'B'. Si nous appellons m la masse de chacune d'elles, l'accroissement de demi-force vive sera $\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$. De même dans le calcul du travail de la pesanteur nous n'aurons pas à tenir compte de la partie commune A'B'CD, et le travail de la pesanteur sera le même que si la masse liquide ABA'B' était venue en CDC'D'. Le fluide étant incompressible et ayant, par suite, conservé le même volume, le travail des forces intérieures est nul si nous supposons d'ailleurs la fluidité parfaite. Il en est de même du travail des forces extérieures sur le contour du filet ABCD puisque les pressions sont normales aux déplacements.

Il reste donc à évaluer le travail de la pesanteur et celui des pressions sur les faces extrêmes AB, CD. En appelant z_0 et z

les hauteurs des points M et N au-dessus d'un plan horizontal inférieur, le travail de la pesanteur sera égal au poids du volume ABA'B multiplié par $z_0 - z$. Or, ce volume a pour expression $V_0\omega_0 dt$ ou $V\omega dt$ suivant qu'on le mesure en ABA'B' ou en CDC'D'. On en déduit d'abord

$$V_0\omega_0 = V\omega.$$

La masse de ce volume étant m, son poids est mg et le travail de la pesanteur est $mg\,(z_0 - z)$. La pression totale sur AB est $p_0\omega_0$ et son travail, lorsque AB venant en A'B' se déplace de $V_0 dt$, est $p_0\omega_0 V_0 dt$; or, $V_0\omega_0 dt$ est égal au volume ABA'B' et par conséquent à $\frac{mg}{\Pi}$, le travail de la pression p_0 est ainsi $p_0\frac{mg}{\Pi}$; de même, le travail de la pression p sur CD est égal à $-\,p\omega V dt = -\,p\frac{mg}{\Pi}$. Il en résulte l'équation

$$\frac{1}{2}m\,(V^2 - V_0^2) = mg\,(z_0 - z) + (p_0 - p)\frac{mg}{\Pi}.$$

En divisant par mg et groupant les termes à même indice, nous obtenons

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{V_0^2}{2g} = \text{const.}$$

c'est-à-dire l'équation (13) ou l'équation de Bernoulli.

21. Extension de ce théorème. — Le théorème de Bernoulli n'est applicable qu'au fluide parfait, dans lequel les actions tangentielles ou frottements des molécules les unes sur les autres n'existent pas. Dans tous les fluides naturels, où ces frottements ne sont pas négligeables, il ne donne qu'une approximation qui est généralement éloignée de la vérité, mais qui, cependant, s'en rapproche assez, dans quelques cas particuliers, pour qu'on puisse l'appliquer alors aux problèmes pratiques.

En général, ces frottements des molécules liquides les unes

sur les autres produisent un travail négatif ou résistant qui devrait figurer dans le second membre de l'équation des forces vives que l'on vient d'écrire, et dont l'addition aurait pour conséquence de donner à la vitesse V au point N une valeur inférieure à celle qui résulterait de cette équation. Il s'en suit que la somme $z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g}$, au lieu d'être constante, va en diminuant progressivement à mesure qu'on s'éloigne en suivant la trajectoire. On peut écrire alors

$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} = F(s).$$

La hauteur du plan de charge n'est plus la même en tous les points, elle est exprimée par F(s). La différence de hauteur du plan de charge en deux points $F(s_0) - F(s)$ est dite la *perte de charge* entre ces deux points. On voit que la perte de charge mesure la portion d'énergie absorbée par les frottements.

Il y a certaines circonstances où cette perte de charge est très petite et peut être négligée, mais elle n'en existe pas moins et ce n'est jamais que d'une façon approximative que l'on applique le théorème de Bernoulli aux fluides naturels lorsque l'on n'en tient pas compte.

Lorsque, par exemple, les mouvements sont très lents, l'effort tangentiel de frottement, qui est proportionnel à la vitesse relative, est très faible et il en est de même du travail de cette résistance passive. C'est ce que l'on exprime en disant que dans un liquide ou dans une portion de liquide où les mouvements sont lents, la pression varie à très peu près suivant la loi hydrostatique. Il en est de même, quelles que soient les vitesses des molécules, lorsqu'elles sont toutes égales et parallèles entre elles ; la vitesse relative de deux molécules quelconques est nulle et par suite les efforts tangentiels n'existent pas, la pression est, en chaque point, normale à la section sur laquelle elle s'exerce, ce qui caractérise l'état hydrostatique.

Il peut arriver que, sur tout le pourtour d'un filet liquide dont les molécules sont animées de vitesses parallèles, la pression soit la même; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque ce filet s'écoule à travers l'atmosphère sous la forme de ce que l'on appelle une *veine* liquide. On admet alors, avec une approximation suffisante, que la pression est la même et égale à celle de l'atmosphère en tous les points d'une même section transversale normale aux vitesses.

C'est à la faveur de ces approximations que l'on peut appliquer quelquefois le théorème de Bernoulli au mouvement des liquides naturels, mais on ne peut le faire, entre deux points donnés, qu'après s'être assuré qu'entre ces deux points, il n'y a pas de cause spéciale de *perte de charge* appréciable et que l'effet des frottements intérieurs peut être négligé.

Après avoir établi les formules générales du mouvement permanent et du mouvement uniforme, nous étudierons l'écoulement sur de très petites longueurs dans lesquelles la forme de la masse liquide en mouvement varie plus ou moins rapidement, et nous recherchons si, dans ces parties, la fonction $F(s)$ exprimant la perte de charge, varie avec continuité ou bien d'une façon discontinue, et nous essaierons alors, d'après l'observation, de déterminer cette perte de charge. Ces parties dans lesquelles la masse liquide en mouvement change brusquement de forme, constituent les orifices et les déversoirs, et c'est par eux que nous commencerons l'étude de l'écoulement de l'eau, dans le chapitre III.

22. Généralités sur le mouvement permanent des courants liquides. — L'équation fondamentale (9) ou (10) établie au nº 18 (page 33), de même que les équations (3), desquelles on l'a déduite, s'applique aux mouvements quelconques d'un fluide parfait, c'est-à-dire à tous les mouvements fluides dans lesquels on peut faire abstraction des frottements. Ces équations s'appliqueront de même aux fluides naturels si l'on fait entrer, dans les composantes des forces qui y figurent, celles

des forces de frottement tant intérieur qu'extérieur du liquide sur lui-même ou sur les parois solides avec lesquelles il est en contact.

Les mouvements liquides les plus ordinaires ou tout au moins ceux dont l'étude a le plus d'applications pratiques sont ceux dans lesquels les diverses molécules ont des vitesses moyennes locales à peu près parallèles ; l'écoulement se fait alors par filets fluides. Ce genre de mouvement se produit, par exemple, dans un tuyau dont l'axe est rectiligne ou très peu courbe, dans les canaux découverts dont l'axe est à peu près rectiligne et dont la section transversale reste à peu près constante. C'est à ce genre de masse liquide en mouvement que l'on donne le nom de *courant liquide*, et il est intéressant d'en faire une étude spéciale.

Nous supposerons toujours le mouvement permanent.

22. Quantité de mouvement et force vive d'un courant liquide en fonction de la vitesse moyenne. — Soit, dans un pareil courant, ω l'aire de la section transversale, $d\omega$ son élément, u la vitesse moyenne locale correspondant à cet élément, supposée parallèle à la direction du mouvement, et U la vitesse moyenne dans toute la section, définie par l'équation

$$U = \frac{1}{\omega} \int_\omega u d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la section transversale. Appelons encore Q le débit du courant liquide ou le volume écoulé dans l'unité de temps et dQ son élément, ou bien posons

$$dQ = u d\omega$$

et

$$Q = U\omega = \int_\omega u d\omega.$$

Proposons-nous de comparer la quantité de mouvement et la force vive réelles du courant liquide à ce qu'elles seraient si

tous les filets avaient, au lieu de leurs vitesses individuelles u, la vitesse moyenne U. En appelant toujours Π le poids de l'unité de volume du liquide, la masse écoulée pendant l'unité de temps à travers l'élément $d\omega$ est $\frac{\Pi}{g}\,dQ$, la quantité de mouvement et la demi-force vive correspondant au liquide ayant passé par cet élément seront respectivement

$$\frac{\Pi}{g}\,dQ\,.\,u \qquad \text{et} \qquad \frac{\Pi}{g}\,dQ\,.\,\frac{u^2}{2}.$$

En faisant la somme des quantités analogues pour tous les éléments $d\omega$, nous aurons la quantité de mouvement et la demi-force vive réelles du courant liquide, qui seront, après avoir remplacé dQ par sa valeur $u\,d\omega$:

$$\frac{\Pi}{g}\int_\omega u^2 d\omega \qquad \text{et} \qquad \frac{\Pi}{2g}\int_\omega u^3 d\omega.$$

Si tous les filets liquides avaient la vitesse moyenne U, les quantités correspondantes seraient $\frac{\Pi}{g}\,QU$ et $\frac{\Pi}{g}\,Q\,\frac{U^2}{2}$, ou bien, en mettant pour Q sa valeur $U\omega$:

$$\frac{\Pi}{g}\,U^2\omega \qquad \text{et} \qquad \frac{\Pi}{2g}\,U^3\omega.$$

Nous avons ainsi à comparer, pour les quantités de mouvement, les quantités $\int_\omega u^2 d\omega$ et $U^2\omega$, et pour les forces vives $\int_\omega u^3 d\omega$ et $U^3\omega$.

Or, désignons par u_1 l'excès, positif ou négatif, de la vitesse individuelle u d'un filet liquide quelconque sur la vitesse moyenne U, ou posons

$$u = U + u_1$$

nous en déduirons successivement

$$u^2 = U^2 + 2Uu_1 + u_1^2$$

et

$$u^3 = U^3 + 3U^2u_1 + 3Uu_1^2 + u_1^3.$$

Multiplions par $d\omega$ chacun des termes de ces trois équations et intégrons-les dans toute l'étendue de la section transversale ω; la première, vu que $\int d\omega = \omega$, nous donne

$$\int u d\omega = U\omega + \int u_1 d\omega\,;$$

ce qui, eu égard à la définition de la vitesse moyenne U, nous conduit à

$$\int u_1 d\omega = 0.$$

Les deux autres équations, intégrées en tenant compte de ce résultat, fournissent

$$\int u^2 d\omega = U^2\omega + \int u_1^2 d\omega,$$
$$\int u^3 d\omega = U^3\omega + 3U\int u_1^2 d\omega + \int u_1^3 d\omega.$$

Par conséquent, le rapport de la quantité de mouvement réelle à la quantité de mouvement correspondant à la vitesse moyenne est

$$\frac{\int u^2 d\omega}{U^2\omega} = 1 + \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega},$$

et le rapport des forces vives

$$\frac{\int u^3 d\omega}{U^3\omega} = 1 + 3.\,\frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega} + \frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3\omega}.$$

Quel que soit le signe de u_1, le carré u_1^2 est toujours positif et l'intégrale $\int u_1^2 d\omega$ est toujours différente de zéro et positive. Il en résulte que la quantité de mouvement réelle *dépasse toujours* la quantité de mouvement correspondant à la vitesse moyenne, et si l'on pose

$$\eta = \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega},$$

le nombre désigné par η étant toujours positif, le rapport de ces deux quantités de mouvement sera $1+\eta$.

En ce qui est du rapport des forces vives, nous pouvons remarquer que le dernier terme $\frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3\omega}$ est toujours petit par rapport au précédent $\frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega}$, car, d'abord, u_1 est généralement une petite fraction de U, et la première de ces deux expressions est de l'ordre de $\left(\frac{u_1}{U}\right)^3$, tandis que la seconde n'est que de l'ordre de $\left(\frac{u_1}{U}\right)^2$; mais, de plus, les valeurs de u_1 sont tantôt positives et tantôt négatives, puisque $\int u_1 d\omega = 0$, l'intégrale $\int u_1^3 d\omega$ comprend donc des termes positifs et des termes négatifs, tandis que les éléments de $\int u_1^2 d\omega$ sont tous de même signe. Pour ces deux motifs le terme $\frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3\omega}$ est négligeable devant les autres et le rapport des forces vives se réduit approximativement à

$$\frac{\int u^3 d\omega}{U^3\omega} = 1 + 3\eta.$$

Nous le désignerons par une seule lettre $\alpha = 1 + 3\eta$ et nous voyons déjà que le rapport des forces vives, toujours plus grand que l'unité, comme celui des quantités de mouvement, diffère de l'unité d'une quantité égale au triple de celle dont cet autre rapport la dépasse.

Ainsi, et c'est là un fait remarquable sur lequel on ne saurait trop attirer l'attention, par le seul fait de l'inégalité des vitesses dans un courant liquide, la quantité de mouvement et la force vive de ce courant sont *toujours plus grandes* que ce qu'elles seraient si tous les filets liquides avaient la vitesse moyenne.

Quant aux valeurs des coefficients η et $\alpha = 1 + 3\eta$, on con-

çoit qu'elles varient dans certaines limites : elles dépendent, en effet, du degré d'inégalité des vitesses du courant. M. Bazin a trouvé[1] par exemple $\alpha = 1,038$ pour un courant s'effectuant dans un canal en planches très unies, et $\alpha = 1,122$ dans un canal en planches recouvertes de liteaux espacés de $0^m.05$ et destinés à constituer une paroi très rugueuse. Ces valeurs correspondent à $\eta = 0,013$ et $\eta = 0,041$. On admet ordinairement, en moyenne, pour les conditions ordinaires, la valeur $\eta = 0,037$ ou $\alpha = 1,111 = \frac{10}{9}$, mais ce n'est évidemment qu'une approximation destinée à suppléer à l'ignorance où l'on est, le plus ordinairement, de la véritable valeur de ce rapport.

Dans bien des cas, aussi, on ne tient aucun compte des différences qui viennent d'être évaluées et l'on suppose $\eta = 0$ ou $\alpha = 1$.

24. Equation générale du mouvement permanent. — Proposons-nous, maintenant, d'étudier le mouvement permanent d'un courant liquide défini comme au n° 22, c'est-à-dire présentant une section transversale constante ou très lentement variable, et un axe rectiligne ou très peu courbe de manière que toutes les vitesses individuelles des divers filets liquides puissent être regardées comme parallèles.

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires x, y, z; plaçons l'origine en un point quelconque de la section transversale et dirigeons l'axe des x parallèlement à la direction commune de toutes les vitesses des molécules liquides, ou perpendiculairement au plan de la section transversale ; menons, dans cette section, l'axe des y horizontal et l'axe des z perpendiculaire aux deux autres. Désignons, comme plus haut, par u, v, w les composantes, suivant les trois axes, de la vitesse d'une molécule quelconque ; d'après ce que nous venons de

1. Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts.

supposer, les composantes v et w seront nulles ou négligeables; il en sera de même des dérivées, par rapport à la coordonnée x, de ces mêmes composantes. Toutes les dérivées par rapport au temps t sont nulles puisque le mouvement est permanent. Il en résulte que v' et w' sont également nulles ou négligeables et que les équations (1) du n° 16, page 28, deviennent

$$(14) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = (X - u') \quad , \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y \quad , \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z.$$

X, Y, Z représentent les projections, sur les trois axes, des forces extérieures agissant sur la molécule liquide. Ces forces sont la pesanteur et le frottement. Or, les trajectoires étant supposées sensiblement parallèles à l'axe des x, l'effort de frottement, dû à la vitesse relative ou à la différence des vitesses de deux molécules voisines, sera lui-même dirigé en sens inverse de cette vitesse relative, c'est-à-dire à très peu près parallèlement à l'axe des x. Ses projections, sur les axes des y et des z, seront donc nulles, ou négligeables par rapport à sa projection sur l'axe des x que nous appellerons — F. Si nous désignons par I, l'inclinaison de l'axe des x sous l'horizon, les composantes de la pesanteur suivant les trois axes seront $g \sin I$, 0, $g \cos I$, et les équations (14) deviendront :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = g \sin I - F - u' \ , \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = g \cos I.$$

Multiplions les deux dernières respectivement par ρdy et ρdz, ajoutons-les et intégrons dans l'étendue d'une même section transversale, depuis le point où cette section est percée par l'axe des x, où l'on a $y=0$, $z=0$, et où il existe une pression que nous appellerons p_0, jusqu'à un point quelconque où la pression est p ; nous aurons :

$$(15) \qquad p = p_0 + \rho g z \cos I.$$

Cette formule montre que la pression varie, dans une même section normale aux trajectoires, suivant la loi hydrostatique;

et que, par suite, s'il y a une surface libre, son profil en travers est horizontal.

Elle donne aussi $\frac{dp}{dx} = \frac{dp_0}{dx}$, et, en portant cette valeur dans la première des trois équations précédentes, nous obtenons :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx} = g \sin \mathrm{I} - \mathrm{F} - u'.$$

Appelons $d\omega$ un élément superficiel quelconque, multiplions tous les termes de cette équation par $d\omega$ et faisons la somme de toutes les équations semblables écrites pour les divers élément $d\omega$ de la section totale ω ; nous aurons, en remarquant que $\frac{dp_0}{dx}$ et sin I sont des facteurs constants :

$$\omega\left(g \sin \mathrm{I} - \frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}\right) = \int_\omega \mathrm{F}d\omega + \int_\omega u'd\omega.$$

F étant l'effort de frottement pour l'unité de masse, $\mathrm{F}d\omega$ est l'effort sur le filet de section $d\omega$ et sur une longueur égale à l'unité. Les efforts sur les divers filets étant réciproques et s'exerçant d'un filet sur l'autre, la somme de leurs projections sur l'axe des x est nulle à l'exception de celles des frottements qui proviennent de la paroi, dont chacun, s'exerçant sur un élément $d\chi$ du périmètre mouillé, est proportionnel au carré de la vitesse u_0 de la molécule en ce point et peut être représenté par $g\mathrm{B}u_0^2d\chi$[1], en appelant B un coefficient numérique à déterminer. On a ainsi :

$$\int_\omega \mathrm{F}d\omega = \int_\chi g\mathrm{B}u_0^2d\chi.$$

Ce coefficient B lui-même n'est probablement pas constant. Mais, au lieu de prendre la vitesse à la paroi u_0, on peut la

1. La proportionnalité de l'effort de frottement au carré, u_0^2, de la vitesse des molécules liquides qui passent contre la paroi peut se justifier en remarquant que cet effort doit être proportionnel au nombre de ces molécules qui viennent heurter la paroi dans un temps donné, et à la vitesse u_0 avec laquelle elles la rencontrent. Le nombre des molécules étant lui-même proportionnel à u_0, l'effort se trouve être proportionnel à u_0^2.



remplacer par une certaine fonction de la vitesse moyenne U, ou, plus généralement, si l'on suppose calculée dans chaque section transversale l'intégrale $\int_\chi Bu_0^2 d\chi$ et qu'on en divise la valeur par le périmètre mouillé χ, on pourra considérer le quotient comme étant une fonction φ (U) de la vitesse moyenne U, et écrire par conséquent :

$$\int_\omega F d\omega = g\chi \cdot \varphi(U).$$[1]

Reste à calculer l'intégrale $\int_\omega u' d\omega$. On a $u' = \frac{du}{dt}$ et $u = \frac{dx}{dt}$, d'où, en éliminant dt : $u' = u\frac{du}{dx}$ et $u'd\omega = \frac{udud\omega}{dx} = \frac{(ud\omega)du}{dx}$. Mais, le débit $ud\omega$ d'un filet fluide étant constant tout le long de ce filet, ce débit peut entrer sous le signe de différentiation par rapport à x et l'on a

$$u'd\omega = \frac{d(u^2 d\omega)}{dx},$$

et par suite

$$\int_\omega u' d\omega = \frac{d}{dx}\int_\omega u^2 d\omega.$$

La vitesse moyenne U étant définie par $U = \frac{1}{\omega}\int_\omega u d\omega$,

posons, comme plus haut,

$$(16) \qquad 1 + \eta = \int_\omega \frac{u^2 d\omega}{U^2\omega} \quad \text{ou} \quad \int_\omega u^2 d\omega = (1 + \eta)\, U^2\omega\ ;$$

1. On voit combien est peu rigoureux le raisonnement qui conduit à la forme du second membre de cette équation. Il n'est pas du tout démontré que la vitesse moyenne U doive y figurer à l'exclusion de la vitesse à la paroi u_0; ce n'est qu'une présomption ou une approximation. C'est sous cette réserve, qu'il ne faut pas perdre de vue, que l'expression du frottement prend la forme usuelle $g\chi \cdot \varphi(U)$.

nous aurons, en substituant :

$$\int_\omega u' d\omega = \frac{d}{dx}\left[(1+\eta)\, U^2\, \omega\right];$$

et, en considérant que le produit $U\omega$, qui est le débit Q du courant liquide, est constant ou indépendant de x et peut sortir du signe de différentiation, nous écrirons

$$\int_\omega u' d\omega = U\omega \frac{d}{dx}\left[(1+\eta)\, U\right].$$

Si nous supposons, approximativement, que le coefficient η est aussi indépendant de x, si nous désignons alors par une seule lettre α' le coefficient $(1+\eta)$ ainsi supposé constant, et si nous remarquons que le produit $\frac{UdU}{dx}$ équivaut à $\frac{1}{2}\frac{d(U^2)}{dx}$ nous aurons en définitive :

$$\int_\omega u' d\omega = \frac{1}{2}\alpha'\omega\frac{d(U^2)}{dx};$$

et par suite l'équation générale précédente devient, en divisant tous ses termes par $g\omega$, et remplaçant dx par ds, élément de la trajectoire :

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \frac{\chi}{\omega}\,.\,\varphi(U) + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right). \tag{17}$$

Nous pourrons regarder cette équation (17) comme fondamentale dans l'étude du mouvement permanent des courants liquides tels que nous les avons décrits. Il doit rester entendu, comme il vient d'être dit en note, que $\varphi(U)$ est une forme approximative qui gagnerait peut être en exactitude si l'on y remplaçait la vitesse moyenne par la vitesse à la paroi. [1]

1. Nous renverrons à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* de M. Boussinesq, pages 67 à 112, et à un mémoire posthume de Saint-Venant : *Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes*, publié dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1887, 1er semestre, p. 148, pour l'établissement plus rigoureux de cette formule fondamentale.

25. Cas d'une section transversale circulaire ou demi-circulaire. — Dans le cas d'une section circulaire, si D est le diamètre du cercle, la section $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$ et $\chi = \pi D$; le rapport $\frac{\chi}{\omega}$ qui figure dans le premier terme du second membre est $= \frac{4}{D}$. Il en est de même dans le cas d'une section demi-circulaire où l'aire $\omega = \frac{1}{8}\pi D^2$ et le périmètre mouillé $\chi = \frac{1}{2}\pi D$. L'inverse de ce rapport, soit $\frac{\omega}{\chi}$, lequel vaut, dans ces deux cas, $\frac{D}{4}$, porte le nom de *rayon moyen* de la section transversale et cette dénomination s'applique à toutes les formes de section quelles qu'elles soient. La formule précédente devient alors, en y mettant Π au lieu de ρg :

$$\sin I - \frac{1}{\Pi}\frac{dp_0}{ds} = \frac{4}{D}\varphi(U) + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right), \tag{18}$$

pour les sections circulaires ou demi circulaires de diamètre D.

26. Cas d'une section rectangulaire très large. — Si le courant liquide a pour section transversale un rectangle très large dont le fond soit horizontal ou parallèle à la surface libre, ce qui se présente quelquefois dans certaines parties des *cours d'eau* naturels, la largeur de la section étant représentée par l et la profondeur par h, l'aire ω de la section est lh et le périmètre mouillé $\chi = l + 2h$. Le rayon moyen $\frac{\omega}{\chi}$ vaut alors $\frac{lh}{l+2h}$ et si, comme nous l'admettons, h est petit par rapport à l, on peut, au dénominateur, négliger

On y verra notamment comment la substitution faite plus loin, à la fonction $\varphi(U)$, de celle bU^2 qui correspond au régime uniforme, équivaut à négliger un terme en $\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$, de sorte qu'en définitive, ce qu'il y a d'inexact dans cette simplification peut être corrigé par une augmentation convenable du coefficient appelé α'.

$2h$ devant l, de sorte que le rayon moyen est approximativement égal à la profondeur h. D'un autre côté, on peut placer l'axe des x ou des s à la surface libre, de manière à rendre constante et égale à la pression atmosphérique la pression p_0, ce qui annule $\frac{dp_0}{ds}$; enfin, dans les cours d'eau, l'inclinaison I des trajectoires sous l'horizon est toujours très faible et l'on peut sans erreur sensible remplacer le sinus de I par cet angle lui-même. L'équation générale (17) se réduira ainsi, pour le cas d'une section rectangulaire très large, avec une surface libre, à la suivante applicable approximativement aux cours d'eau naturels, de forme régulière et de profondeur h :

$$\text{(19)} \qquad I = \frac{\varphi(U)}{h} + \alpha' \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

dans laquelle I désigne la pente superficielle.

Lorsque la largeur de la section n'est pas très grande par rapport à la profondeur, le rayon moyen ne peut plus être considéré comme égal à h et l'équation doit être écrite :

$$\text{(20)} \qquad I = \frac{(l+2h)}{lh}\varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

§ 3.

MOUVEMENT UNIFORME

27. Mouvement ou régime uniforme. — Lorsque le régime est uniforme, c'est-à-dire lorsque la section transversale restant la même ou étant indépendante de s, la vitesse des molécules liquides, tout le long d'un même filet, est constante, les formules précédentes (17), (18), (19) et 20 se simplifient par la disparition du dernier terme de chacune d'elles,

lequel dépend de la variation de la vitesse. L'équation générale (17) devient ainsi pour le mouvement uniforme :

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \frac{\omega}{\chi}\varphi(U).$$

Lorsque, de plus, la section transversale affecte l'une des deux formes que nous venons d'examiner, de telle sorte que la position d'un point, dans chacune d'elles, est définie par une seule coordonnée, savoir z pour la section rectangulaire très large et r pour la section circulaire ou demi-circulaire, on peut étudier d'une manière plus complète ce qui se passe dans chaque section et déterminer, par exemple, la loi suivant laquelle varient les vitesses en fonction de z ou de r. La vitesse u_0, à la paroi, est alors la même en tous les points et l'effort de frottement par unité de surface de la paroi solide sur laquelle le liquide se meut et par unité de volume du liquide est exprimé par $\rho g B u_0^2$. Mais, comme le coefficient B peut avoir des valeurs différentes suivant la forme de la section, nous appellerons

$$\rho g B u_0^2$$

l'effort de frottement par unité de surface de la paroi mouillée de la section rectangulaire très large, de profondeur h, et

$$\rho g B' u_0^2$$

ce même effort dans la section circulaire de rayon R.

28. Frottement intérieur des liquides. — Quant au frottement du liquide sur lui-même, nous avons dit plus haut (n° 16, en note) qu'il était proportionnel à la vitesse relative des filets fluides. Si les parois du canal sont très lisses et si les mouvements intérieurs du fluide se réduisent à un simple glissement relatif et continu des couches les unes sur les autres, les vitesses réelles des molécules seront toujours parallèles à la direction générale de l'écoulement. Mais un pareil

canal est irréalisable : toute paroi présente des aspérités plus ou moins apparentes, les filets fluides viennent s'y heurter et de ces chocs naissent des mouvements tourbillonnaires dont l'amplitude croît promptement avec la saillie des aspérités ; ces mouvements se propagent dans toute la masse et par leur passage à intervalles plus ou moins réguliers en un point donné de la section, donnent naissance à des vitesses constamment variables en grandeur et en direction.

« L'écoulement dans le canal le plus régulier est un phéno-« mène extrêmement complexe, dans lequel le simple glisse-« ment des couches liquides ne joue qu'un rôle secondaire ; la « masse du courant est traversée sans cesse par des mouve-« ments giratoires partis de la paroi, qui en mélangent toutes « les couches et viennent même s'épanouir à la surface en don-« nant naissance à des ondulations. Au premier abord, tout « paraît confus et irrégulier, mais ce désordre n'est qu'appa-« rent, et si l'on fait, même pour un temps assez court, les « moyennes de toutes les vitesses qui se succèdent en chaque « point de la section, des lois précises se manifestent bientôt ; « ces moyennes prennent une valeur parfaitement déterminée « autour de laquelle les vitesses instantanées oscillent avec « une sorte de périodicité[1]. »

Ce sont ces vitesses moyennes locales qui figurent dans les équations et dont les dérivées $\frac{du}{dz}$, par rapport à la profondeur dans le cas d'une section rectangulaire, ou $\frac{du}{dr}$ par rapport au rayon dans le cas d'une section circulaire, peuvent représenter les vitesses relatives des filets consécutifs. Mais, d'après ce qui vient d'être dit, les vitesses relatives réelles en sont bien différentes ; le coefficient par lequel on devra multiplier ces dérivées pour exprimer le frottement intérieur sera donc beaucoup plus grand que s'il ne s'agissait que de représenter le frotte-

1. Bazin, *Note sur la mesure des vitesses à l'aide du tube jaugeur. Annales des Ponts et chaussées*, 1887, 1er semestre, p. 227.

ment de deux couches régulières ; il devra, en outre, tenir compte de toutes les pertes de force vive dues aux mouvements tourbillonnaires, de toutes les forces vives correspondant aux composantes transversales ou verticales des molécules. On peut englober toutes ces résistances dans un même coefficient ε de frottement intérieur, mais il faudra alors, comme l'a remarqué M. Boussinesq [1], que ce coefficient ne reste pas constant. Il devra dépendre de l'agitation moyenne en chaque point, laquelle enlève, au mouvement translatoire, une force vive d'autant plus considérable qu'elle a plus d'intensité ; et l'intensité de cette agitation dépend de la vitesse à la paroi u_0 et de la grandeur relative de la section transversale par rapport à son périmètre mouillé, grandeur mesurée par le rayon moyen h ou $\frac{R}{2}$. Car, par exemple, pour une section rectangulaire, plus la profondeur est grande, plus les mouvements tumultueux et tourbillonnaires peuvent prendre de développement et donner lieu à des vitesses transversales plus grandes. De plus, dans le cas de la section circulaire de rayon R, l'agitation, partant de la paroi et se propageant vers le centre, doit être, en chaque point situé à une distance r du centre, d'autant plus prononcée que ce point en est plus rapproché, puisque la même énergie due à une cause d'agitation donnée se répartit sur des couches de masses décroissantes avec leur rayon. Pour ces motifs, le coefficient ε pourra vraisemblablement s'exprimer par

$$\varepsilon = \rho g A h u_0, \text{ dans le cas de la section rectangulaire ;}$$

$$\text{et } \varepsilon = \rho g A' \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r}, \text{ dans le cas de la section circulaire.}$$

29. Expérience de M. Couette. — Ces expressions du coefficient du frottement intérieur des liquides, sont applicables seulement lorsque la vitesse moyenne acquiert une certaine valeur, d'autant plus grande que les dimensions transversales

1. *Essai sur la théorie des eaux courantes*, § III.

du courant sont plus petites. Au-dessous de cette limite, ε a une valeur constante, beaucoup plus faible. Ce fait a été mis en évidence par une expérience remarquable de M. Couette, rapportée dans sa thèse de doctorat du 30 mai 1890. Un réservoir plein d'eau est percé d'un orifice fermé par un bouchon, dans lequel on a mis un tube de verre de 2 millim. 6 de diamètre et de 278 millim. de longueur. Quand le réservoir est plein jusqu'au haut, la veine qui jaillit du tube est trouble ; son amplitude décroît d'une manière lente et continue en même temps que la charge Quand la charge devient inférieure à 0 m. 75 environ, la veine éprouve des soubresauts de plus en plus marqués qui se produisent à des intervalles de temps irréguliers et pendant lesquels elle devient lisse et se relève au-dessus de sa position habituelle. Quand la charge est d'environ 50 centimètres, la veine oscille continuellement entre deux positions qui se partagent le temps à peu près également ; elle est lisse pour la plus grande amplitude, trouble pour la petite. Lorsque la charge devient inférieure à 35 centimètres environ, les soubresauts cessent et la veine est parfaitement lisse et calme. Les mêmes phénomènes se reproduisent en sens inverse quant on remplit progressivement le réservoir au lieu de le laisser se vider. De cette expérience caractéristique et d'un grand nombre d'autres décrites dans sa thèse, M. Couette conclut que le mouvement des liquides présente deux régimes différents : dans le second, le frottement est fonction de la vitesse moyenne et s'exprime assez bien par une fonction linéaire de cette vitesse ; le premier régime, où le frottement est beaucoup moindre, se produit seul pour les vitesses les plus faibles, le coefficient ε de frottement intérieur est alors constant. Pour les vitesses intermédiaires, les deux régimes se présentent alternativement. La vitesse moyenne minima pour laquelle le second régime commence à se manifester dans les tubes est en raison inverse de leurs diamètres.

Ces lois semblent une confirmation évidente de l'influence prépondérante que prend l'intensité de l'agitation tourbillon-

naire sur la valeur du coefficient de frottement intérieur des liquides. Tant que la vitesse est faible et que le liquide s'écoule dans un espace restreint, cette agitation ne peut se produire, le frottement intérieur n'a qu'une faible valeur. Dès que la vitesse dépasse une certaine limite ou bien que le liquide s'écoule dans un espace plus large, l'agitation commence, les filets liquides, au lieu de couler parallèlement, se croisent, s'entrechoquent, et la perte de force vive ou le frottement intérieur prend une plus grande importance.

Si l'on admet comme s'appliquant aux grands diamètres la dernière des lois qui viennent d'être citées, on remarquera que, dans l'expérience de M. Couette, le second régime commençait à se manifester dès que la charge atteignait 0 m. 35 environ ou bien que la vitesse moyenne de sortie était de de 2 m. 16 environ, dans un tube de 0 m. 0026 de diamètre. Ce serait donc à partir de la vitesse de 0 m. 216 que le second régime se manifesterait dans un tube de 0 m. 026 de diamètre et, dans un tuyau de 0 m. 26 de diamètre, on ne pourrait constater le premier régime que pour des vitesses inférieures à 0 m. 02 par seconde. C'est ce qui explique pourquoi ces faits sont restés si longtemps inaperçus.

30. Autres observations. — Un fait remarquable, observé par M. de Caligny (*Hydraulique*, 1re partie, page 94), semble se rattacher à la même cause, bien qu'il n'en soit qu'une manifestation beaucoup moins apparente. Un tube vertical, ouvert aux deux bouts, est plongé verticalement dans un réservoir à niveau constant où l'eau est immobile ; on ferme, avec la main par exemple, l'extrémité supérieure du tube et on l'enfonce d'une certaine quantité dans le liquide, puis on ouvre brusquement l'extrémité fermée. Le niveau, à l'intérieur, d'abord abaissé par la pression de l'air emprisonné, s'élève au-dessus de celui du réservoir. M. de Caligny a observé, et c'est là ce qui est digne de remarque, que dans certaines limites la colonne d'eau partant du repos, à un certain niveau

au-dessous de celui du réservoir, monte cependant plus haut au-dessus de ce niveau que lorsqu'on la fait partir de plus loin et qu'elle passe, au point où elle était en repos dans le premier cas, animée déjà d'une vitesse notable qu'elle a acquise en partant de plus bas. Il y a certainement, dans les deux cas, une différence notable dans l'action du frottement du liquide sur les parois du tube [1].

Il semble aussi que certaines anomalies apparentes des expériences de Darcy sur les tuyaux de petit diamètre ne peuvent s'expliquer que par la cause mise en évidence par M. Couette, et en admettant le passage d'un régime à l'autre.

M. Couette a observé d'ailleurs que les oscillations de la veine liquide, dans son expérience, étaient d'autant plus amples que le tube était plus long. Cela est facile à comprendre quand on remarque que le régime, et par suite la loi de la perte de charge par unité de longueur, sont modifiés dans le tube tout entier.

Les expressions précédentes du coefficient de frottement intérieur, données par M. Boussinesq, se trouvent ainsi justifiées pour toutes les vitesses réellement pratiques lorsqu'il s'agit des tubes ou de canaux qui ne sont pas très petits transversalement.

31. Formules pour la section rectangulaire très large et pour la section circulaire et demi-circulaire. — Si, alors, nous considérons, dans la section rectangulaire, une tranche de hauteur z mesurée depuis la surface libre, de longueur et de largeur égales à l'unité, dont la composante du poids, suivant la direction du mouvement, sera $\rho g z I$, cette composante devant, puisque le mouvement est uniforme, être équilibrée par le frottement sur l'unité de surface

1. « On voit, dit M. de Caligny, après avoir cité ce fait et d'autres analo-
« gues, avec quelle extrême réserve il faut accueillir les recherches purement
« théoriques qui peuvent être présentées sur des phénomènes aussi peu con-
« nus que ceux du frottement des liquides. »

qui est égal à $-\varepsilon \frac{du}{dz} = -\rho g A u_0 h \frac{du}{dz}$, nous aurons l'égalité :

(21) $$zI = -Ahu_0 \frac{du}{dz}.$$

Multiplions par dz les deux membres, et intégrons depuis $z = h$, où $u = u_0$, jusqu'à une valeur z quelconque, nous trouvons :

$$I\left(\frac{h^2-z^2}{2}\right) = Ahu_0(u - u_0).$$

L'équilibre de la tranche totale, d'épaisseur h, dont la composante du poids est $\rho g h I$, et qui est soumise au frottement à la paroi $\rho g B u_0^2$, s'exprimera de même par l'équation :

$$hI = Bu_0^2, \qquad \text{ou} \qquad I = \frac{Bu_0^2}{h};$$

substituant dans la précédente, elle devient :

$$\frac{Bu_0^2}{2h}(h^2 - z^2) = Ahu_0(u - u_0).$$

On en déduit :

(22) $$u = u_0\left[1 + \frac{B}{2A}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\right].$$

Dans une section rectangulaire très large, les vitesses, aux divers points d'une même verticale, varient donc comme les ordonnées d'une parabole du second degré.

Opérons de même pour la section circulaire, nous aurons pour exprimer l'équilibre d'un cylindre liquide de rayon r et de longueur égale à l'unité, en appelant p et p' les pressions moyennes sur les deux bases de ce cylindre :

$$(p' - p)\pi r^2 + \rho g \pi r^2 \sin I = -\rho g A' \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r} \frac{du}{dr} . 2\pi r.$$

Désignons, pour abréger, par J la quantité $\frac{p'-p}{\rho g} + \sin I$, qui est la hauteur dont s'est abaissé le niveau piézométrique entre deux sections distantes de l'unité de longueur, le premier

membre de cette équation s'écrira simplement $\rho g \pi r^2 J$ et elle deviendra, après réduction :

(23) $$rJ = -2A' \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r} \frac{du}{dr}.$$

Intégrons de $r = R$ à r quelconque, nous aurons :

$$J \left(\frac{R^3 - r^3}{3} \right) = A'R^2 u_0 (u - u_0).$$

D'autre part l'équilibre de l'ensemble du liquide s'exprime par l'équation :

$$(p' - p) \pi R^2 + \sin I \rho g \pi R^2 = \rho g B' u_0^2 . 2\pi R; \quad \text{ou} \quad J = \frac{2B'u_0^2}{R}$$

ce qui, en éliminant J, donne :

$$\frac{2B'u_0^2}{R} \left(\frac{R^3 - r^3}{3} \right) = A'R^2 u_0 (u - u_0);$$

ou bien :

(24) $$u = u_0 \left[1 + \frac{2B'}{3A'} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \right].$$

Dans une section circulaire ou demi-circulaire, les vitesses, aux divers points d'un même rayon, varient comme les ordonnées d'une parabole du 3ᵉ degré.

Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement par M. Bazin et par divers observateurs, ainsi que nous le verrons plus loin.

Connaissant la vitesse u de chaque filet, nous pouvons calculer la vitesse moyenne U de la section transversale ; nous avons, en effet, dans le cas de la section rectangulaire :

$$Uh = \int_0^h u dz,$$

et dans le cas de la section circulaire.

$$\pi R^2 U = \int_0^R u . 2\pi r dr.$$

Substituons pour u respectivement les valeurs (23) et (24),

effectuons les intégrations indiquées, nous aurons exprimé U en fonction de u_0, et si nous mettons, à la place de u_0, ses valeurs en I et en J tirées des équations précédentes, il viendra simplement, en remplaçant aussi R par $\frac{D}{2}$:

$$(25)\left\{\begin{array}{l} U = \frac{1}{\sqrt{B'}}\left[1 + \frac{B}{3A}\right]\sqrt{hI}, \text{ pour la section rectangulaire,} \\ U = \frac{1}{\sqrt{B}}\left[1 + \frac{2B'}{5A'}\right]\sqrt{\frac{D}{4}J}, \text{ pour la section circulaire.} \end{array}\right.$$

En élevant au carré, et désignant par b et b_1 deux coefficients numériques qui dépendront de A, B, ou de A′ et B′ et qui pourront être, comme ces quantités elles-mêmes, légèrement variables avec les dimensions de la section transversale, mais qui seront surtout fonction du plus ou moins de rugosité de la paroi, on trouvera les formules classiques :

$$(26)\left\{\begin{array}{l} hI = bU^2, \text{ pour les sections rectangulaires,} \\ \frac{1}{4}DJ = b_1U^2, \text{ pour les sections circulaires.} \end{array}\right.$$

On remarquera d'ailleurs, par la comparaison des deux équations (25) que la valeur de b_1 pour les sections circulaires doit être, toutes choses égales d'ailleurs, un peu plus petite que celle de b pour les sections rectangulaires si, comme il paraît naturel de l'admettre, le rapport $\frac{A}{B}$ est égal au rapport $\frac{A'}{B'}$ et si B est voisin de B′.

Nous reprendrons ces formules générales lors de l'étude spéciale du mouvement uniforme dans les tuyaux et dans les canaux découverts, qui fera l'objet des chapitres IV et V.

CHAPITRE III

CIRCONSTANCES ACCIDENTELLES DU MOUVEMENT

§ 1

ORIFICES

32. Ecoulement par un orifice en mince paroi. — Théorème de Torricelli. — Considérons (fig. 18) un vase rempli d'un liquide pesant et homogène jusqu'à un certain niveau constant AB; supposons que dans la paroi BC de ce vase on pratique une ouverture DE par laquelle le liquide s'écoulera sans toucher les parois de l'orifice autrement que par une arête, ce qui se produit lorsque, cet orifice ayant la forme cylindrique, l'épaisseur de la paroi est inférieure à la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture, comme dans la figure 19, ou mieux encore lorsque, comme dans la figure 20, l'orifice est taillé suivant une forme légèrement conique. L'orifice est dit alors en *mince paroi.* A la sortie, les filets sont d'abord convergents, mais à une certaine distance ON égale à peu près à la moitié du diamètre de l'orifice, s'il est circulaire, il deviennent sensiblement parallèles en traversant une section IK ayant une aire no-

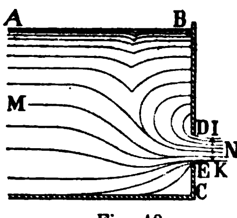


Fig. 18

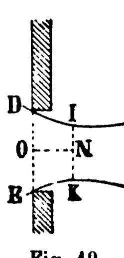


Fig. 19.

tablement plus petite que celle de sortie DE, et la veine fluide

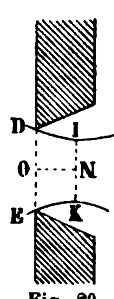


Fig. 20.

a subi une *contraction* entre DE et IK. Si l'on suppose que le vase soit assez grand pour que le mouvement des molécules liquides y soit insensible, le théorème de Bernoulli pourra être appliqué au trajet de l'une de ces molécules, depuis son point de départ M où sa vitesse était nulle, jusqu'au moment où elle traverse la section IK dans laquelle on peut admettre que toutes les vitesses sont égales. Désignons par U cette vitesse commune, par p_0 la pression sur la surface libre AB, par p_1 la pression du milieu dans lequel débouche la veine fluide, ou, d'après ce que l'on vient de dire, la pression en tous les points de la section IK. Le plan de charge, pour le point M, est à une hauteur $\frac{p_0}{\Pi}$ au-dessus de AB. Pour la section IK, il est à une hauteur $\frac{p_1}{\Pi}+\frac{U^2}{2g}$ au-dessus de cette section. Appelons h la profondeur verticale de cette section, ou de son centre de gravité, au-dessous de la surface libre AB, nous aurons, en exprimant que ces deux plans de charge sont à la même hauteur :

$$\frac{p_0}{\Pi}+h=\frac{p_1}{\Pi}+\frac{U^2}{2g};$$

d'où

$$(1)\qquad U^2=2g\left(h+\frac{p_0-p_1}{\Pi}\right).$$

Si la veine liquide débouche dans l'atmosphère et si la surface libre est elle même soumise à la pression atmosphérique, $p_1=p_0$, et l'on a simplement

$$(2)\qquad U=\sqrt{2gh};$$

La vitesse des molécules, dans la section contractée, est égale à la vitesse qui serait due à la hauteur de la surface libre au-dessus du centre de gravité de cette section. C'est le théorème de *Torricelli*.

33. — Débit d'un orifice. — Contraction de la veine. — Puisque nous avons admis que toutes les molécules traversant la section IK avaient des vitesses égales entre elles et normales à son plan, le volume d'eau débité par unité de temps sera le produit de la vitesse commune $U = \sqrt{2gh}$ par l'aire ω de cette section, laquelle en raison de la contraction de la veine, n'est qu'une fraction $m\omega_0$ de la section ω_0 de l'orifice en mince paroi DE Nous aurons ainsi, en appelant Q le débit :

$$(3) \qquad Q = m\omega_0 \sqrt{2gh};$$

Le coefficient m est souvent appelé le coefficient de contraction de la veine liquide. Il serait plus exact et plus rationnel de l'appeler le coefficient de débit.

Sa valeur a été déterminée expérimentalement par MM. Poncelet et Lesbros qui ont trouvé qu'elle variait avec la forme de l'orifice et, dans une certaine mesure, avec la charge h. Les limites extrêmes de ces variations ont été 0,57 et 0,70 et la valeur moyenne est très voisine de 0,62 soit à peu près $\frac{5}{8}$.

Lorsque l'orifice est circulaire, ce coefficient s'approche de 0,64, tandis qu'il n'est guère que de 0,61 pour un orifice rectangulaire [1].

Les expériences de MM. Poncelet et Lesbros ont été faites sur des orifices rectangulaires, et le coefficient qu'ils ont mesuré est celui du débit, d'après la formule précédente. Cette formule suppose, comme nous l'avons dit, que les vitesses de tous les filets, à travers la section contractée IK, sont égales entre elles et que tous les points de cette section sont sensi-

1. M. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, pages 557 et 562, a trouvé pour valeur théorique approchée du coefficient m, la valeur 0,6283 pour un orifice rectangulaire allongé et 0,6366 pour un orifice circulaire. (Voir ci-dessous, n° 39, page 77.)

blement à la même profondeur h au-dessous de la surface libre. Cette approximation est suffisante lorsque la dimension verticale de l'orifice est petite par rapport à h. S'il en est autrement, on doit, en appliquant le théorème de Bernoulli aux divers filets qui traversent la section, calculer leurs vitesses individuelles.

Soit, par exemple, à déterminer le débit d'un orifice rectangulaire de largeur horizontale l ouvert dans la paroi verticale d'un vase et limité par deux côtés horizontaux à des profondeurs h_1 et h_2 au-dessous de la surface libre; dans une tranche quelconque, de hauteur dh, à une profondeur h, la vitesse de tous les points sera $\sqrt{2gh}$ et le débit correspondant $dQ = mldh\sqrt{2gh}$, en appelant m le coefficient de contraction de ce filet liquide. Le débit total Q sera la somme $\int_{h_1}^{h_2} mldh\sqrt{2gh}$. Si m a la même valeur pour tous les filets, il pourra sortir du signe d'intégration et l'on aura :

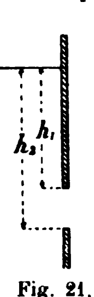


Fig. 21.

$$Q = ml\sqrt{2g}\int_{h_1}^{h_2}\sqrt{h}\,dh = \frac{2}{3}ml\sqrt{2g}\left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

En appelant comme ci-dessus ω_0 l'aire $l(h_2 - h_1)$ de l'orifice, cette valeur de Q peut se mettre sous la forme :

$$(4) \qquad Q = \frac{2}{3} m\,\omega_0 \sqrt{2g}\,\frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1},$$

ou, approximativement,

$$(5) \qquad Q = m\omega_0\sqrt{2g\,\frac{h_2 + h_1}{2}}.$$ [1]

1. Voici comment M. Collignon (*Traité d'hydraulique*), démontre que cette expression peut être substituée à la précédente. Posons : $\frac{h_2+h_1}{2} = \text{H}$, $h_2 - h_1 = \frac{1}{n}\text{H}$: ou $h_2 = \text{H}\left(1+\frac{1}{2n}\right)$, $h_1 = \text{H}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$, $\frac{1}{n}$ étant une fraction dont les puissances sont négligeables. Il en résulte, à ce degré

Or $\frac{h_2 + h_1}{2} = \mathrm{H}$ est la profondeur, au-dessous de la surface libre, du centre de gravité de l'orifice, ce qui montre que la formule générale (3) est toujours applicable, au moins d'une façon approchée.

34. Coefficients de débit pour des orifices carrés et circulaires. — Le coefficient m, mesuré d'après l'observation du débit Q ne donne donc que d'une façon approchée la valeur de la contraction de la veine. On conçoit d'ailleurs que la forme rectangulaire des orifices ne puisse conduire à une grande précision dans la détermination de cette contraction, à moins d'opérer toujours sur des sections géométriquement semblables. Or, il n'en était pas ainsi dans les expériences de Poncelet et Lesbros.

d'approximation : $h_2^{\frac{3}{2}} = \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{4n}\right)$, $h_1^{\frac{3}{2}} = \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3}{4n}\right)$; d'où : $h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} = \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2n}$ et le quotient par $h_2 - h_1$ ou par $\frac{\mathrm{H}}{n}$ est $\frac{3}{2}\,\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent : $\frac{2}{3}\frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1} = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{h_2 + h_1}{2}}$, ce qu'il fallait démontrer.

En réalité, $\sqrt{\frac{h_2 + h_1}{2}}$ est toujours plus grand que $\frac{2}{3}\frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1}$; mais, même lorsque n est petit, le rapport de ces deux quantités diffère peu de l'unité. Il est d'environ 1,0001 pour $n = 10$; de 1,001 pour $n = 3{,}5$; de 1,01 pour $n = 1$ et de 1,06 seulement lorsque $n = 0{,}5$, c'est-à-dire lorsque le niveau supérieur est au sommet de l'orifice.

Les valeurs du coefficient m calculées d'après le débit et par la formule approchée (5) ne représentent donc pas exactement la contraction de la veine liquide, ils doivent, pour cela, être multipliés par les rapports variables de 1,0 à 1,06 indiqués ci-après :

Valeurs de $n = \frac{\mathrm{H}}{h_2 - h_1}$	0,5	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0
Coefficient de correction	1,06	1,04	1,02	1,01	1,003	1,001

D'autres observateurs ont donc repris la question et ont fait des expériences sur des orifices à section carrée ou à section circulaire ; ce sont, en particulier, M. Ellis à Holyoke, Massachusetts, et M. Smith, à New Almaden, Californie. Ce dernier, après une discussion approfondie des résultats obtenus par les divers expérimentateurs et par lui-même, et dont il a représenté les variations par des courbes dont les abscisses sont les charges H et les ordonnées les coefficients observés, a donné, dans son ouvrage intitulé : *Hydraulics. The flow of water through orifices*, etc., et publié en 1886, pour les valeurs du coefficient de contraction, des tables très détaillées dont j'ai extrait les suivantes[1] :

Valeurs du coefficient de contraction **m**, *pour des orifices de forme carrée, en mince paroi verticale.*

Charge sur le centre de l'orifice	Côté du carré					
	0^m006	0^m015	0^m03	0^m06	0^m18	0^m30
0^m12	»	0.637	0.621	»	»	»
0.15	»	0.633	0.619	0.605	0.597	»
0.18	0.660	0.630	0.617	0.605	0.598	»
0.21	0.656	0.628	0.616	0.605	0.599	0.596
0.24	0.652	0.625	0.615	0.605	0.600	0.597
0.27	0.650	0.623	0.614	0.605	0.601	0.598
0.30	0.648	0.622	0.613	0.605	0.601	0.599
0.40	0.642	0.618	0.610	0.605	0.602	0.601
0.60	0.637	0.615	0.608	0.605	0.604	0.602
0.90	0.632	0.612	0.607	0.605	0.604	0.603
1.20	0.628	0.610	0.606	0.605	0.603	0.602
1.80	0.623	0.609	0.605	0.604	0.603	0.602
2.40	0.619	0.608	0.605	0.604	0.603	0.602
3.00	0.616	0.606	0.604	0.603	0.602	0.601
6.00	0.606	0.603	0.602	0.602	0.601	0.600
30.00	0.599	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598

1. Les chiffres de ces tables se rapportent à l'écoulement de l'eau à la température de 10 degrés centigrades environ. Ils subissent, avec la température, de légères variations dont la loi n'est pas bien déterminée.

Pour le mercure, ces chiffres doivent être diminués de 0,03 à 0,04 ; pour l'huile à graisser, au contraire, on doit les augmenter d'environ 0,09.

Valeurs du coefficient de contraction **m**, *pour des orifices de forme circulaire, en mince paroi verticale.*

Charge sur le centre de l'orifice	Diamètre					
	0m006	0m015	0m03	0m06	0m18	0m30
0m12	»	0.631	0.618	»	»	»
0.15	»	0.627	0.615	0.600	0.592	»
0.18	0.655	0.624	0.613	0.601	0.593	»
0.21	0.651	0.622	0.611	0.601	0.594	0.590
0.24	0.648	0.620	0.610	0.601	0.594	0.591
0.27	0.646	0.618	0.609	0.601	0.595	0.591
0.30	0.644	0.617	0.608	0.600	0.595	0.591
0.40	0.638	0.613	0.605	0.600	0.596	0.593
0.60	0.632	0.610	0.604	0.599	0.597	0.595
0.90	0.627	0.606	0.603	0.599	0.598	0.597
1.20	0.623	0.605	0.602	0.599	0.597	0.596
1.80	0.618	0.604	0.600	0.598	0.597	0.596
2.40	0.614	0.603	0.600	0.598	0.596	0.596
3.00	0.611	0.601	0.598	0.597	0.596	0.595
6.00	0.601	0.598	0.596	0.596	0.596	0.594
30.00	0.593	0.592	0.592	0.592	0.592	0.592

On voit qu'en général le coefficient m diminue à mesure que les dimensions de l'orifice augmentent, et aussi à mesure que la charge augmente. La dernière ligne de chacun des tableaux, relative à la charge de 30 mètres, a été calculée par extrapolation et n'est peut-être pas aussi exacte que les autres; toutefois, M. Graëff a constaté que le coefficient de contraction restait à peu près constant pour les grandes pressions. D'après les tableaux précédents, il serait alors de 0,592 pour les orifices de forme circulaire, de 0,598 pour ceux de forme carrée et M. Smith ajoute que, pour les orifices de forme rectangulaire dont la largeur est égale à six fois la hauteur, il aurait la valeur 0,61. Il n'a pas trouvé dans les expériences de données suffisantes pour construire une table applicable à ce genre d'orifices.

35. Coefficients de contraction pour les orifices rectangulaires. — On peut alors avec une approximation qui sera ordinairement suffisante, soit prendre les chiffres de la table de la page 67 en les augmentant de 0,012 à 0,015, soit adopter comme applicables à toutes les formes rectangulaires

ceux de la table suivante extraite des résultats donnés par MM. Poncelet et Lesbros, d'après leurs expériences dont il a été question plus haut.

Valeurs approximatives du coefficient de contraction **m**, *pour des orifices de forme rectangulaire, en mince paroi verticale*[1].

Charge sur le sommet de l'orifice	Hauteur de l'orifice					
	0m01	0m02	0m03	0m05	0m10	0m20
0m01	0.701	0.660	0.630	0.607	»	»
0.02	0.694	0.659	0.634	0.615	0.596	0.572
0.03	0.688	0.659	0.638	0.620	0.600	0.578
0.04	0.683	0.658	0.640	0.623	0.603	0.582
0.05	0.679	0.658	0.640	0.625	0.605	0.585
0.06	0.676	0.657	0.640	0.627	0.607	0.587
0.08	0.670	0.656	0.638	0.629	0.610	0.589
0.10	0.666	0.654	0.637	0.630	0.611	0.592
0.14	0.660	0.651	0.635	0.630	0.613	0.595
0.20	0.655	0.648	0.633	0.630	0.615	0 598
0.30	0.650	0.614	0.632	0.629	0.616	0.600
0.50	0 644	0.640	0.630	0.628	0.617	0.603
1.00	0.632	6.633	0.628	0.626	0.615	0.605
1.50	0.615	6.619	0.620	0.620	0.611	0.602
2.00	0.611	6.612	0.612	0.613	0.607	0.601
3.00	0.609	0.610	0.608	0.606	0.603	0.601

36. Cas d'une contraction incomplète, ou de parois épaisses. — Tous les coefficients contenus dans les tables précédentes s'appliquent au cas où la contraction de la veine est *complète*, c'est-à-dire se produit sur tout le contour de l'orifice, et il faut, pour cela, que la distance entre cet orifice et le fond ou les parois du vase soit au moins égale à une fois et demie ou deux fois sa plus petite dimension. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la contraction se trouve atténuée, ou même supprimée. Par exemple, si la partie inférieure d'un orifice rectangu-

1. Les chiffres de ce tableau ne sont pas absolument comparables à ceux des précédents. Ils donnent le coefficient de débit, calculé par la formule approchée [5], tandis que les autres donnent le coefficient de contraction corrigé pour tenir compte de la petite inexactitude de cette formule, comme il est dit à la note de la page 66.

laire (fig. 22) coïncide avec la paroi horizontale du réservoir, on voit que les filets liquides inférieurs arriveront à l'orifice avec une direction normale à sa section et n'auront aucune tendance à se dévier ; la contraction sera supprimée sur la partie inférieure de l'orifice. Si l'on désigne par θ la fraction, nécessairement comprise entre 0 et 1, du périmètre de l'orifice sur laquelle la contraction se trouve ainsi supprimée, il résulte des expériences de Bidone que le coefficient m' applicable au cas de la contraction incomplète est lié, au coefficient m des tableaux précédents, par la relation approximative :

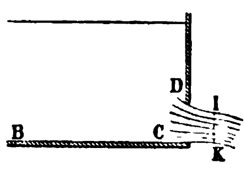


Fig. 22.

$$m' = m\,(1 + 0{,}15\,\theta),$$

lorsque l'orifice est rectangulaire, et

$$m' = m\,(1 + 0{,}13\,\theta)$$

lorsqu'il est circulaire.

On dit quelquefois que la contraction est supprimée à un orifice lorsque l'on a donné à cet orifice la forme de la veine contractée. On comprend, en effet, que si la paroi traversée par la veine fluide est taillée exactement suivant cette forme de manière que CD (fig. 23) soit la section contractractée, le débit de l'orifice sera $Q = CD \times \sqrt{2g\,H}$, sans coefficient de réduction ; mais il y aurait contraction si l'on rapportait le débit à la section d'origine AB. Entre cette forme exacte de la veine contractée que l'on peut donner à la paroi de l'orifice et la forme cylindrique AA′ BB′, pour laquelle le coefficient de contraction est 0,62 environ, il peut y avoir une foule de formes intermédiaires correspondant à des valeurs du coefficient m comprises entre 0,62 et l'unité. Ainsi, M. Graeff donne une table, dont j'ai extrait la suivante, des valeurs du coefficient de réduction de dépense m, pour diverses dispositions d'orifices rectangulaires, savoir :

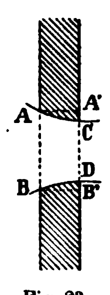


Fig 23.

A : Orifice en mince paroi entièrement isolé du fond et des parois du réservoir (cas de la contraction complète) ;

B : Orifice en mince paroi dans lequel la contraction est supprimée sur les bords verticaux (cas où les bords verticaux de l'orifice sont dans le prolongement des parois du réservoir, le sommet et la base étant biseautés comme dans la fig. 20, page 63 ;

C : Orifice en mince paroi dans lequel la contraction est supprimée sur la base (cas où le seuil est au niveau du fond) ;

D : Orifice en mince paroi dans lequel la contraction est supprimée sur les bords et sur la base, le sommet seul restant biseauté ;

E : Orifices de 0 m. 04 à 0 m. 05 d'épaisseur, non biseautés, isolés du fond et des parois du réservoir (cas des vannages ordinaires en bois) ;

F : Mêmes orifices dans lesquels la contraction latérale est supprimée (cas où les bords verticaux de l'orifice sont dans le prolongement des parois du canal) ;

G : Mêmes orifices dans lesquels la contraction est nulle à la fois sur les bords et sur la base.

Les coefficients de dépense, m, ont été mesurés par M. Graëff pour ces dispositifs dans deux conditions différentes : 1° les orifices débouchant librement à l'air, et 2° les orifices étant prolongés par des canaux de même largeur qu'eux mais trop courts pour que le régime uniforme puisse s'y établir. Dans les deux cas, il a trouvé, pour les petits orifices, des nombres assez différents de ceux qui conviennent aux grands pour qu'il ait cru devoir donner des coefficients différents pour les premiers, limités à 0 m. 03 de hauteur, et pour les autres, présentant une hauteur supérieure à 0 m. 03. Les coefficients, comme ceux des tableaux qui précèdent, sont d'ailleurs variables avec la charge sur le sommet de l'orifice, désignée plus haut (fig. 21, page 66) par h_1 ou plus exactement avec le rapport $\frac{h_1}{h_2 - h_1}$ de la charge sur le sommet à la hau-

teur $h_2 - h_1$ de l'orifice. On remarque que les coefficients donnés par M. Graeff pour les orifices en mince paroi ne concordent pas exactement avec ceux qui ont été trouvés dans les mêmes conditions par MM. Poncelet et Lesbros. La loi de variation du coefficient en sens inverse de la charge paraît en défaut lorsque celle-ci est très petite.

Coefficients applicables aux orifices rectangulaires.

Valeurs du rapport $\frac{h_1}{h_2 - h_1}$ de la charge sur le sommet à la hauteur de l'orifice.	Grands orifices ayant plus de 0m,03 de hauteur — Valeurs du coefficient m pour les dispositifs							Petits orifices ayant moins de 0m,03 de hauteur — Valeurs du coefficient m pour les dispositifs						
	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
	1. Orifices débouchant librement à l'air.													
1	0.61	0.65	0.67	0.70	0.65	0.68	»	0.67	0.70	0.71	0.72	0.71	0.75	»
5	0.62	0.64	0.67	0.69	0.67	0.70	»	0.66	0.66	0.70	0.71	0.70	0.74	»
10	0.62	0.63	0.67	0.69	0.68	0.71	»	0.65	0.65	0.69	0.70	0.70	0.74	»
20	0.61	0.63	0.66	0.68	0.68	0.71	»	0.64	0.65	0.69	0.70	0.70	0.74	»
40	0.61	0.62	0.66	0.68	0.68	0.70	»	0.63	0.64	0.69	0.69	0.69	0.73	»
100	0.60	0.60	0.66	0.68	0.66	0.69	»	0.61	0.63	0.68	0.68	0.69	0.72	»
400	0.60	0.60	0.65	0.67	0.66	0.68	»	0.60	0.63	0.68	0.68	0.68	0.71	»
1000 et au-delà.	0.60	0.60	0.65	0.67	0.66	0.68	»	0.60	0.62	0.67	0.67	0.68	0.71	»
	2. Orifices prolongés par des canaux.													
1	0.57	0.64	0.60	0.60	0.62	0.65	»	0.65	0.67	0.67	0.69	0.68	0.70	»
5	0.61	0.64	0.62	0.64	0.63	0.66	»	0.64	0.66	0.67	0.68	0.67	0.71	»
10	0.61	0.63	0.63	0.65	0.64	0.67	»	0.64	0.65	0.67	0.68	0.67	0.71	»
20	0.61	0.63	0.63	0.65	0.65	0.67	»	0.63	0.64	0.66	0.68	0.67	0.70	»
40	0.61	0.62	0.63	0.65	0.64	0.66	»	0.62	0.63	0.66	0.67	0.66	0.70	»
100	0.60	0.60	0.62	0.64	0.63	0.65	0.84	0.61	0.62	0.65	0.67	0.66	0.69	0.86
400	0.60	0.60	0.62	0.63	0.63	0.64	0.81	0.60	0.61	0.65	0.66	0.65	0.68	0.84
1000 et au-delà.	0.60	0.60	0.62	0.63	0.63	0.64	0.80	0.60	0.61	0.64	0.66	0.65	0.67	0.81

37. Orifice noyé. — Il peut arriver que la veine liquide, au lieu de déboucher dans l'atmosphère, débouche dans un autre vase rempli d'eau à un niveau constant. Alors la pression p_1, qui figure dans l'équation (1), est mesurée par la profondeur de l'orifice au-dessous de la surface libre du vase in-

férieur. Si h_1 est cette profondeur, h étant toujours celle de l'orifice au-dessous du niveau d'amont, de telle sorte que la différence de niveau des deux vases soit $h - h_1$, la pression p_1 sera égale à $p_0 + \Pi h_1$, et, en substituant dans l'équation (1), on aura, pour la vitesse de l'écoulement dans ces conditions

$$(6) \qquad U = \sqrt{2g(h - h_1)}$$

quelle que soit la position de l'orifice dans la paroi de séparation des deux masses liquides.

§ 2.

ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT

35. Variation de la pression dans le voisinage de l'orifice. — Voici un raisonnement au moyen duquel M. Collignon a pu se rendre compte de l'étendue dans laquelle la pression, au pourtour de l'orifice, varie autrement que suivant la loi hydrostatique. Soit AB (fig. 24) la paroi du vase où se trouve percé l'orifice CD de section ω, EF la section contractée $m\omega$, et enfin HL l'étendue de la paroi où les vitesses sont appréciables; désignons cette étendue par $K\omega$, K étant plus grand que l'unité. Considérons dans le liquide un cylindre fictif ABA'B' ayant pour base, sur la paroi AB, une surface $AB = A$ plus grande que HL ou que $K\omega$, et une hauteur $AA' = l$ suffisante pour que les vitesses des molécules liquides, à travers la section A'B', soient négligeables comme celles des molécules qui traversent le contour latéral du cylindre. Appliquons à la masse liquide contenue dans ce cylindre le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe xy perpendiculaire au plan de l'orifice et faisant un angle α avec la

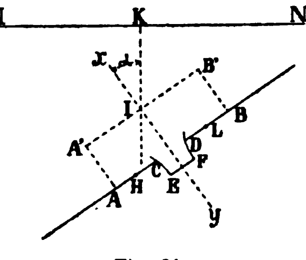


Fig. 24.

verticale. La quantité de mouvement étant considérée comme nulle sur tout le pourtour du cylindre, et le mouvement, à l'intérieur, étant supposé permanent, l'accroissement de quantité de mouvement, pendant l'unité de temps, sera simplement celle qui sera acquise par la masse liquide passée par la section EF. La vitesse de sortie étant U, et Π le poids spécifique du liquide, la masse écoulée dans l'unité de temps est $\frac{\Pi U m\omega}{g}$ et la quantité de mouvement acquise est $\frac{\Pi U^2 m\omega}{g}$. Cette quantité doit être égalée à la somme des impulsions des forces. Soit p_0 la pression atmosphérique que nous supposons s'exercer en tous les points de la section contractée EF, dans laquelle les filets coulent parallèlement, aussi bien que sur le contour CE, DF de la veine liquide. La résultante des pressions p_0 sur tout ce contour sera la même que celle d'une pression égale à p_0 s'exerçant sur la section CD ou ω et l'impulsion de cette force, négative, a pour expression $-p_0\omega$. La hauteur du centre de gravité de CD au-dessous de la surface libre étant toujours représentée par h et la hauteur, au-dessous de ce même niveau, du centre de la section A'B' étant z, nous avons entre ces quantités, la relation

$$z + l\cos\alpha = h.$$

La pression sur la surface A'B', d'étendue A, sera $(p_0 + \Pi z)$A et l'impulsion de cette force est positive. Les pressions sur la surface latérale du cylindre, étant normales à xy, auront une projection nulle sur cette direction. La pression sur la portion AH,LB de la paroi, variant, par hypothèse, suivant la loi hydrostatique, aura pour valeur $(p_0 + \Pi h)$ $(A - K\omega)$, car cette portion a, comme A'B', son centre de gravité sur xy et sa surface est $A - K\omega$. L'impulsion de cette force sera négative. Si la pression sur HC,DL, dont l'étendue est $\omega(K - 1)$ variait suivant la loi hydrostatique, elle serait $p_0 + \Pi h$; on peut, en appelant f un coefficient numérique à déterminer, la représenter, en moyenne, par $p_0 + f\Pi h$ et alors l'impulsion néga-

tive correspondante sera $-(p_0+f\Pi h)\,\omega\,(K-1)$. Enfin il reste à évaluer l'impulsion de la pesanteur. Le poids de la masse liquide considérée est $\Pi A l$ et son impulsion est $\Pi A l \cos\alpha$ ou bien, d'après l'équation ci-dessus, $\Pi A\,(h-z)$. Réunissant ces diverses quantités et écrivant l'équation, il vient :

$$\frac{\Pi U^2 m\omega}{g}=-p_0\omega+(p_0+\Pi z)A-(p_0+\Pi h)(A-K\omega)-(p_0+f\Pi h)\omega(K-1)+\Pi A(h-z)$$

Remplaçant U^2 par $2gh$ et réduisant, il reste simplement :

$$2m=f+K-fK.$$

Si la surface HC, DL était nulle, c'est-à-dire si la pression variait jusqu'au bord de l'orifice conformément à la loi hydrostatique, ce qui arrive lorsque les vitesses sont nulles dans toute l'étendue de la paroi et ce que l'on peut réaliser au moyen d'un ajutage rentrant, comme on le verra plus loin, la valeur de K serait égale à l'unité et l'on trouverait alors pour le coefficient m :

$$m=\frac{1}{2},$$

ainsi que nous l'établirons directement. Mais, en général, m dépend de K et de f. On peut établir, entre ces deux variables, une relation au moins approximative en admettant que la pression, sur tous les points de cette surface annulaire HC, DL, varie uniformément, à mesure qu'on s'éloigne du centre, depuis p_0 au bord de l'orifice jusqu'à $p_0+\Pi h$ à l'extrémité. Si r_0 et r_1 désignent les distances au centre de l'orifice de deux points tels que C et H et r celle d'un autre point quelconque, entre les deux, sur le même rayon vecteur, la pression en ce point sera $p_0+\Pi h\frac{r-r_0}{r_1-r_0}$, et la pression totale sur un secteur infiniment petit $d\theta$ sera $\int_{r_0}^{r_1} r\,dr\,d\theta\left(p_0+\Pi h\frac{r-r_0}{r_1-r_0}\right)$. La pression moyenne étant par hypothèse $p_0+f\Pi h$, et la surface de ce secteur $\int_{r_0}^{r_1} r\,dr\,d\theta = d\theta\frac{r_1^2-r_0^2}{2}$, on a, en écrivant l'égalité et faisant disparaître le facteur commun $d\theta$:

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(p_0+\Pi h\frac{r-r_0}{r_1-r_0}\right)rdr=(p_0+f\Pi h)\frac{r_1^2-r_0^2}{2}.$$

Effectuant l'intégration et réduisant, il vient :

$$f=\frac{2r_1+r_0}{3(r_1+r_0)}.$$

D'autre part, les figures ω et $K\omega$ étant semblables, le rapport K est égal à $\frac{r_1^2}{r_0^2}$, ce qui donne $\frac{r_1}{r_0}=\sqrt{K}$ et :

$$f=\frac{2\sqrt{K}+1}{3(\sqrt{K}+1)}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de m on obtient enfin

$$m=\frac{K+\sqrt{K}+1}{6}.$$

La valeur $K=1$ correspond à $m=\frac{1}{2}$ comme nous venons de le dire. Le coefficient de contraction m ayant, en général, dans les orifices en mince paroi, une valeur voisine de 0,62, il en résulte que K vaut à peu près 1,50 ; c'est-à-dire que la surface sur laquelle les vitesses des molécules deviennent appréciables, autour d'un orifice, ne dépasse pas la moitié de celle de l'orifice, en dehors de celui-ci. Par exemple, s'il s'agit d'un orifice circulaire, les vitesses ne commenceraient à être sensibles, ou non négligeables, qu'à une distance inférieure au quart de son rayon. Toutefois il convient de remarquer que le raisonnement qui précède suppose que la pression, aux bords de l'orifice, aux points C,D est égale à p_0 ; cela semble probable à cause de la présence de l'atmosphère tout près de ces points, mais on n'est pas certain que la pression n'y varie assez rapidement sur une petite étendue. Cela pourrait, en tout cas, n'être plus vrai pour le filet qui ne serait pas directement en contact avec l'atmosphère.

39. Vitesse des molécules fluides à l'intérieur du réservoir. — La théorie analytique complète de l'écoulement

d'un liquide par un orifice a été ébauchée par M. Boussinesq dans la première note complémentaire de son essai sur la théorie des eaux courantes, pages 530 à 569. Il est arrivé très facilement et très simplement à déterminer les vitesses des particules liquides à l'intérieur du vase dans la paroi duquel l'orifice est percé. Il a démontré que la vitesse de chaque molécule du réservoir est proportionnelle à l'attraction newtonienne (en raison inverse du carré de la distance) exercée sur cette molécule par un corps placé au centre de l'orifice, et qu'elle a aussi la même direction que cette force d'attraction. Tous les mouvements convergent donc rectilignement vers le centre.

On trouvera aux Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences des 3, 10 et 24 avril 1882, dans une note de St-Venant, une démonstration tout à fait simple de ce résultat, ainsi que le tracé graphique et l'équation analytique des curieuses courbes transformées des lignes fluides formées par les molécules dans l'intérieur du réservoir d'où l'eau s'écoule d'une manière permanente ou non permanente, et, dans une autre note de MM. de St-Venant et Flamant, en date des 12 et 19 novembre 1883, quelques résultats numériques relatifs au même objet et surtout une méthode approximative simplifiée pour les obtenir. Je me bornerai à y renvoyer le lecteur.

Mais les résultats ainsi obtenus ne sont exacts qu'à la condition de négliger les frottements du liquide sur lui-même et sur les parois du vase.

Cette approximation est très suffisante tant que l'on considère les vitesses des molécules liquides dans l'intérieur du vase, au-delà d'une petite distance de l'orifice, mais elle ne l'est plus lorsque l'on arrive à l'orifice lui-même. Cependant M. Boussinesq est arrivé à établir théoriquement la valeur $\frac{\pi}{5} = 0,628$ pour le coefficient de débit d'un orifice rectangulaire et celle $\frac{21 \times 25}{16 \times 157}\pi = 0,657$ pour un orifice circulaire. Ces valeurs s'accordent assez bien avec l'observation.

Il convient de remarquer que, même dans le cas de l'orifice

en mince paroi, le coefficient de débit, 0,62 par exemple, est le produit du coefficient de contraction de la veine par celui qui mesure la réduction de la vitesse. Or si, dans la section contractée, la vitesse moyenne était égale à $\sqrt{2gh}$, comme, très vraisemblablement, les vitesses des filets liquides sont différentes, la force vive de la veine fluide serait plus grande que le produit de la masse écoulée par $2gh$, ce qui est inadmissible. Si, comme plus haut (page 46), nous appelons α le coefficient, plus grand que l'unité, par lequel il faut multiplier le carré de la vitesse moyenne pour exprimer la force vive du courant liquide, ce sera le produit αU^2 qui devra être égalé à $2gh$, en faisant abstraction des frottements.

La vitesse moyenne U, dans la veine liquide, n'a donc pour valeur que $\sqrt{\frac{2gh}{\alpha}}$ et non pas $\sqrt{2gh}$. Le coefficient α, d'après M. Boussinesq, peut avoir pour valeur à peu près 1,056, il en résulte pour la vitesse moyenne U :

$$U = 0,97\sqrt{2gh}.$$

Et, par suite, si le coefficient de débit est par exemple 0,62, l'aire de la veine contractée ne sera pas les 0,62 de l'aire de l'orifice, mais bien les $\frac{0,62}{0,97} = 0,64$. Cette même correction devrait être appliquée à tous les coefficients indiqués plus haut, si l'on voulait en déduire la grandeur de la contraction de la veine.

40. Inversion de la veine. — Un phénomène curieux, qui accompagne toujours l'écoulement par des orifices non circulaires est celui dit de *l'inversion* de la veine. Si l'orifice est de forme carrée, comme ABCD fig. 25, on voit à une petite distance la veine devenir d'abord octogonale, les angles du carré étant abattus par de petits pans coupés *aa'*, *bb'*,.... ; puis un peu plus loin, au point où la contraction est la plus grande, ces pans coupés, en forme de courbes légère-

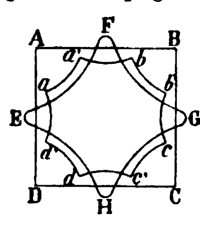


Fig. 25

ment concaves, donnent à la veine une forme sensiblement carrée EFGH dont les angles et les côtés sont disposés d'une façon *inverse* de ceux de l'orifice. Les veines de forme rectangulaire présentent des phénomènes analogues qui n'ont pas été jusqu'ici expliqués d'une manière suffisante. Voici ce que l'on peut dire à ce sujet.

Une expérience de Lajerhjelm, citée par MM. Poncelet et Lesbros à la page 161 de leurs *Expériences hydrauliques*, montre que, vers le centre de l'orifice, la vitesse du liquide est à peu près nulle. La vitesse près des bords étant très grande par rapport à celle du centre, les filets qui partent du pourtour ont envahi tout l'orifice avant que les molécules du centre aient pu acquérir des vitesses appréciables. Ces filets se recourbent en chemin, sous la pression du fluide central, jusqu'à ce que leur inertie, augmentant avec la courbure, leur fasse exercer sur ce fluide une pression sensiblement égale à la pression hydrostatique et le maintienne presque immobile. Les plus grandes vitesses se produisent dans les parties de l'orifice les plus éloignées du centre, et l'on conçoit que, s'il s'agit d'un orifice carré, par exemple, les filets partis de ses angles aient une force vive plus grande que les autres. Aussi, ces filets refoulent-ils les autres en se dilatant à leurs dépens et peuvent-ils produire le phénomène qui vient d'être décrit sous le nom d'inversion de la veine [1].

Des expériences récentes de M. Bazin, et qui ne sont pas encore publiées, semblent infirmer celle de Lajerhjelm ; mais si la vitesse au centre de l'orifice n'est pas nulle, elle est néanmoins beaucoup plus faible que sur les bords, ce qui laisse subsister le raisonnement précédent, dans ce qu'il a d'essentiel.

[1] Voir sur ce sujet l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* de M. Boussinesq, pages 536 à 569.

§ 3.

CAUSES DE PERTE DE CHARGE.

41. Agitation tourbillonnaire — Les causes qui produisent la perte de charge, dans le mouvement des liquides, bien que provenant toutes de l'effet du frottement des molécules liquides soit les unes sur les autres, soit sur les solides avec lesquels elles sont en contact, sont cependant nombreuses et variées. L'une des plus importantes est celle qui est due à ce que l'on appelle l'*agitation tourbillonnaire*, ou plus généralement aux mouvements irréguliers, *non-translatoires* des molécules liquides. Si l'on imagine une portion de liquide en mouvement au milieu d'une autre en repos, l'extrême mobilité des molécules d'une part, et leur frottement mutuel de l'autre, auront pour effet d'entraîner les parties immobiles auxquelles sera communiquée une partie du mouvement ou de la force vive du liquide. Cet effet se produit toutes les fois que deux filets liquides voisins sont animés de vitesses différentes ; le fait même de la différence de ces deux vitesses a pour conséquence une impulsion latérale qui tend à écarter l'une de l'autre les deux files de molécules supposées parallèles. Il en résulte des mouvements obliques, compliqués, qui peuvent devenir tumultueux. Les parties du fluide, au lieu d'avoir des vitesses régulièrement croissantes d'un point à l'autre, semblent se séparer par morceaux qui tournent les uns devant les autres, le fond renvoie des masses qui surgissent à la surface, etc.

Dans les endroits où les mouvements sont accompagnés de tourbillonnements nombreux, compliqués et rapides, comme par exemple lors de l'augmentation brusque ou rapide des sections d'écoulement, il se développe des frottements extraordinaires dont le travail constitue la perte de force vive ou perte de charge qu'il s'agit d'évaluer.

42. Elargissement brusque ou rapide de la section d'un courant liquide. — Soit un courant liquide s'écoulant dans un tuyau à section d'abord constante AABB (fig. 26) et présentant, en BB, un élargissement brusque BCBC ; les filets liquides pénétrant dans la partie élargie CDCD s'épanouissent suivant des courbes telles que BDBD et il se produit, dans les angles, des mouvements tourbillonnaires qui absorbent une certaine quantité de force vive. Si l'on considère la section transversale BB, avant l'élargissement, et une autre section DD, un peu après, à une distance suffisante pour que les vitesses de tous les filets soient redevenues parallèles, le théorème de Bernoulli ne sera pas applicable à la trajectoire d'une molécule entre ces deux sections : à cause de la perte de force vive dont il s'agit, le plan de charge pour la section DD sera plus bas que celui de la section BB et la différence constitue la *perte de charge* due à l'élargissement brusque.

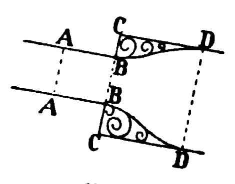


Fig. 26.

Admettons, pour simplifier, que toutes les molécules traversant la section BB aient une vitesse commune U_0, que, de même, lorsqu'elles traversent la section DD elles aient une même vitesse U ; désignons par p_0 la pression moyenne sur la section BB, par p celle sur la section DD ; par ω_0 et ω les aires de ces deux sections, et par z_0 et z les hauteurs de leurs centres de gravité audessus d'un plan horizontal inférieur. Les hauteurs des plans de charge respectifs, au-dessus de ce même plan de comparaison, seront :

$$z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} \qquad \text{et} \qquad z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g},$$

et pour comparer ces hauteurs nous allons chercher, entre les diverses quantités qui y figurent, une relation mécanique, en appliquant au liquide en mouvement le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe. La masse liquide qui se trouve dans les parties BCD, n'est animée que d'un mouvement mal défini constitué par des oscillations peu sensibles ;

Il y a, dans la partie élargie du tuyau, une portion *vive* formée de la veine liquide animée d'un mouvement translatoire et une portion dite *morte* qui ne sert en rien à l'alimentation et qui n'est animée que de mouvements non-translatoires. On peut supposer, approximativement, que cette portion dite *morte* est immobile et que la pression y varie suivant la loi hydrostatique, c'est-à-dire que la pression sur la section CC soit égale au produit de l'aire de cette section par la pression en son centre de gravité; de sorte que si h est la hauteur du centre de gravité de la section BB, où la pression est p_0, au-dessus du centre de gravité de la section CC, la pression moyenne sur cette dernière sera $p_0 + \Pi h$.

Le mouvement étant supposé permanent, l'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur une parallèle aux vitesses U_0 et U sera dû simplement à la différence des quantités de mouvement des tranches infiniment petites et égales, l'une, entrée en BB avec une vitesse U_0, l'autre, sortie en DD avec une vitesse U. La masse écoulée dans l'unité de temps étant $\rho U_0 \omega_0 = \rho U \omega$, l'accroissement de la quantité de mouvement sera ainsi $\rho U\omega (U - U_0)$; et cet accroissement est égal à la somme des projections des forces sur la direction du mouvement. Les forces sont : 1° la pesanteur qui a pour valeur $\Pi\omega \times CD$ et dont la projection sur la direction du mouvement sera le produit de $\Pi\omega$ par la projection de CD sur la verticale ou par $z_0 - z - h$, c'est-à-dire $\Pi\omega\ (z_0 - z - h)$; 2° les pressions. Celles qui s'exercent sur le contour CDCD sont supposées normales et ont une projection nulle; celles qui s'exercent sur BC et DD ont respectivement pour valeur $\omega (p_0 + \Pi h)$ et ωp et elles se projettent en vraie grandeur. On a ainsi l'équation

$$\rho U\omega\ (U - U_0) = \Pi\omega\ (z_0 - z - h) + \omega\ (p_0 + \Pi h) - \omega p\ ;$$

Divisons par $\Pi\omega$ et remplaçons $\frac{\rho}{\Pi}$ par $\frac{1}{g}$, nous aurons :

$$\frac{U(U - U_0)}{g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\Pi} - \frac{p}{\Pi},$$

ce qui peut s'écrire :

$$(7) \qquad z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} + \frac{(U_0 - U)^2}{2g}.$$

Cela montre que le plan de charge en DD est au-dessous du plan de charge en BB de la quantité $\frac{(U_0 - U)^2}{2g}$ qui représente la perte de charge due à l'élargissement brusque de la section. Cette perte de charge est ainsi la hauteur due à la vitesse perdue par le liquide.

Ce résultat peut être démontré plus simplement en considérant que, d'après ce que nous avons dit à propos du théorème de Bernoulli, la charge en un point est proportionnelle à l'énergie totale au point correspondant. Remarquons alors que les pressions sur la portion DCBBCD varient de la même manière que si elles agissaient sur un liquide en équilibre, que par conséquent elles font équilibre à la pesanteur et donneront avec celle-ci un travail total nul pour tout déplacement virtuel attribué à la masse liquide. Cela posé, écrivons l'équation des forces vives, non plus pour les mouvements réels de cette masse, mais pour ses mouvements relatifs à celui du liquide qui coule après DD ou à un système invariable possédant une vitesse uniforme égale et parallèle à U. Nous ne changerons rien aux mouvements relatifs des molécules ni aux travaux des forces intérieures que nous avons à évaluer. D'autre part, le travail de la pression p est nul puisque son point d'application est en repos relatif ; le travail des forces intérieures est ainsi égal à la variation de force vive. Or, la force vive est nulle à la sortie puisque les vitesses relatives sont nulles. A l'entrée en BB les vitesses sont $U_0 - U$ et la force vive est $\frac{\Pi\omega}{g} \frac{(U_0 - U)^2}{2}$ ce qui donne pour la variation de force vive par unité de poids du liquide ou pour la perte de charge $\frac{(U_0 - U)^2}{2g}$, comme nous venons de le trouver autrement.

Cette démonstration s'étend au cas où l'élargissement, au

lieu d'être brusque, c'est-à-dire formé par une paroi BCBC normale à la direction du mouvement, est graduel ou évasé, à la condition que dans toute son étendue les pressions s'y règlent comme si le liquide était en repos. Mais elle suppose comme la précédente la presque stagnation du liquide dans la partie évasée, ce qui n'est pas absolument vérifié par l'expérience ;elle suppose aussi que les vitesses U_0 et U sont communes à tous les filets qui traversent les sections BB et DD, hypothèse absolument contraire aux faits qui démontrent, comme nous aurons occasion de le direplus loin, que la vitesse va en croissant du périmètre au centre de la section ; enfin, le calcul de la perte de charge néglige le travail du frottement sur les parois, et du frottement mutuel des molécules liquides dans toute la partie *vive* de la veine, entre BB et DD. On tient compte dans une mesure suffisante, de ces différences entre la théorie et les faits en ajoutant à la perte de charge $\frac{(U_0 - U)^2}{2g}$ un terme correctif complémentaire dont la valeur doit être fixée, d'après des expériences de Borda, interprétées par St-Venant[1], à $0,111 \frac{U^2}{2g} = \frac{1}{9} \frac{U^2}{2g}$. De sorte que la perte de charge due à un élargissement brusque ou rapide de la section transversale d'un courant serait à peu près[2] :

$$(8) \quad \frac{(U_0-U)^2}{2g} + \frac{1}{9} \frac{U^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \left[\left(\frac{U_0}{U} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right] = \frac{U^2}{2g} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

1. Mémoire sur la perte de force vive d'un liquide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement (*Mémoires de l'Institut*, T. XLIV).

2. Le terme correctif $\frac{1}{9} \frac{U^2}{2g}$ ne provient qu'en partie de l'excès de la quantité de mouvement du volume liquide traversant la section dans l'unité de temps sur ce que serait cette quantité de mouvement si tous les filets liquides avaient la vitesse commune U. Cet excès ne dépasse guère $\frac{1}{15} \frac{U^2}{2g}$ et il y aurait lieu d'ailleurs de tenir compte en sens inverse d'une correction correspondante pour le liquide traversant la section BB avec la vitesse moyenne U_0, en

43. Passage dans une section rétrécie. — Lorsqu'un courant arrive dans une section rétrécie, il se produit en général un phénomène analogue à celui de l'écoulement par un orifice en mince paroi ; et nous avons vu plus haut (n° 32), qu'il n'y a pas alors de perte de charge. Les frottements intérieurs et extérieurs qui se produisent en effet jusqu'à la section contractée sont négligeables et si, à partir de cette section, le courant liquide conservait une section constante, il n'y aurait d'autre perte de charge que celle qui proviendrait du frottement sur les parois, que nous étudierons plus loin et qui est toujours très petite lorsqu'il s'agit d'une faible longueur. Mais si, après avoir été contractée, la veine liquide trouve à s'épanouir dans une section plus grande, cet élargissement brusque ou rapide donnera lieu à la perte de charge qui vient d'être évaluée. Il peut alors se présenter deux cas distincts ; ou bien la section rétrécie n'a qu'une très faible longueur dans le sens du courant, et constitue, en quelque sorte, une mince paroi, comme le serait un diaphragme percé d'un orifice et placé transversalement au courant ; ou bien, au contraire, la section rétrécie forme une sorte de tuyau où elle reste constante sur une certaine longueur.

Dans le premier cas, si AB (fig. 27) est la section rétrécie en mince paroi dont nous désignerons l'aire par ω_0, le courant après l'avoir traversée se contracte jusqu'en CD où il n'a plus qu'une section égale au produit de ω_0 par un coefficient de contraction m qui, en l'absence de tout autre renseignement, peut être pris égal à 0,62. Puis le cou-

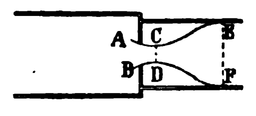


Fig. 27

sorte qu'au total la correction $\frac{1}{15} \cdot \frac{U^2 - U_0^2}{2g}$ serait négative. Mais c'est par suite de compensations d'erreurs ou d'approximations et de l'intervention de causes de pertes de charge négligées que l'on peut adopter avec assez d'exactitude le terme correctif $\frac{1}{9} \frac{U^2}{2g}$. Ce terme est d'ailleurs fort petit. Pour une vitesse de 3 mètres qui est à peu près le maximum de celles que l'on donne à l'eau dans les tuyaux de conduite, il n'a qu'une valeur de 0 m. 05. Il est donc la plupart du temps négligeable.

rant s'épanouit jusqu'à la section EF dont nous désignerons l'aire par ω, et alors, d'après la formule (8), la perte de charge due à l'élargissement brusque de la section depuis la valeur $m\omega_0$ jusqu'à la valeur ω sera, en appelant U la vitesse moyenne à travers la section EF :

$$\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{\omega}{m\omega_0}-1\right)^2+\frac{1}{9}\right].$$

Le second cas (fig. 28), où la section rétrécie présente une grande longueur, se ramène au précédent en observant que la section EF est alors égale à ω_0, et que le rapport $\frac{\omega}{m\omega_0}$ devient $\frac{1}{m}$. Il en résulte que la perte de charge correspondante est $\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{1}{9}\right]$, ce qui, en mettant pour m la valeur approximative 0,62 donne, pour la perte de charge due à l'entrée dans un tuyau :

Fig. 28

$$\frac{U^2}{2g}\left[0,376+0,111\right]=0,487\,\frac{U^2}{2g} \text{ soit environ } \frac{1}{2}\,\frac{U^2}{2g} \text{ ou } \frac{1}{40}\,U^2.$$

44. Perte de charge due aux coudes. — Lorsque le courant liquide doit suivre une trajectoire courbe qui lui est imposée par la forme des corps solides avec lesquels il est en contact, il en résulte encore une perte de charge dont il est facile d'apercevoir la cause. Soit, par exemple (fig. 29), un tuyau présentant un coude brusque ABC. On conçoit qu'après le coude les filets liquides, obligés de se courber brusquement, produisent, en E, un phénomène analogue à celui de la contraction de la veine qui s'observe après un rétrécissement brusque; mais la perturbation de l'écoulement paraît s'étendre même dans

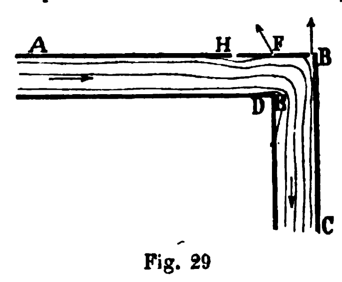


Fig. 29

la branche AB, avant le coude et du côté opposé à l'angle rentrant D. Les expériences citées par M. de Caligny (*Hydraulique*, page 247) montrent que si, sur la paroi AB du tuyau supposée horizontale on a percé trois petits trous, le premier B, tout à fait à l'angle, le second F, à une distance égale à peu près au diamètre, et le troisième H à même distance du second, ces trous pouvant à volonté être ouverts ou fermés avec de la cire, de l'orifice B sort un jet normal à la direction du tuyau ; de l'orifice F, un jet oblique vers l'arrière, et de l'orifice H il ne sort rien. Cette expérience montre que l'écoulement dans un coude s'effectue suivant des lois assez compliquées, et qu'on essaierait en vain, dans l'état actuel de la science, de l'étudier théoriquement. La perte de charge, dont l'évaluation a seule un intérêt pratique, a été déterminée expérimentalement. Pour un coude à angle droit, elle est d'environ $\frac{1}{4}\frac{U^2}{2g}$, en appelant U la vitesse moyenne de l'eau.

Si le coude est arrondi, les filets liquides, qui sont d'abord parallèles, et qui, en vertu de l'inertie, tendent à rester rectilignes, viennent se réfléchir successivement sur la paroi concave et se croisent ensuite en s'enchevêtrant dans tous les

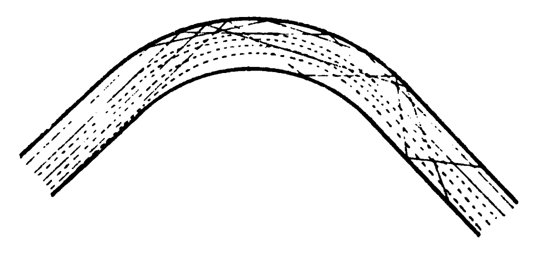


Fig. 30.

sens. Dans la figure 30, les lignes pleines montrent les trajectoires que suivraient les filets liquides s'ils étaient isolés et si chacun d'eux pouvait, indépendamment des autres, continuer sa marche rectiligne et venir se réfléchir successivement sur les parois courbes. Du Buat a établi, dans cette hypothèse,

un essai de théorie de l'écoulement dans les courbes. En réalité, la marche des filets liquides est bien différente : chacun d'eux est influencé par son voisin et suit une trajectoire courbe présentant sans doute une courbure un peu plus grande que celle du coude, à peu près comme l'indiquent les lignes pointillées. La vitesse moyenne restant la même si la section est constante, la répartition des vitesses est très différente de ce qu'elle est dans une partie rectiligne. L'effet du coude est, dans une certaine mesure, assimilable à celui d'un étranglement de la section transversale ; la perte de charge dépend donc alors de la vitesse. Mais elle doit aussi dépendre encore de l'angle de contingence du coude, ou du rapport $\frac{L}{r}$ de la longueur L de la courbe, mesurée sur le filet moyen, au rayon de courbure r de ce filet, et dans une certaine mesure aussi du diamètre D du tuyau. En discutant une formule empirique déduite par Du Buat de ses expériences, de St-Venant[1] a reconnu que la perte de charge dont il s'agit pouvait être représentée par la formule suivante dans laquelle les trois quantités L, D, r, qui viennent d'être définies, ainsi que la vitesse U, sont exprimées en mètres :

$$0{,}096 \frac{U^2}{2g} \frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}} = 0{,}005\, U^2 \frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}}.$$

On peut se contenter, en général, de prendre approximativement, pour cette perte de charge, la valeur :

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{U^2}{2g} \text{ ou } \frac{1}{200} U^2;$$

ce qui revient à remplacer par l'unité le produit $\frac{L}{r}\sqrt{\frac{D}{r}}$.

La perte de charge due aux coudes est souvent négligée dans les calculs. Il en est de même d'ailleurs des autres pertes de charge que nous venons d'évaluer.

1. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 6 janvier 1862.

§ 4.

AJUTAGES

45. Écoulement par des orifices munis d'ajutages. — On appelle ajutage un tuyau de faible longueur placé à la suite d'un orifice par lequel s'écoule un liquide. Un orifice qui n'est pas en mince paroi peut être considéré comme muni d'un ajutage. Les ajutages peuvent être cylindriques ou coniques et leur présence modifie les conditions de l'écoulement, comme nous allons le voir en examinant les diverses formes qu'ils peuvent présenter.

46. Ajutage cylindrique rentrant, ou de Borda. — L'orifice peut être muni d'un ajutage cylindrique situé du côté de l'intérieur du vase (fig. 31). Cette disposition a pour objet de rendre sensiblement immobile le liquide qui se trouve en contact avec la paroi LM dans laquelle se trouve percé l'orifice, de sorte que les pressions s'y répartissent suivant la loi hydrostatique de la même manière que sur toutes les autres parois, et que, abstraction faite de l'orifice CD, les pressions sur toutes les parois varient suivant cette loi hydrostatique. Si l'on considère le contour IK intercepté sur la paroi opposée par le prolongement de l'ajutage, il y aura équilibre entre toutes les pressions exercées sur le liquide par les parois, à l'exception de celle qui correspond à la portion IK, laquelle n'aura pas de contre-partie sur la paroi opposée. Cela étant, appliquons à l'écoulement le théorème des quantités de mouvement projetées sur l'horizontale ; soit G le centre de gravité de la section contractée et h sa profondeur au-dessous de la surface libre. En admettant même que cette surface libre se soit abaissée, pendant l'unité de

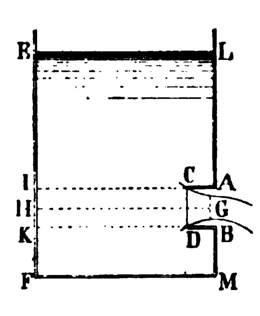


Fig. 31.

temps, d'une quantité appréciable, la quantité de mouvement qui en résulte a une projection nulle sur l'horizontale puisque les vitesses des différents points ont été verticales. L'accroissement de la quantité de mouvement est dû à la masse liquide écoulée par la section G, d'aire ω', avec la vitesse U. Cette masse est $\rho\omega'U$, et la quantité de mouvement correspondante, $\rho\omega'U^2$, doit être égale à la somme des projections des forces sur l'horizontale. A l'exception des forces qui agissent sur IK et CGD, ces projections sont nulles. Si ω est l'aire de la section CD ou de IK, la projection sur GH de la pression sur IK sera $(p_0 + \Pi h)\,\omega$, en appelant p_0 la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface libre et sur le contour de la veine CGD. La pression sur cette veine est égale (n° 12, p. 15) à $p_0 \times$ CD ou à $p_0\omega$; la somme des projections des forces est ainsi $(p_0 + \Pi h)\,\omega - p_0\,\omega = \Pi h\omega$ et elle doit être égale à $\rho\omega'\,U^2$. Remplaçons Π par ρg, puis U^2 par $2gh$ et écrivons cette égalité, il vient,

$$\rho g h\omega = \rho\omega'.2gh \text{ ou } \omega = 2\omega', \ \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{2}.$$

Le coefficient de contraction est, dans ce cas, égal à $\frac{1}{2}$, et ce résultat a été vérifié par l'expérience. Le débit de cet ajutage est donc $Q = \frac{1}{2}\,\omega\sqrt{2gh}$.

47. Ajutage cylindrique extérieur. — Si le tuyau formant ajutage a une longueur égale à une fois et demie au moins la plus grande dimension de l'orifice, on constate que la veine fluide, après avoir subi une contraction à l'entrée jusqu'à une section CD (fig. 32) s'épanouit ensuite, vient remplir le tuyau et sort à *gueule-bée*, c'est-à-dire par toute la section terminale EF. La perte de charge est alors, d'après ce qui vient d'être dit au numéro 43, page 87, égale à :

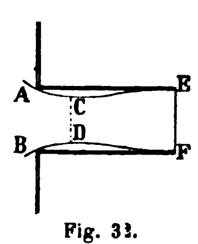


Fig. 32.

$$\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}\right],$$

en appelant U la vitesse moyenne de sortie et m le coefficient de contraction. Appliquons le théorème de Bernoulli à une molécule quelconque, depuis l'instant où sa vitesse était nulle jusqu'au moment où elle traverse la section EF avec une vitesse U, en appelant comme plus haut h la profondeur du centre de gravité de cette section au dessous de la surface libre et p_0 la pression atmosphérique, que nous supposons agir sur la surface libre et sur la veine liquide à sa sortie. Le plan de charge au départ sera, au-dessus de la surface libre, à une hauteur $\frac{p_0}{\Pi}$; dans la section EF le plan de charge sera au-dessus de cette section à une hauteur $\frac{U^2}{2g}+\frac{p_0}{\Pi}$ et ce plan est plus bas que le premier de $\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{1}{9}\right]$. On a ainsi :

$$\frac{p_0}{\Pi}+h=\frac{U^2}{2g}+\frac{p_0}{\Pi}+\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{1}{9}\right];$$

d'où l'on tire :

$$U=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{10}{9}}};$$

ce qui, avec la valeur $m=0{,}62$, donne $U=0{,}82\sqrt{2gh}$. Comme la section où se produit la vitesse moyenne U est égale à la section ω de l'orifice, le débit Q est égal à $0{,}82\omega\sqrt{2gh}$ et il est supérieur, par conséquent, au débit de l'orifice en mince paroi qui n'est que $0{,}62\omega\sqrt{2gh}$. La vitesse de sortie est inférieure mais la section est augmentée.

L'augmentation de débit est le résultat d'une diminution de la pression sur la section contractée CD. Il suffit, pour la calculer, d'appliquer le théorème de Bernoulli depuis le point de départ d'une molécule jusqu'à la section CD, trajet dans lequel il n'y a pas de perte de charge. En appelant p_1 la pression inconnue et U_1 la vitesse dans cette section, on a l'équation :

$$\frac{p_0}{\Pi}+h=\frac{U_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\Pi},$$

et en écrivant que les vitesses U_1 et U sont en raison inverse des sections $m\omega$ et ω ou que $U_1 m\omega = U\omega$, c'est-à-dire en remplaçant U_1 par $\frac{U}{m}$ ou par $\frac{0,82}{0,62}\sqrt{2gh}$, il vient

$$\frac{p_0 - p_1}{\Pi} = h\left[\left(\frac{0.82}{0.62}\right)^2 - 1\right] = \frac{3}{4}h = 0.75\,h.$$

Cette diminution de pression a été constatée par une expérience célèbre de Venturi.

La charge totale, h, peut être considérée comme formée de deux parties ; l'une, égale à $(0,82)^2 = 0,6724$ ou à peu près à $\frac{2}{3}h = \frac{U^2}{2g}$, correspond à la vitesse U communiquée à l'eau à la sortie ; l'autre, égale à peu près à $\frac{1}{3}h$ représente la perte de charge. Il en résulte que, dans l'étendue de l'ajutage, le plan de charge s'abaisse de $\frac{1}{3}h$ ou de 0,49 soit $\frac{1}{2}\frac{U^2}{2g}$.

Ce même abaissement du plan de charge se produit, bien entendu, à l'entrée de tout tuyau dont l'origine peut être assimilée à un ajutage.

Par conséquent, la consommation totale de charge, à l'entrée d'un tuyau, est égale à $\frac{3}{2}\cdot\frac{U^2}{2g}$ savoir : $\frac{1}{2}\cdot\frac{U^2}{2g}$ pour la perte calculée comme à la fin du n° 43, page 87, et $\frac{U^2}{2g}$ pour la hauteur nécessaire à la production de la vitesse.

48. Ajutages coniques. — Les ajutages coniques peuvent être convergents ou divergents. Les ajutages convergents ne présentent rien de particulier : très peu convergents, ils sont assimilables aux ajutages cylindriques ; très convergents, au contraire, ils produisent des phénomènes analogues à ceux d'une mince paroi, la veine se contracte à la sortie. Si l'inclinaison du cône est exactement celle qui correspondrait au contour de la veine contractée sortant d'un orifice, il ne se produit pas de perte de charge. Dans tous les autres cas, il y en a une

plus ou moins grande : la vitesse de sortie n'est donc qu'une fraction de $\sqrt{2gh}$, soit $\mu\sqrt{2gh}$; la section contractée étant toujours $m\omega$, le débit est $\mu m\omega\sqrt{2gh}$ et dépend du produit des deux coefficients de réduction μ et m, tous deux variables et inférieurs à l'unité. L'expérience a montré que le débit était maximum lorsqne l'angle au sommet du cône atteignait 12 degrés environ et que sa valeur était alors $0.94\ \omega\sqrt{2gh}$.

Si l'ajutage est divergent et si la divergence est assez faible pour que les filets liquides en mouvement restent constamment en contact avec les parois, sans interposition d'aucune partie *morte,* il n'y a pas de perte de charge appréciable, ou tout au moins susceptible d'être calculée comme dans le cas de l'ajutage cylindrique. La vitesse de sortie est donc alors, théoriquement, égale à $\sqrt{2gh}$ quelle que soit la grandeur de l'orifice EF (fig. 23).

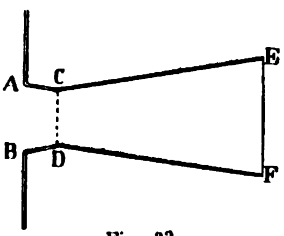


Fig. 33.

Il en résulterait que le débit pourrait être augmenté indéfiniment par un allongement suffisant de l'ajutage. Mais ce raisonnenement paradoxal est inexact. Il se produit en réalité des pertes de charge, difficiles à évaluer, mais que l'expérience a toujours révélées. En outre, la vitesse $U = \sqrt{2gh}$ à travers l'orifice EF de section ω a pour conséquence dans la section CD, d'aire ω_0, une vitesse $U_0 = \frac{U\omega}{\omega_0}$ d'autant plus grande que le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ est plus grand, et cette vitesse U_0 ne peut se produire, d'après le principe de Bernoulli, que si la pression, dans la section CD, diminue dans une proportion convenable. Or la diminution de la pression a une limite pratique : non-seulement elle ne peut pas devenir négative, mais même elle ne peut, lorsqu'il s'agit d'un écoulement d'eau, descendre au-dessous d'une certaine fraction (moitié, par exemple) de la pression atmosphérique. Au-delà de cette limite l'air contenu en dissolution dans l'eau se dégage et l'écoulement devient tumultueux. La vitesse dans la section rétrécie CD, que nous avons appelée

U_0, ne peut donc dépasser une valeur déterminée et par suite le débit lui-même se trouve limité.

Alors même que l'eau ne contiendrait pas d'air en dissolution, une diminution de la pression pourrait devenir suffisante pour amener la transformation de l'eau en vapeur et les mêmes conséquences se manifesteraient.

D'ailleurs, si, comme l'a montré Venturi, l'on perce de petits trous la paroi de l'ajutage divergent, on permet à la pression atmosphérique de s'exercer en tous les points de la veine fluide et l'ajutage cesse de produire une augmentation du débit.

Ces ajutages divergents n'ont pour ainsi dire aucune application pratique.

§ 5.

DÉVERSOIRS

49. Ecoulement par déversoir. — On appelle déversoir un orifice superficiel ouvert à sa partie supérieure. La forme des déversoirs est généralement rectangulaire ; leur *seuil* est horizontal et leurs *joues* sont verticales. La largeur du déversoir est la distance entre les joues.

Le seuil d'un déversoir présente toujours une saillie sur le fond du cours d'eau et c'est cette saillie qui constitue même, à proprement parler, le déversoir. Le niveau de l'eau, en aval, doit, pour que l'orifice fonctionne véritablement comme déversoir, se trouver au-dessous du niveau du seuil ; autrement le déversoir est noyé.

La théorie de l'écoulement par déversoir a été longtemps imparfaite, mais depuis les travaux théoriques de M. Boussinesq [1] et les remarquables expériences de M. Bazin [2] on peut donner une explication suffisante du phénomène.

1. Voir les comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, années 1887, 1888 et 1889.

2. Voir les *Annales des Ponts et Chaussées,* années 1890 et 1891.

Si l'on considère l'écoulement au-dessus d'un déversoir en mince paroi (fig. 34), on constate que le niveau d'amont, supposé d'ailleurs maintenu constant, s'abaisse à une certaine distance en avant de l'orifice et que l'épaisseur de la lame d'eau déversante n'est qu'une fraction de la hauteur verticale H de ce niveau au-dessus du seuil. Lorsque le mouvement est permanent, l'épaisseur h de la lame déversante se règle de telle façon que, pour la hauteur H donnée supposée constante, le débit du déversoir soit maximum ; car le régime d'un cours d'eau ne peut être stable qu'autant que la masse liquide y coule partout le plus bas possible ; la hauteur sur le déversoir est donc minimum pour une valeur donnée du débit Q, ou, inversement, Q est maximum [1] pour une valeur donnée de l'épaisseur h.

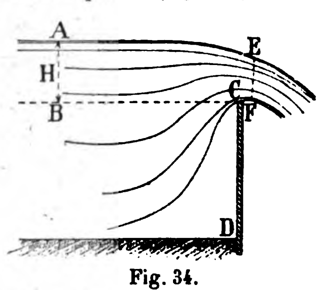


Fig. 34.

50. Déversoir à crête épaisse. — Ce principe étant admis, le calcul du débit d'un déversoir devient facile. Supposons

1. On peut justifier ce principe du maximun du débit d'une manière plus rigoureuse. Le débit Q est nécessairement une fonction de la charge H sur le seuil du déversoir et de l'épaisseur h de la lame déversante : $Q = f(H, h)$. Imaginons que, le débit étant constant, le niveau d'aval ait été d'abord tenu assez haut pour noyer le déversoir puis abaissé peu à peu jusqu'à production, sur le barrage, du régime désormais invariable que nous étudions. L'approche de cet état-limite, où s'évanouit l'influence sur H du niveau d'aval, doit être annoncée par une atténuation indéfinie de cette influence, non seulement entre l'aval et la section contractée, mais aussi entre la section contractée et l'amont du déversoir. Elle est donc caractérisée par ce fait qu'une diminution $-dh$ de l'épaisseur de la lame déversante n'aura plus produit qu'un abaissement $-dH$, infiniment plus faible, de la hauteur H ; c'est-à-dire que le rapport $\frac{dH}{dh}$ sera nul au moment où s'établira le régime dont nous cherchons la loi.

Mais la relation $Q = f(H, h) = \text{const.}$ donne $\frac{dQ}{dH} dH + \frac{dQ}{dh} dh = 0$, ou bien, puisque le rapport $\frac{dH}{dh}$ est nul : $\frac{dQ}{dh} = 0$. Ce qui montre que Q est maximum pour une valeur donnée de h.

d'abord comme on le faisait généralement avant d'avoir la théorie du déversoir en mince paroi, que le seuil du déversoir ait une épaisseur suffisante pour que la lame déversante (fig. 35) y coule, sur une certaine longueur, de façon à ce que tous les filets fluides aient des trajectoires horizontales, et soient H et h les hauteurs sur le seuil du niveau d'amont et de la lame déversante; admettons que la vitesse U des filets fluides soit la même pour tous, et appliquons le théorème de Bernoulli à une molécule partant du repos en amont et traversant le déversoir avec la vitesse U : nous aurons en faisant abstraction de la pression atmosphérique qui est constante :

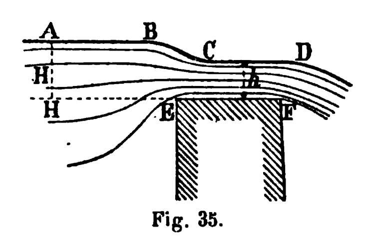


Fig. 35.

$$\frac{U^2}{2g} = H - h \quad \text{ou} \quad U = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Alors, la largeur du déversoir étant l, la section d'écoulement est lh et le débit Q a pour valeur :

$$Q = lh\sqrt{2g(H-h)},$$

en ne tenant pas compte de la contraction latérale que peuvent produire les joues du déversoir, c'est-à-dire en admettant que le débit soit constant par unité de longueur du seuil. Ce débit $\frac{Q}{l}$, par unité de longueur, que nous désignerons par q, doit être tel que la dérivée $\frac{dQ}{dh}$ soit nulle, ou être maximum pour une valeur donnée de h. Nous avons alors:

$$\frac{dQ}{dh} = l\sqrt{2g}\left[\sqrt{H-h} - \frac{h}{2\sqrt{H-h}}\right];$$

et cette dérivée, égalée à zéro, nous donne:

$$h = \frac{2}{3} H = 0,667 \text{ H}.$$

Portant cette valeur dans l'expression du débit, nous trouvons, pour le débit par unité de longueur :

$$\frac{Q}{l} = q = \frac{2}{3} H \sqrt{\frac{2}{3} g H} = 0{,}385\, H \sqrt{2gH}.$$

Les expériences de Lesbros dont les conditions se rapprochent le plus de celles qui ont été supposées ci-dessus ont donné, pour la valeur du coefficient numérique, 0,35 au lieu de 0,385. La différence tient évidemment à une petite perte de charge qui n'a pas été évaluée.

51. Déversoir en mince paroi ou à crête mince. — On a fréquemment, en pratique, l'occasion de se servir d'un déversoir en mince paroi. Alors, la vitesse des molécules fluides qui viennent de la partie postérieure, produit (fig. 36), comme dans le cas de l'orifice ordinaire, une contraction de la veine, ou un relèvement au-dessus du seuil des filets liquides inférieurs. Désignons par ε ce relèvement au point F où il est maximum, et supposons encore que les filets traversent la section contractée EF avec des vitesses sensiblement parallèles et admettons, de plus, que dans cette section leurs trajectoires aient même centre de courbure O. Si alors R_0 désigne le rayon de courbure OF du filet le plus bas, z la hauteur d'un filet quelconque M au-dessus du seuil, le rayon de courbure OM de ce filet sera $R = R_0 + z - \varepsilon$. Sa vitesse étant V, l'équation exprimant son équilibre dynamique sera d'après celles (1) qui ont été établies page 28, n° 16 :

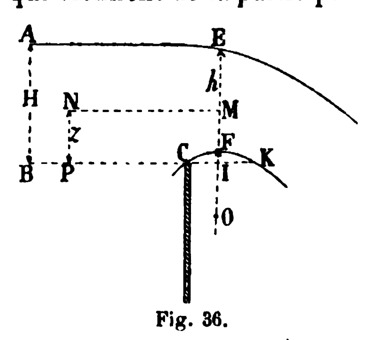


Fig. 36.

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - w' = -g + \frac{V^2}{R}.$$

Si d'un autre côté nous supposons le théorème de Bernoulli applicable à la trajectoire d'une molécule, il nous donnera $z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = H$, ou bien en différentiant : $1 + \frac{dp}{\Pi dz} + \frac{VdV}{gdz} = 0$;

d'où nous tirons, en multipliant par g et tenant compte de ce que $\Pi = \rho g$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g - \frac{VdV}{dz}.$$

Egalant cette valeur à la précédente, il vient simplement

$$-\frac{VdV}{dz} = \frac{V^2}{R}.$$

Divisant par V et remarquant que $dz = dR$, nous trouvons

$$\frac{V}{R} + \frac{dV}{dR} = 0 \quad \text{ou} \quad RdV + VdR = 0 ;$$

d'où

$$VR = V\,(R_0 + z - \varepsilon) = \text{const.}$$

Appelons V_0 la vitesse du filet inférieur, V_1 celle du filet supérieur, h l'épaisseur de la lame déversante mesurée dans la section contractée, cette équation donne

$$V_0 R_0 = V_1 (R_0 + h).$$

Mais, si nous admettons que l'écoulement ait lieu à l'air libre, la pression sur les filets extrêmes, dont les vitesses sont V_0 et V_1, n'est autre chose que la pression atmosphérique, et, en appliquant à ces filets l'équation de Bernoulli ci-dessus, et y faisant disparaître la lettre p qui y représente l'excès de la pression sur celle de l'atmosphère, nous avons, en remarquant que $z = \varepsilon$ pour le filet inférieur et $\varepsilon + h$ pour le filet supérieur :

$$V_0 = \sqrt{2g(H - \varepsilon)}, \qquad V_1 = \sqrt{2g(H - \varepsilon - h)}$$

Appelons, pour abréger, k le rapport des vitesses $\frac{V_1}{V_0}$, nous aurons :

$$k = \frac{V_1}{V_0} = \frac{R_0}{R_0 + h} = \frac{\sqrt{2g(H - \varepsilon - h)}}{\sqrt{2g(H - \varepsilon)}} = \frac{\sqrt{H - \varepsilon - h}}{\sqrt{H - \varepsilon}},$$

d'où nous déduirons :

$$R_0 = \frac{kh}{1-k}, \quad 1 - k^2 = \frac{h}{H-\varepsilon}, \quad R_0 = k(1+k)(H-\varepsilon);$$

ce qui nous donnera la vitesse V d'un filet quelconque à la hauteur z :

$$V = \frac{V_0 R_0}{R} = \sqrt{2g(H-\varepsilon)}\ \frac{R_0}{R_0+z-\varepsilon},$$

et par suite le débit q, par unité de longueur du déversoir :

$$q = \int_\varepsilon^{h+\varepsilon} V dz = R_0 \sqrt{2g(H-\varepsilon)} \int_\varepsilon^{h+\varepsilon} \frac{dz}{R_0+z-\varepsilon} = R_0\sqrt{2g(H-\varepsilon)}\ \text{Log}\frac{R_0+h}{R_0};$$

ou bien, en mettant pour R_0 sa valeur en fonction de k :

$$q = \sqrt{2g}\,(H-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}\,(k+k^2)\ \text{Log}\ \frac{1}{k}.$$

Ce débit est ainsi exprimé en fonction de k, quantité qui est elle-même fonction de l'épaisseur h de la lame déversante, et, d'après ce qui vient d'être dit, cette épaisseur se règle de manière que le débit soit maximum. Or, la valeur de k qui rend maximum la fonction $(k+k^2)$ Log. $\frac{1}{k}$ est fournie par l'équation :

$$(1+2k)\ \text{Log}\frac{1}{k} - (1+k) = 0;$$

qui, résolue, donne $k = 0,46854...$ et par suite :

$$h = 0,7805\,(H-\varepsilon),$$

$$q = 0,5216\,\sqrt{2g}\,(H-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

$$q = 0,5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}.\ H\sqrt{2gH} = mH\sqrt{2gH},$$

en désignant par m le coefficient :

$$m = 0,5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or les observations de M. Bazin ont montré que le relèvement ε de la partie inférieure de la nappe déversante était sensiblement proportionnel à H et en était, en moyenne, les 0,13. On a ainsi $1 - \frac{\varepsilon}{H} = 0,87$. La valeur théorique de m serait ainsi $0,5216 \times (0,87)^{\frac{3}{2}} = 0,423$. Les expériences de MM. Poncelet et Lesbros ainsi que celles de M. Bazin ont donné pour la valeur de ce coefficient des nombres variant de 0,39 à 0,44. L'accord est donc tout à fait satisfaisant [1].

Dans la plupart des applications pratiques, et toutes les fois que l'on veut se contenter d'une approximation d'un dixième environ, on peut adopter pour le coefficient m la valeur moyenne 0,40 et écrire simplement la formule du débit, en effectuant le produit $m\sqrt{2g}$:

$$q = 1,77\, H\sqrt{H}. \tag{9}$$

C'est d'après cette formule approximative simplifiée qu'a été calculée la table II à la fin du volume. On va voir, par des exemples de la valeur de m et par des indications sur les li-

1. Toutefois, en serrant la question de plus près, M. Boussinesq a été amené à compléter les formules que l'on vient d'établir et à donner, pour l'écoulement par déversoir en mince paroi, les formules suivantes de deuxième approximation. En désignant par c le rapport $\frac{\varepsilon}{h+\varepsilon}$, il a reconnu que l'on avait

$$k = 0,4685 + 0,2027\, c\,;$$

$$m = 0,5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}(1 - 0,1424\, c^2).$$

et ce coefficient ainsi rectifié s'est accordé de la façon la plus exacte et la plus remarquable avec les expériences plus précises de M. Bazin. Il en a été de même de l'épaisseur h de la lame déversante qui s'est trouvée exactement de 0,668 H comme le donne cette théorie rectifiée que nous nous bornons à indiquer. L'épaisseur h, calculée par la formule de première approximation serait :

$h = 0,7805\, H\,(1 - 0,13) = 0,87 \times 0,7805\, H = 0,679\, H$, au lieu de 0,668 H.

mites entre lesquelles varie ce coefficient, que les résultats de la formule (9) ou de la table II ne doivent être pris qu'à titre de première indication.

52. Déversoirs inclinés. — M. Bazin n'a pas seulement étudié les déversoirs ordinaires, à paroi postérieure verticale, il a aussi observé les circonstances de l'écoulement sur des déversoirs dont la paroi postérieure est inclinée vers l'aval (fig. 37) ou vers l'amont (fig. 38), et les résultats de ces obser-

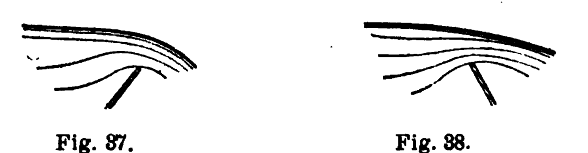


Fig. 37. Fig. 38.

vations ont confirmé la formule donnée par M. Boussinesq, $m = 0{,}5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}$, tant que l'inclinaison vers l'aval n'atteint pas $\frac{1}{2}$ (un de hauteur pour 2 de base) ; mais alors l'écoulement n'a plus lieu en mince paroi, la veine liquide reste en contact avec le plan incliné qui constitue la paroi d'amont du barrage et le rapport $\frac{\varepsilon}{H}$ devient très petit. Au contraire, si la paroi postérieure est inclinée vers l'amont comme dans la fig. 38, le rapport $\frac{\varepsilon}{H}$ augmente. La théorie de M. Boussinesq lui assigne la valeur limite 0,20. M. Bazin a pu faire croître ce rapport jusqu'à 0,19 en armant la crête de ses déversoirs de plaques disposées de manière à rejeter vers l'amont les filets fluides ; l'écoulement est alors fort tourmenté et la nappe liquide violemment agitée. La valeur expérimentale du coefficient m concorde parfaitement, dans toute cette étendue, avec celle que donne la formule.

Voici les valeurs qui ont été trouvées pour le rapport $\frac{\varepsilon}{H}$:

	Inclinaison vers l'amont			Paroi postérieure verticale	Inclinaison vers l'aval[1]			
	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$		$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\varepsilon}{H}$ =	0,159	0,150	0,136	0,112	0,089	0,061	0,041	0,015

Il en résulte, pour le coefficient m, les valeurs suivantes :

m=0,402 | 0,409 | 0,419 | 0,437 | 0,454 | 0,470 | 0,490 | 0,511

58. Influence de la hauteur du déversoir. — Ces résultats ont été obtenus sur un déversoir faisant saillie de 1m13 sur le fond du canal d'amont et avec des charges H variant de 0m10 à 0m45. La formule de M. Boussinesq suppose que la profondeur CD, en amont du déversoir, (fig. 39) que M. Bazin a désignée par p, est indéfinie, et il est intéressant de savoir comment cette dimension peut influer sur le coefficient m.

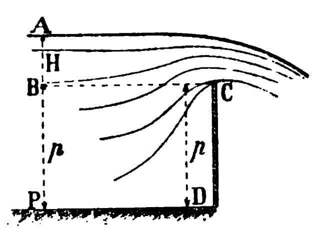


Fig. 39.

M. Bazin a fait, dans ce but, des expériences dans lesquelles la profondeur p était inférieure à 1m13 et s'abaissait jusqu'à 0,35 et même à 0,24 ; il a constaté que le débit, toutes choses égales d'ailleurs, augmentait à mesure que cette profondeur diminuait, ou, ce qui revient au même, à mesure que le rapport $\frac{H}{p}$ augmentait. Ce résultat était prévu. La théorie exposée plus haut, dans l'hypothèse d'une profondeur p indéfinie, suppose que la vitesse des molécules fluides est nulle en amont du déversoir ; or, la hauteur de la surface libre au-dessus du fond étant $H+p$, ces molécules y sont, en réalité, animées d'une vitesse moyenne $\frac{q}{H+p}$ d'autant plus grande que p est plus petit. Si l'on appelle U cette vitesse moyenne, on peut en

1. Voir, pour plus de détails, les comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences du 17 juin 1889, tome CVIII, page 1233, et surtout les *Annales des ponts et chaussées*, 1890, 1er semestre, page 9.

tenir compte, dans le calcul du débit du déservoir, en admettant qu'elle a pour effet d'augmenter la charge H d'une quantité proportionnelle à $\frac{U^2}{2g}$ et l'on peut même prévoir que l'augmentation de la charge sera probablement plus grande que $\frac{U^2}{2g}$, car les filets liquides qui passent sur le déservoir sont surtout ceux qui étaient primitivement à la partie supérieure de la section d'amont et ils avaient une vitesse plus grande que la vitesse moyenne U. Si l'on admet, ce qui sera justifié plus loin, que la vitesse superficielle soit à peu près les $\frac{5}{4}$ de la vitesse moyenne, l'augmentation de charge correspondant à cette vitesse serait $\frac{(1,25\,U)^2}{2g}$ soit environ $1,56\,\frac{U^2}{2g}$, et alors, en désignant par α ce coefficient numérique valant à peu près 1,56, et par μ la valeur spéciale du coefficient m pour ce cas particulier, la formule du débit d'un déversoir serait

$$q=\mu\left(H+\alpha\frac{U^2}{2g}\right)\sqrt{2g\left(H+\alpha\frac{U^2}{2g}\right)},$$

ou bien

$$q=\mu H\sqrt{2gH}\left(1+\alpha\frac{U^2}{2gH}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou bien encore lorsque, comme il arrive presque toujours, $\frac{U^2}{2gH}$ est une très petite fraction :

$$q=\mu H\sqrt{2gH}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\frac{U^2}{2gH}\right).$$

Cette formule, en posant pour abréger

$$m=\mu\left(1+\frac{3}{2}\alpha\frac{U^2}{2gH}\right),$$

prend la forme générale donnée précédemment

$$(10)\qquad q=mH\sqrt{2gH}.$$

Des expériences faites en Amérique par MM. Fteley et Stearns, par le général Ellis, par M. Francis et d'autres observateurs, et discutées par M. Smith dans son ouvrage déjà cité ont conduit ce dernier à proposer pour α des valeurs variant de 1,33 à 1,40 ; mais les nombreuses et très précises expériences de M. Bazin[1] lui ont montré que le coefficient devait avoir, en moyenne, la valeur $\frac{5}{3} = 1,667$. La différence est peu importante en pratique, car $\frac{U^2}{2gH}$ dépasse rarement quelques centièmes.

L'usage de la formule précédente suppose connue la vitesse U et par suite le débit q, lequel au contraire est souvent ce que l'on cherche à déterminer. Il y a donc intérêt à l'éliminer, ce que l'on peut faire en portant dans l'expression $\frac{U^2}{2gH}$ la valeur de U en fonction de q ; cela donne

$$\frac{U^2}{2gH} = \frac{q^2}{2gH(H+p)^2} = m^2\left(\frac{H}{H+p}\right)^2,$$

ou, en appelant K un nouveau coefficient égal à $\frac{3}{2}\alpha\, m^2$:

$$m = \mu\left[1 + K\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right].$$

Les expériences de M. Bazin l'avaient conduit à adopter pour K la valeur moyenne 0,55. M. Boussinesq, par une analyse dont on trouvera le résumé aux comptes rendus des séances de l'Académie des sciences des 17 et 24 septembre 1888 a été conduit à poser, pour un déversoir vertical $K = 0,42$[2]. D'autre part le coefficient μ est celui qui avait été précédemment dé-

1. *Annales des ponts et chaussées*, 1888, 2e trimestre, page 393.

2. Si l'on remarque que $K = \frac{3}{2}\alpha m^2$ et que α, d'après M. Bazin est à peu près $\frac{5}{3}$, comme m vaut environ 0,41, ce nouveau coefficient K doit valoir $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \times \overline{0,41}^2 = 0,42$.

signé par m, dans le cas d'une vitesse d'amont nulle et il est lié au relèvement ε par la relation $\mu = 0{,}5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}$; de sorte que le coefficient pratique à adopter, pour calculer le débit d'un déversoir, par la formule (10)

$$q = m\,H\sqrt{2gH},$$

est en définitive :

$$(11) \qquad m = 0{,}5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + 0{,}42\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right].$$

Il reste, dans cette formule, la quantité ε dont le mesurage ne peut pas s'opérer facilement. Dans les expériences de M. Bazin, le rapport $\frac{\varepsilon}{H}$ a varié, pour un déversoir vertical, depuis 0,097 lorsque p était égal à 0,35 jusqu'à 0,112 pour $p = 1{,}13$. Lorsque p est grand, ce rapport est à peu près indépendant de la charge H ; mais, déjà pour la valeur $p = 0{,}35$, on voit qu'il diminue progressivement quand le rapport $\frac{H}{p}$ va en croissant. Et ce fait a été constaté non seulement pour le déversoir vertical, mais encore pour tous ceux dont l'inclinaison était dirigée vers l'amont. On comprend, en effet, que l'augmentation du rapport $\frac{H}{p}$, par la diminution proportionnelle de la profondeur p, correspond à une vitesse d'arrivée plus grande qui a pour effet de s'opposer davantage à la convergence des filets fluides et par suite de diminuer proportionnellement la contraction inférieure mesurée par ε. L'effet contraire peut s'observer dans les déversoirs inclinés vers l'aval. Si la profondeur p y est grande et si l'inclinaison est faible, le courant liquide acquiert une vitesse dirigée suivant cette inclinaison ; cette vitesse s'y ralentit d'une manière sensible par suite du frottement, et elle arrive au sommet suffisamment réduite pour ne pouvoir s'opposer à l'action horizontale des filets supérieurs, laquelle a pour effet de diminuer ε.

Si la profondeur est moindre, la vitesse oblique n'a pas subi l'influence retardatrice du frottement ; elle arrive au sommet du déversoir avec une grandeur à peu près égale à celle des filets horizontaux et s'oppose à leur action. Il en résulte une augmentation proportionnelle du relèvement inférieur ε.

C'est en effet ce que M. Bazin a trouvé : la diminution de $\frac{\varepsilon}{H}$ coïncidant avec l'accroissement du rapport $\frac{H}{p}$, constatée dans les déversoirs verticaux ou inclinés vers l'amont, cesse de se produire dès que l'inclinaison vers l'aval atteint 45 degrés. Lorsque les inclinaisons sont plus faibles, une augmentation de $\frac{H}{p}$ produit une légère augmentation de $\frac{\varepsilon}{H}$.

54. Coefficients de débit. — Jusqu'à ce que les lois de la variation de $\frac{\varepsilon}{H}$ avec le rapport $\frac{H}{p}$ et avec l'inclinaison du déversoir aient pu être établies d'une manière rationnelle, on peut se servir de la formule empirique suivante, donnée par M. Bazin pour le déversoir vertical, et dont les résultats s'accordent très sensiblement avec ceux de ses expériences et par suite avec la formule théorique de la page 106, qui les suit exactement :

$$(12) \qquad m = \left[0{,}405 + \frac{0{,}003}{H}\right]\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right] ;$$

ou bien, chercher, dans le tableau suivant, les valeurs de m déterminées par cette formule[1].

1. Les chiffres de ce tableau varient de 0,40 à 0,50, suivant l'inclinaison du déversoir on doit les multiplier, comme il sera dit au n° 55, par des coefficients de correction pouvant varier de 0,93 à 1,09. Enfin, suivant la forme des lames déversantes, il pourra encore être nécessaire de les multiplier par un autre coefficient correctif s'élevant (n°s 59 et 60) jusqu'à 1,28. La valeur du coefficient m peut donc varier de 0,36 à 0,70, et l'on voit quelle erreur on s'expose à commettre en adoptant simplement les résultats de la formule (9) ou de la table II.

Charges	Valeurs du coefficient *m* pour les hauteurs suivantes du déversoir au-dessus du fond du canal									
H	0m20	0m30	0m40	0m50	0m60	0m80	1m00	1m50	2m00	Infinie.
0m05	0.458	0.453	0.451	0.450	0.449	0.449	0.449	0.448	0.448	0.448
0.06	0.456	0.450	0.447	0.445	0.445	0.444	0.443	0.443	0.443	0.443
0.08	0.456	0.447	0.443	0.441	0.440	0.438	0.438	0.437	0.437	0.436
0.10	0.459	0.447	0.442	0.439	0.437	0.435	0.434	0.433	0.433	0.432
0.12	0.462	0.448	0.442	0.438	0.436	0.433	0.432	0.430	0.430	0.429
0.14	0.466	0.450	0.443	0.438	0.435	0.432	0.430	0.428	0.428	0.427
0.16	0.471	0.453	0.444	0.438	0.435	0.431	0.429	0.427	0.426	0.425
0.18	0.475	0.456	0.445	0.439	0.435	0.431	0.428	0.426	0.425	0.423
0.20	0.480	0.459	0.447	0.440	0.436	0.431	0.428	0.425	0.423	0.421
0.22	0.484	0.462	0.449	0.442	0.437	0.431	0.428	0.424	0.423	0.420
0.24	0.488	0.465	0.452	0.444	0.438	0.432	0.428	0.424	0.422	0.419
0.26	0.492	0.468	0.455	0.446	0.440	0.432	0.429	0.424	0.422	0.419
0.28	0.496	0.472	0.457	0.448	0.441	0.433	0.429	0.424	0.422	0.418
0.30	0.500	0.475	0.460	0.450	0.443	0.434	0.430	0.424	0.421	0.417
0.35	»	0.482	0.465	0.455	0.447	0.437	0.431	0.424	0.421	0.416
0.40	»	0.489	0.472	0.459	0.451	0.440	0.433	0.424	0.421	0.414
0.45	»	0.495	0.477	0.464	0.455	0.442	0.435	0.425	0.421	0.413
0.50	»	»	0.482	0.468	0.459	0.445	0.437	0.426	0.421	0.412
0.60	»	»	0.490	0.476	0.466	0.451	0.441	0.427	0.421	0.409

Les valeurs de *m* données par ce tableau et mises dans la formule :

$$q = mH\sqrt{2gH}$$

feront connaître le débit par unité de longueur d'un déversoir vertical.

55. Corrections à faire subir à ces coefficients. — S'il s'agit d'un déversoir incliné, comme on en rencontre parfois dans les vannages d'usines, dans les hausses mobiles de barrages, etc., il conviendra de multiplier la valeur de *m* donnée dans la table précédente par les coefficients suivants :

Inclinaison vers l'amont			Déversoir vertical	Inclinaison vers l'aval				
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$	»	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0,93	0,94	0,96	1,00	1,04	1,07	1,10	1,12	1,09

On trouvera dans les mémoires de M. Bazin, et en particu-

lier dans celui des *Annales des Ponts et chaussées* 1890, 1[er] semestre, des renseignements détaillés sur la manière dont il a obtenu ces divers coefficients, des représentations à grande échelle de la forme des nappes déversantes pour les diverses inclinaisons, et une étude sur la distribution des vitesses et des pressions dans l'intérieur des nappes libres. Cette étude vérifie très exactement les formules établies par M. Boussinesq.

Le débit q calculé par la formule précédente, et avec les coefficients ainsi déterminés, sera celui de l'unité de longueur de déversoir, en supposant qu'il n'y ait pas de contraction latérale aux extrémités, c'est-à-dire que les joues verticales du déversoir soient exactement dans le plan des parois également verticales du canal d'amont. Bien souvent il n'en est pas ainsi, et le déversoir n'occupe qu'une fraction de la largeur du cours d'eau. Il se produit alors une convergence horizontale des filets liquides, ou une contraction latérale, qui paraît atteindre son maximum lorsque la distance de chacune des joues du déversoir à la rive voisine est au moins égale à trois fois la charge H. L'effet de cette contraction est de diminuer la largeur utile de l'écoulement, de telle sorte que le débit, au lieu d'être exprimé par ql, sera inférieur à ce produit.

Les nombreuses expériences de M. Francis, relatées dans son ouvrage « *Lowell hydraulic Experiments* », publié à New-York en 1868, et qui sont réputées en Amérique comme méritant la plus grande confiance, l'ont autorisé à admettre que l'influence de cette contraction latérale avait pour effet de diminuer la longueur utile d'environ $\frac{1}{10}$ H à chaque extrémité où cette contraction se produit. Par conséquent, le débit d'un déversoir de longueur l, établi de manière que la contraction existe à ses deux extrémités, sera représentée par:

$$(13) \qquad Q = q\left(l - \frac{2H}{10}\right) = m\left(l - 2\frac{H}{10}\right) H\sqrt{2gH}.$$

Si la contraction ne se produit qu'à l'une des extrémités et se trouve supprimée à l'autre, on mettra $\frac{H}{10}$ au lieu de $\frac{2H}{10}$. Ce

mode de réduction ne s'applique, bien entendu, qu'aux déversoirs assez longs pour que H ne soit qu'une fraction de l; elle donnerait un résultat erroné si la longueur l était inférieure à 3 ou 4 fois H[1].

1. Il n'est peut-être pas sans intérêt, ne serait-ce qu'à un point de vue rétrospectif, de rappeler ici comment on arrivait autrefois à établir la formule de l'écoulement par un déversoir et à justifier une valeur voisine de 0,42 pour le coefficient numérique qui y figure.

Imaginons, au-dessus de la crête du déversoir, une mince paroi verticale, dépassant le niveau d'amont et percée, à une hauteur z au-dessus de la crête, d'une fente horizontale infiniment étroite, de hauteur dz. Le volume dq qui s'écoulera par cette fente, d'une longueur horizontale égale à l'unité et considérée comme un orifice en mince paroi, sera, en appelant m_1 le coefficient de contraction correspondant:

$$dq = m_1\, dz \sqrt{2g(H-z)}.$$

Supposons toute la paroi percée d'une infinité de fentes semblables, c'est-à-dire supprimée, ce qui correspond au déversoir, le débit total, en supposant que m_1 soit le même pour toutes les tranches, sera :

$$q = \int^H dq = m_1 \int_0^H dz \sqrt{2g(H-z)} = \frac{2}{3} m_1 H \sqrt{2gH}.$$

Le coefficient m_1, pour un orifice rectangulaire où la contraction est supprimée sur les deux côtés verticaux, aurait une valeur voisine de 0,63 et l'on trouverait ainsi, pour le débit du déversoir en mince paroi:

$$q = 0{,}42 H \sqrt{2gH},$$

c'est-à-dire à très peu près ce que donnent la théorie et les expériences.

Pour estimer, par un raisonnement analogue, l'influence de la vitesse d'amont, que nous avons désignée plus haut par U, appelons H_1 la hauteur due à cette vitesse U, c'est-à-dire posons:

$$\frac{U^2}{2g} = H_1 \quad \text{ou} \quad U = \sqrt{2gH_1},$$

Nous pouvons admettre, approximativement, que la vitesse du liquide qui s'écoule à travers chacune des fentes élémentaires de hauteur dz, que l'on suppose percées dans la paroi fictive surmontant le déversoir, est due à la charge réelle $(H-z)$ augmentée de cette charge H_1 due à la vitesse moyenne d'amont U; le débit élémentaire se trouverait alors exprimé par:

$$dq = m_1 dz \sqrt{2g(H-z+H_1)},$$

56. Profil d'un cours d'eau en amont d'un déversoir. — De tous les faits expérimentaux qui ont servi à établir les résultats théoriques et pratiques qui viennent d'être rappelés, je me bornerai à citer une seule observation faite en 1883 par M. Clemens Herschel, ingénieur de la Water Power Company de Holyoke, Massachusetts, sur la rivière Connetticut passant par dessus le barrage de Holyoke. La forme de la courbe affectée par la surface libre était celle que présente le croquis ci-dessous (fig. 40).

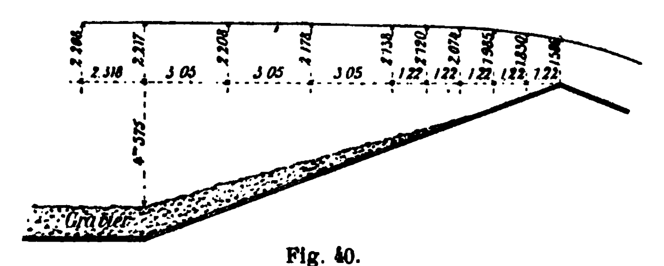


Fig. 40.

et le débit total par :

$$q = m_1 \int_0^H dz \sqrt{2g(H - z + H_1)} = \frac{2}{3} m_1 \sqrt{2g} \left[(H + H_1)^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right]$$

Cette formule, ainsi établie, a été adoptée par M. Francis et s'est trouvée d'accord avec ses expériences.

On peut, en adoptant l'approximation indiquée dans la note de la page 67, remplacer la différence des puissances $\frac{3}{2}$ par une expression plus simple et écrire :

$$q = m_1 \sqrt{2g} \left[H \sqrt{\frac{H}{2} + H_1} \right] = \frac{m_1}{\sqrt{2}} H \sqrt{2g(H + 2H_1)};$$

et, comme l'on a à peu près :

$$H \sqrt{H + 2H_1} = H \sqrt{H} \left(1 + \frac{H_1}{H} \right),$$

et que $\frac{m_1}{\sqrt{2}}$ vaut à peu près 0,44, on arrive à la formule :

$$q = 0{,}44 \, H \sqrt{2gH} \left(1 + \frac{U^2}{2gH} \right);$$

c'est-à-dire à la formule donnée dans le texte, page 104, mais avec un coefficient numérique différent pour $\frac{U^2}{2gH}$.

La surface libre présente son élévation maximum à quinze mètres environ en amont de la crête du déversoir, au-delà, elle s'abaisse un peu ; en-deçà, au contraire, en s'approchant de la crête, son abaissement suit une loi bien régulière. Le barrage dont il s'agit, en bois, a environ 360 mètres de longueur. C'est, à ma connaissance, la seule observation qui ait été faite sur une aussi grande échelle[1]. L'épaisseur de la lame déversante est d'environ les 0,72 de la hauteur H.

Les expériences montrent que la hauteur H devient difficile à mesurer exactement lorsqu'elle est inférieure à 0m.04 ou 0m.05; les résultats expérimentaux présentent alors des divergences nombreuses qu'il faut attribuer aux erreurs d'observation. Il est donc prudent, lorsque l'on cherche des résultats exacts, de ne pas se servir, pour mesurer le débit, de déversoir dans lequel la charge H serait inférieure à 0 m. 05 ; il est préférable, toutes les fois que cela est possible, de limiter cette dimension à 0 m. 10 au moins.

§ 6.

ETUDE DES NAPPES DÉVERSANTES

57. Formes diverses des nappes déversantes. — Lorsque la veine qui s'écoule par dessus un déversoir est exactement comprise entre des parois étanches, de telle manière que l'air ne puisse pénétrer au-dessous, les molécules d'eau, dans leur mouvement, entraînent peu à peu l'air qui se trouve enfermé en avant du déversoir ; lorsque la plus grande partie de cet air a été ainsi enlevée, la veine se trouve poussée contre la paroi d'aval du déversoir et y reste appliquée par la pres-

1. Elle est relatée dans l'ouvrage déjà cité de M. Hamilton Smith.

sion atmosphérique. Mais la diminution de pression, qui s'est produite ainsi à la partie inférieure, a pour conséquence d'augmenter, dans une proportion notable, le débit du déversoir. Ce phénomène, qui avait déjà été observé auparavant, a fait l'objet de la part de M. Bazin d'expériences dont il a rendu compte dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1891. Voici comment il en résume les résultats, pour un déversoir de 0 m. 75 de hauteur établi dans un canal rectangulaire dont les parois verticales se continuaient sans interruption en aval comme en amont du déversoir.

Si l'on commence par un faible débit et si on l'augmente progressivement, les transformations successives de la nappe déversante comprennent trois périodes distinctes :

58. Nappes déprimées. — 1° Petites charges, jusqu'à 0^m235. — Il reste, sous la nappe, un certain volume d'air dont la pression est inférieure à celle de l'atmosphère. L'eau d'aval s'élève sous la nappe au-dessus de son niveau dans le canal de fuite ; en même temps, l'excès de pression sur la face externe de la nappe la rapproche du barrage (fig. 41). Ces deux effets croissant avec la charge, la nappe se déprime en s'écartant peu

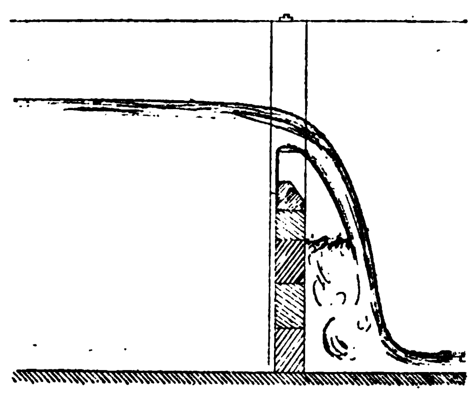


Fig. 41.

à peu de la forme plus allongée qu'elle affecte lorsque sa face inférieure est librement soumise à la pression atmosphérique.

M. Bazin lui donne, par suite, le nom de nappe *déprimée*, réservant celui de nappe *libre* à celle sous laquelle l'accès de l'air est librement assuré, cas auquel se rapportent les valeurs des coefficients numériques données précédemment.

Ce changement de forme de la nappe est accompagné d'une augmentation graduelle du coefficient de débit, et si l'on représente par m celui de la nappe libre, le nouveau coefficient, que nous appellerons m', varie depuis $m' = m$ pour les très petites charges jusqu'à $m' = 1{,}08m$ pour la charge limite $H = 0^m235$.

59. Nappes adhérentes. — 2° Charges comprises entre 0^m210 et 0^m295. — En approchant de la charge 0^m235, l'élimination de l'air s'achève rapidement, et la nappe subit tout à coup une modification des plus remarquables. Son pied se retire vers le barrage au point de passer en arrière du plan vertical correspondant à sa partie supérieure (fig. 42 et 43);

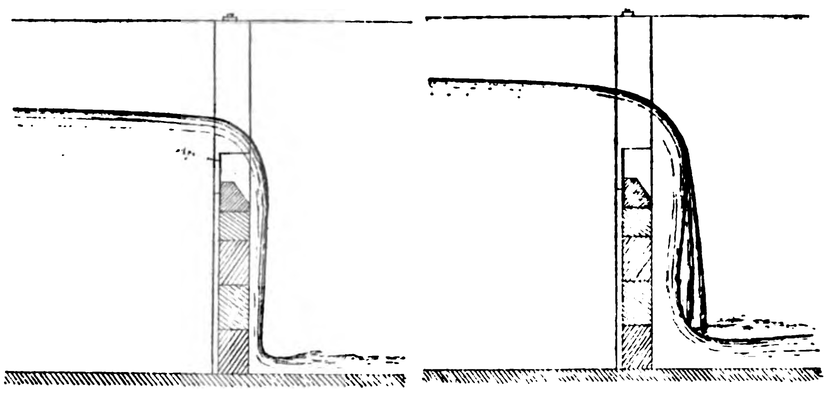


Fig. 42. Fig. 43.

sa surface devient verticale et se couvre de cannelures imitant les plis d'une draperie (fig. 44 et 45); en même temps, le coefficient m' passe de $1{,}08\ m$ à $1{,}28\ m$. Cette augmentation énorme donne lieu à un abaissement du niveau d'amont qui, par le seul effet du changement de forme de la nappe et sans que

le débit ait été modifié, s'abaisse de 0m235 à 0m210. On observe donc, en franchissant le point de passage, ce fait singulier qu'une petite augmentation de débit amène un abaissement très notable du niveau en amont du barrage.

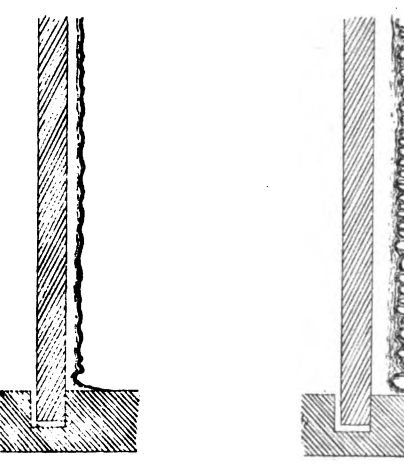


Fig. 44. Fig. 45.

M. Bazin désigne cette nouvelle forme sous le nom de nappe *adhérente*. La nappe adhérente, une fois établie, persiste jusqu'à la charge 0m,290 à 0m,295 ; elle se reforme si on la détruit momentanément en introduisant de l'air en arrière. Le coefficient m' reste lui-même presque constant et égal à 1,28 m jusqu'à ce que l'on atteigne un deuxième point de transformation.

60. Nappes noyées en dessous. — 3° Charges supérieures à 0m310. — En approchant de la limite H = 0m,295, la nappe adhérente devient instable et fait place à une forme plus allongée bien connue : c'est la nappe noyée en dessous (fig. 46). Le coefficient m' subit en même temps une réduction importante : il redescend de 1,28 m à 1,19 m et, par suite, le niveau en amont du barrage se relève de 0m,295 à 0m,310. Si l'on continue à augmenter le débit, la nappe s'allonge peu à peu tandis que m' décroît lentement ; pour la charge de 0m40 on a $m' = 1,12\,m$.

Tel est l'ensemble des phénomènes observés lorsqu'on élève graduellement la charge de 0m05 à 0m40. Si ensuite on diminue le débit de manière à repasser en sens inverse par

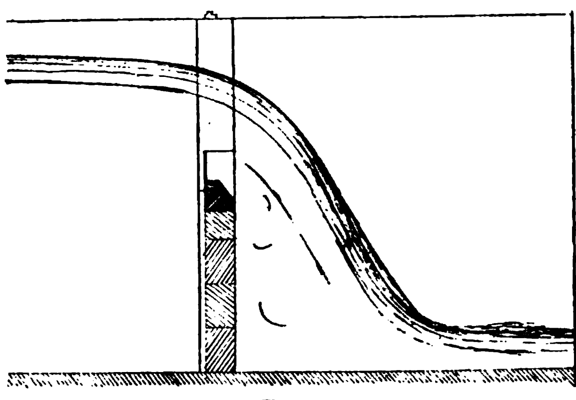


Fig. 46

les mêmes états, on voit bien la nappe noyée en dessous faire place à la nappe adhérente qui reparaît à la charge limite correspondante, mais celle-ci persiste jusqu'aux plus petites charges à moins qu'on n'y introduise de l'air ; alors la nappe déprimée précédemment décrite se reproduit dans les conditions indiquées. On peut également, avec des débits croissants, obtenir la nappe adhérente dès les plus petites charges en procédant avec quelque précaution et en augmentant le débit sans secousse. La série des coefficients pour cette forme de nappes doit donc s'étendre jusqu'aux plus faibles charges. D'un autre côté, le point de passage de l'une à l'autre des deux formes (adhérente ou noyée) n'est pas absolument déterminé ; aux environs de ce point, elles peuvent exister toutes deux pour un même débit et la substitution d'une forme à l'autre, entre certaines limites du débit, s'opère quelquefois subitement et sans cause visible. Ce point de passage correspond à peu près à une charge H égale aux quatre dixièmes de la hauteur du déversoir mesurée au-dessus du niveau d'aval. Quant à la valeur du coefficient m', son rapport au coefficient m de

la nappe libre varie peu avec la hauteur du déversoir, et pour les nappes adhérentes ce rapport est compris entre 1,20 pour les très petites charges et 1,28 pour les charges voisines de celles où la nappe se transforme en nappe noyée.

M. Bazin a mesuré aussi la pression sous les nappes déprimées ou adhérentes. Il a trouvé que la différence entre cette pression et celle de l'atmosphère, qu'il appelle la non-pression et qu'il désigne par P_0, augmente avec la charge. Le rapport $\frac{P_0}{H}$ varie de 0,72 pour la charge de $0^m,05$ à 1,77 pour la charge 0^m25. Il atteint alors son maximum, qui correspond à peu près à la charge limite à partir de laquelle la nappe adhérente se transforme en nappe noyée en dessous.

61. Nappes adhérentes modifiées par une retenue d'aval. — Dans les expériences qui viennent d'être citées, l'écoulement était libre en aval ; la nappe, après avoir atteint le fond du canal, s'y étalait en un rapide au-delà duquel se formait, à une distance plus ou moins grande de son pied, un ressaut (voir ci-après n° 67) ramenant le plan d'eau à sa hauteur normale. C'est dans ces conditions qu'a été déterminé le point de transformation de la nappe adhérente en nappe noyée en dessous. Mais si on relève par une retenue le niveau d'aval, la transformation de la nappe peut, moyennant un relèvement convenable de ce niveau, s'opérer à une charge quelconque. Par exemple, dans le déversoir de 0^m75, l'écoulement étant libre et la lame d'eau qui forme le rapide au pied de la nappe n'ayant qu'une faible épaisseur, la transformation a lieu lorsque la charge est de 0^m29.

Si on relève peu à peu le niveau d'aval, le point de transformation se déplace progressivement et la nappe noyée en dessous paraît plus tôt, c'est-à-dire pour une charge moindre. Le champ de la nappe adhérente se réduit successivement et, en même temps, le coefficient de débit qui lui est propre diminue, à mesure que le niveau d'aval se rapproche de la crête

du déversoir. Il existe ainsi, pour chaque valeur du débit, une limite supérieure du niveau d'aval au-dessus de laquelle la nappe noyée est seule possible ; mais si, après avoir légèrement dépassé cette limite A (fig. 47) et produit la transformation de la nappe, on arrête le mouvement ascendant du plan d'eau d'aval et qu'on l'abaisse de nouveau peu à peu, la nappe adhérente ne reparaîtra pas immédiatement ; il faudra, pour la reproduire, redescendre à un niveau A′ inférieur au niveau A.

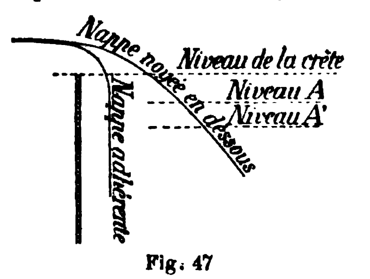


Fig. 47

Au-dessous de cette nouvelle limite A′, la nappe adhérente sera seule possible et, dans l'intervalle AA′, on pourra, suivant le sens dans lequel a varié le plan d'eau d'aval, obtenir à volonté l'une ou l'autre des deux formes. Il existe donc une sorte d'inertie en vertu de laquelle une forme de nappe, une fois constituée par la modification progressive d'une des données de l'écoulement, subsiste lors même que l'on réduit, dans une certaine mesure, l'importance de la modification qui l'avait fait apparaître. On comprend du reste, dit M. Bazin, qu'il doive en être ainsi ; au changement de forme de la nappe correspond dans son intérieur une nouvelle répartition des vitesses et des pressions, et le passage subit d'un état à l'autre exige l'intervention d'une action extérieure dont l'intensité ne saurait être négligeable.

Cette observation est générale et s'applique à tous les changements de régime qui peuvent être constatés dans l'écoulement des liquides. La limite à laquelle s'effectue la transformation n'est pas la même suivant qu'elle se produit dans un sens ou dans l'autre. Il existe toujours une zône mixte dans laquelle les deux régimes sont possibles et dans laquelle continue à se produire celui qui existait avant que les conditions de l'écoulement n'aient été modifiées de manière à correspondre à la zône dont il s'agit.

62. Barrages noyés. — Si le déversoir est noyé, c'est-à-dire si le niveau d'aval est plus haut que le seuil, en désignant par H′ la hauteur de ce niveau au-dessus du seuil, on emploie souvent, pour calculer le débit par unité de longueur, la formule empirique suivante due à Lesbros :

$$q = m\mathrm{H}\sqrt{2g(\mathrm{H}-\mathrm{H}')},$$

dans laquelle il faut attribuer à m une valeur de 0,48 environ. Mais cette formule semble donner des résultats moins exacts que celle de Du Buat :

$$q = m\left(\mathrm{H}+\frac{\mathrm{H}'}{2}\right)\sqrt{2g(\mathrm{H}-\mathrm{H}')},$$

avec la valeur 0,40 à 0,42 pour le coefficient m, comme dans les déversoirs libres. Il est difficile, pour l'une comme pour l'autre, d'en justifier théoriquement la forme, d'autant plus qu'elle ne tient aucun compte d'un élément, cependant essentiel, de la question, la saillie du déversoir sur le fond du canal. Bresse a traité la question théoriquement pages 262 et suivantes de son traité d'hydraulique, mais il arrive à des équations de degré supérieur en q, qui ne sont pas susceptibles d'être résolues analytiquement d'une manière générale.

§ 7

APPLICATION DES FORMULES

63. Temps nécessaire à la vidange d'un réservoir par un orifice inférieur. — Considérons un réservoir AB (fig. 48) percé à sa partie inférieure d'un orifice CD dont nous appellerons la section ω. Supposons que ce réservoir ait une section horizontale constante et égale à A et qu'il soit rempli d'eau jusqu'à une hauteur h au-dessus de cet orifice. Admettons encore que la section A soit assez grande par rapport à ω pour que les vitesses des molécules liqui-

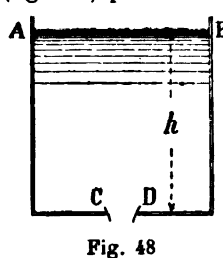


Fig. 48

des à l'intérieur du réservoir soient toujours négligeables. Lorsque la hauteur h sera devenue z, la vitesse d'écoulement, dans cette hypothèse, sera $\sqrt{2gz}$, le volume d'eau écoulé pendant l'unité de temps $m\omega\sqrt{2gz}$, et pendant le temps dt le produit de cette quantité par dt. Ce produit mesure ainsi le volume d'eau sorti du réservoir pendant le temps dt, et si dz désigne l'accroissement (négatif) de la hauteur z pendant le même temps, ce même volume aura pour expression $-\mathrm{A}dz$. Egalant ces deux expressions, nous trouvons l'équation :

$$m\omega\sqrt{2gz}\,dt = -\mathrm{A}dz,$$

ou bien

$$-\frac{m\omega}{\mathrm{A}}\sqrt{2g}\,.\,dt = \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Intégrons et supposons que le temps t soit compté depuis l'époque où l'écoulement a commencé, ou que $z = h$ pour $t = 0$, nous obtenons

$$\frac{m\omega}{\mathrm{A}}\sqrt{2g}\,t. = 2\sqrt{h} - 2\sqrt{z}.$$

Cette équation fera connaître le temps nécessaire pour que le niveau atteigne une hauteur z quelconque au-dessus du fond. Si nous cherchons le temps T nécessaire à la vidange complète, il faut faire $z = 0$, ce qui donne :

$$\frac{m\omega}{\mathrm{A}}\sqrt{2g}\,.\,\mathrm{T} = 2\sqrt{h},$$

ou bien, en appelant B le volume $\mathrm{A}h$ du réservoir :

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}}{mg\omega}\sqrt{2gh} = \frac{2\mathrm{A}h}{m\omega\sqrt{2gh}} = 2\,\frac{\mathrm{B}}{m\omega\sqrt{2gh}}.$$

Cette durée totale T est ainsi exactement double de celle qui serait nécessaire si la vitesse d'écoulement restait constamment égale à ce qu'elle est au commencement, lorsque le réservoir est plein.

On trouve un résultat absolument identique lorsque l'on calcule le temps nécessaire au remplissage d'un réservoir, tel

qu'un sas d'écluse, par un orifice inférieur alimenté par un bassin dans lequel le niveau se maintient constant et que l'on cherche la durée du remplissage total, c'est-à-dire jusqu'au moment où le niveau dans le sas atteint celui du bief alimentaire.

61. Cas où le réservoir est prismatique triangulaire ou pyramidal. — Nous avons supposé A constant, mais le même calcul s'appliquerait, avec une approximation à peu près égale, si A était variable en fonction de la hauteur z.

L'équation différentielle serait alors :

$$- m\omega\sqrt{2g} \,.\, dt = A \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot$$

A étant une fonction donnée de z l'intégration s'effectuerait par quadrature et l'on aurait :

$$m\omega\sqrt{2g} \,.\, t = \int_z^h A \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot$$

Si, par exemple, le réservoir a la forme d'un prisme triangulaire à arêtes horizontales, dont la section horizontale supérieure, à la hauteur h, soit appelée A_0, la section A à une hauteur z quelconque sera le produit de A_0 par le rapport $\frac{z}{h}$, ou bien $A = \frac{A_0}{h} z$; on obtient :

$$m\omega\sqrt{2g} \,.\, t = \frac{A_0}{h} \left[\frac{2}{3} h \sqrt{h} - \frac{2}{3} z \sqrt{z} \right] \cdot$$

et la durée totale T de l'écoulement jusqu'à $z = 0$ serait, en remarquant qu'alors le volume B du réservoir est égal à $\frac{A_0 h}{2}$:

$$T = \frac{2}{3} \frac{A_0 \sqrt{h}}{m\omega\sqrt{2g}} = \frac{4}{3} \frac{B}{m\omega\sqrt{2gh}} \cdot$$

De même, si le réservoir a la forme d'une pyramide dont le sommet soit à l'orifice, de telle sorte que $A = \frac{A_0 z^2}{h^2}$, on obtient :

$$m\omega\sqrt{2g} \,.\, t = \frac{A_0}{h^2} \left[\frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} - \frac{2}{5} z^2 \sqrt{z} \right],$$

et, en remarquant que le volume B est alors égal à $\frac{A_0 h}{3}$:

$$T = \frac{2}{3} \frac{A_0 \sqrt{h}}{m\omega\sqrt{2g}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{B}{m\omega\sqrt{2gh}}.$$

65. Temps nécessaire à la vidange par un déversoir. —Mais le résultat est tout autre si l'on suppose que le réservoir se vide par un déversoir. Soit toujours un réservoir AB (fig. 49) dont la section horizontale constante est égale à A, présentant, dans une de ses parois, une coupure C d'une largeur l, formant déversoir et située à une profondeur h au-dessous du niveau primitif. Cherchons le temps nécessaire pour que ce niveau s'abaisse jusqu'à la crête C de ce déversoir, en faisant la même hypothèse que précédemment, c'est-à-dire en admettant que les vitesses des molécules fluides dans la partie ABCD sont toujours négligeables. Lorsque le niveau AB ne sera plus qu'à une hauteur z au-dessus de la crête, le débit du déversoir par unité de temps sera $mlz\sqrt{2gz}$, et le volume écoulé pendant le temps dt sera $mlz\sqrt{2gz}\,dt$. Egalant ce volume, comme nous l'avons fait plus haut, au produit $-Adz$ qui exprime la diminution de volume du réservoir due à l'abaissement $-dz$ du niveau de la surface libre, nous obtenons l'équation :

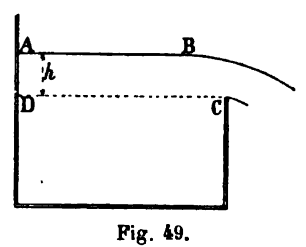


Fig. 49.

$$mlz\sqrt{2gz}\,dt = -Adz,$$

ou bien

$$-\frac{ml}{A}\sqrt{2g}\,.dt = \frac{dz}{z\sqrt{z}}.$$

Intégrons encore depuis l'époque $t = 0$ où $z = h$ jusqu'à une époque t quelconque, nous trouvons

$$\frac{ml}{A}\sqrt{2g}\,.\,t = \frac{2}{\sqrt{z}} - \frac{2}{\sqrt{h}}.$$

Cette équation fera connaître le temps nécessaire pour que le niveau atteigne une hauteur z quelconque au-dessus de la crête du déversoir. Mais si nous cherchons le temps nécessaire à la vidange complète, il faut faire $z = 0$, ce qui donne t infini. Le réservoir ne pourra donc jamais se vider entièrement. Ce résultat paradoxal est dû à ce que nous avons négligé les vitesses des molécules à l'intérieur du réservoir qui, en réalité, sont différentes de zéro et représentent une certaine force vive qui active l'écoulement et le fait se terminer plus tôt que ne l'indique la formule.

Mais il résulte en tout cas de cette formule que la durée de la vidange complète, si elle n'est pas infinie, est très grande, c'est-à-dire qu'au dessous d'une certaine limite le niveau ne s'abaisse plus qu'avec une extrême lenteur. Cette propriété fait du déversoir un ouvrage précieux comme régulateur du niveau des réservoirs à alimentation variable.

On peut d'ailleurs, en mettant des chiffres dans la formule précédente, se rendre compte de la marche progressive de la vidange du réservoir et mettre en évidence le ralentissement qu'elle subit. Si, en vue de faciliter la comparaison, on prend pour unité de temps la durée nécessaire pour que le réservoir se vide aux trois quarts, ou pour que z atteigne la valeur $\frac{1}{4}h$, les temps nécessaires depuis l'origine de l'écoulement pour que le réservoir se vide de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, etc, ou pour que z prenne les valeurs $\frac{9}{10}h$, $\frac{3}{4}h$, etc., sont les suivants :

pour $\frac{z}{h} = 1$	0,9	0,75	0,50	0,25	0,10	0,01	0,001
$t = 0$	0,054	0,156	0,414	1,000	2,162	9,000	30,62

Après un temps trente fois plus long environ que celui qu'il aura fallu pour que le réservoir se vide aux trois quarts, le niveau se sera abaissé de telle manière que la hauteur sur la

crête du déversoir ne sera plus que la millième partie de ce qu'elle était primitivement. Elle sera donc, au bout de ce temps, réduite par exemple à trois dixièmes de millimètre, si elle était au début de 0 m. 30. Elle aura été réduite à la centième partie de sa valeur primitive au bout d'un temps égal à neuf fois celui qui est pris pour unité. On voit donc que si la durée totale de la vidange est, théoriquement, infinie, la durée pratique ou effective est parfaitement limitée.

66. Calcul de la longueur à donner à un déversoir.— Pour calculer la longueur que doit avoir un déversoir comme ouvrage régulateur, il faut connaître la loi suivant laquelle est alimenté le réservoir dont il s'agit de maintenir le niveau et se donner, par des considérations locales, le maximum de hauteur que ce niveau ne doit pas dépasser. Alors, le débit alimentaire Q étant supposé connu en fonction du temps, $Q = f(t)$, si l'on désigne par A comme plus haut l'aire horizontale du réservoir, ou l'aire de la surface libre de l'eau dont le niveau est maintenu par le déversoir, l la largeur cherchée, z la hauteur du niveau au-dessus de la crête à une époque quelconque t; le volume d'eau entré pendant le temps dt sera Qdt, le volume écoulé sera $mlz\sqrt{2gz}\,dt$ et c'est la différence de ces deux volumes qui correspondra à la surélévation dz éprouvée par le niveau pendant le temps dt. On aura ainsi l'équation :

$$Qdt - mlz\sqrt{2gz}\,dt = Adz;$$

et la résolution du problème exigerait alors l'intégration de cette équation différentielle linéaire du premier ordre.

Ordinairement, dans les applications, on suppose Q constant. Le déversoir est calculé pour que, si le débit alimentaire atteint une certaine valeur maximum qu'il conserve pendant un temps donné, le niveau du réservoir ne s'élève pas au-dessus d'un point déterminé. Alors l'intégration se réduit à une quadrature, mais elle conduit encore à une formule bien compliquée, dont l'emploi ne saurait être recommandé [1]. On

1. Si l'on pose pour abréger $y^2 = \frac{ml\sqrt{2g}}{Q} z$, la relation entre t et z est

arrive à une approximation bien suffisante en cherchant quelle est la longueur l nécessaire pour que le déversoir débite le volume alimentaire Q lorsque le niveau atteindra la limite extrême z_1, qu'il ne lui est pas permis de dépasser. On aura ainsi :

$$l = \frac{Q}{mz_1\sqrt{2gz_1}};$$

et l'on sera certain que la hauteur de l'eau au-dessus du déversoir n'atteindra jamais la limite z_1 ; il faudrait pour cela que le débit maximum Q se maintint pendant une durée infinie. Le niveau s'approchera d'autant plus de la limite z_1, que le débit maximum Q aura duré plus longtemps; il restera au contraire d'autant plus au-dessous que le débit maximum aura été plus éphémère.

§ 8

RESSAUT

67. Ressaut superficiel. — Il arrive quelquefois qu'un courant d'eau s'écoulant dans un lit prismatique régulier présente sur une très faible longueur une brusque variation de niveau. Ce phénomène, désigné sous le nom de *ressaut* superficiel, a été étudié par divers observateurs, en particulier par Bidone, Darcy, Baumgarten et M. Bazin. Nous allons en faire l'étude théorique et nous verrons plus loin, en traitant de l'écoulement dans les cours d'eau, dans quelles circonstances il se produit.

Soient, sur un cours d'eau prismatique, deux sections AB,

donnée par

$$t = \frac{A}{Q}\left[\frac{1}{6}\ \text{Log.}\ \frac{1+y+y^2}{(1-y)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{arc tang.}\ \frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right] + \text{constante.}$$

La constante se déterminerait par les conditions initiales ; la hauteur z à l'époque $t = 0$ par exemple.

CD (fig. 50), de part et d'autre du point où se produit le ressaut, et assez distantes de ce point pour que, dans chacune d'elles, les filets liquides puissent être considérés comme parallèles ; appelons

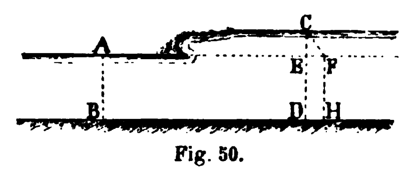


Fig. 50.

Q le débit du cours d'eau, ω_0, ω_1 les superficies des deux sections considérées, U_0, U_1 les vitesses moyennes des filets qui les traversent et i la pente du lit. Nous aurons d'abord :

$$Q = \omega_0 U_0 = \omega_1 U_1.$$

Appelons encore h_0, h_1 les profondeurs AB et CD et supposons que le lit soit, vers la partie supérieure, à peu près rectangulaire et de largeur l, de manière que l'on ait $\omega_1 - \omega_0 = l(h_1 - h_0)$. Ecrivons l'équation d'équilibre dynamique de la masse liquide comprise entre AB et CD. La somme algébrique des projections, sur l'axe du canal, des pressions exercées sur les sections ω_0 et ω_1 est représentée par la surface CDHF obtenue en menant par le point C une ligne CF, inclinée à 45 degrés, jusqu'à sa rencontre en F avec la parallèle au fond du lit menée par le point A, puis la ligne FH parallèle à CD. Cette somme de projections, négative, est donc égale à

$$-\rho g\,[\mathrm{CEF} + \mathrm{EFHD}] =$$

$$-\rho g\left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)(h_1-h_0)\cos i+\omega_0(h_1-h_0)\cos i\right]=-\frac{1}{2}\rho g(\omega_1+\omega_0)(h_1-h_0)\cos i$$

ou bien, en mettant pour $h_1 - h_0$ sa valeur $\frac{\omega_1 - \omega_0}{l}$:

$$= -\frac{1}{2}\rho g \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{l} \cos i.$$

A cette force doit s'ajouter le frottement de la masse dont il s'agit sur les parois du lit, ainsi que la composante du poids de cette masse liquide ; ces deux quantités peuvent être négligées avec une approximation suffisante [1]. Il y a donc à égaler

1. On peut voir, dans l'*Essai sur la théorie des Eaux courantes*, de M.

la somme de projections qui précède à l'accroissement de la quantité de mouvement du liquide pendant l'unité de temps, lequel, si tous les filets liquides avaient la vitesse moyenne U_1 ou U_0, aurait pour expression $\rho Q (U_1 - U_0)$; mais qui, en réalité, est un peu plus grand et peut être représenté par $\rho Q\alpha (U_1 - U_0)$, en appelant α un coefficient qui tient compte de l'inégalité des vitesses des filets liquides (et aussi de l'influence du frottement, comme il vient d'être dit en note). Ecrivant cette égalité et supprimant le facteur commun ρ, on a l'équation :

$$(14) \qquad Q\alpha (U_1 - U_0) = -\frac{g}{2l}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\cos i ;$$

ou bien, en mettant $\frac{Q}{\omega_1}$ au lieu de U_1 et $\frac{Q}{\omega_0}$ au lieu de U_0 :

$$\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}(\omega_1 - \omega_0) = \omega_1 \omega_0 \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2} .$$

On peut diviser les deux membres par $\omega_1 - \omega_0$ ce qui exclut la solution $\omega_1 = \omega_0$, laquelle correspond au mouvement uniforme ou graduellement varié. Il vient alors

$$\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}\omega_0 \omega_1 = \frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i} .$$

68. Conditions nécessaires pour que le ressaut puisse se produire. — Cette équation serait encore vérifiée par $\omega_1 = \omega_0$ si l'on avait $\omega_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}}$. Dans ce cas, le ressaut ne peut pas se produire. Résolue par rapport à ω_1, elle donne deux valeurs, dont l'une, négative, est étrangère à la question ; l'autre est :

Boussinesq, pages 129 et suivantes, comment on pourrait tenir compte du frottement. Cela revient, en somme, à attribuer au coefficient que nous appelons plus bas α, une valeur différente.

$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\alpha Q^2 l}{\omega_0^3 g \cos i}} \right).$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que ω_1 varie en sens inverse de ω_0 : sur un cours d'eau donné, ω_1 sera d'autant plus grand que ω_0 sera plus petit, pour un même débit bien entendu. Ces deux quantités, ω_0, ω_1, sont toujours l'une plus grande et l'autre plus petite que la valeur commune pour laquelle l'équation serait vérifiée. On a donc nécessairement :

$$\text{soit} \quad \omega_1 > \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}} > \omega_0 , \quad \text{soit} \quad \omega_1 < \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}} < \omega_0 ;$$

de sorte que les deux expressions :

$$1 - \frac{\alpha Q^2 l}{\omega_0^3\, g \cos i} \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{\alpha Q^2 l}{\omega_1^3\, g \cos i}$$

sont toujours de signes contraires. On peut vérifier que lorsqu'elles diffèrent peu de zéro elles sont à peu près égales en valeur absolue. Dans le ressaut proprement dit (exhaussement), l'expression $1 - \frac{\alpha Q^2 l}{\omega^3 g \cos i}$ que l'on peut écrire $1 - \frac{\alpha U^2}{g \cos i} \cdot \frac{l}{\omega}$ est négative avant le ressaut (pour $U = U_0$, $\omega = \omega_0$) et positive après (pour $U = U_1$, $\omega = \omega_1$). Le contraire aurait lieu dans le ressaut d'abaissement qui se produit moins fréquemment ou qui a été moins observé que le premier.

69. Distinction des cours d'eau en deux catégories. — Un cours d'eau est dit *tranquille* quand cette expression $1 - \frac{\alpha U^2}{g \cos i} \cdot \frac{l}{\omega}$ est positive, et *torrentueux* quand elle est négative. Dans un cours d'eau, un ressaut d'exhaussement se produit donc lorsqu'une partie tranquille fait suite à une partie torrentueuse.

Plus simplement, on appelle quelquefois *rivières* les cours d'eau tranquilles et *torrents* les autres. Les ressauts d'exhaussement ne peuvent ainsi se produire que dans les torrents qu'ils transforment en cours d'eau tranquilles ou rivières.

70. Perte de charge due au ressaut. — Le ressaut est accompagné d'une perte de charge qu'il est facile de calculer. Si tous les filets liquides traversant la section ω_0 avaient la vitesse moyenne U_0, la hauteur du plan de charge serait $\frac{U_0^2}{2g}$ au-dessus de la surface libre A. Mais la force vive totale du liquide est en réalité un peu plus grande[1], de sorte que si α désigne un coefficient un peu plus grand que l'unité, cette hauteur pourra être exprimée par $\alpha \frac{U_0^2}{2g}$. De même, le plan de charge, dans la section ω_1 serait à une hauteur $\alpha \frac{U_1^2}{2g}$ au-dessus de la surface libre C. S'il n'y avait pas exhaussement de la surface, ou si cet exhaussement pouvait être considéré comme négligeable, la perte de charge serait donc simplement $\frac{\alpha (U_0^2 - U_1^2)}{2g}$. Mais l'exhaussement du niveau, qui a pour valeur $\frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i$ doit être retranché de cette quantité pour donner la perte de charge réelle qui se trouve ainsi être

$$\frac{\alpha (U_0^2 - U_1^2)}{2g} - \frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{2g} (U_1 + U_0) \alpha (U_0 - U_1) - \frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i.$$

1. Ceci a été démontré au nº 23, page 43. Je désigne par la même lettre α des coefficients numériques n'ayant pas la même signification, mais ayant très sensiblement la même valeur. Cela n'a aucun inconvénient dans les applications.

En mettant pour $\alpha(U_0 - U_1)$ sa valeur, $\frac{g}{2Ql}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\cos i$, déduite de l'équation (14), puis, pour $U_1 + U_0$, la valeur égale $\frac{Q}{\omega_1} + \frac{Q}{\omega_0}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\omega_1} + \frac{Q}{\omega_0}\right) \cdot \frac{g}{2Ql}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\cos i - \frac{\omega_1 - \omega_0}{l}\cos i\,;$$

ou bien, en réduisant et simplifiant :

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{l}\cos i\left(\frac{(\omega_1 + \omega_0)^2}{4\omega_1\omega_0} - 1\right).$$

Puis, en remarquant que la parenthèse est égale à $\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{4\omega_1\omega_0}$, nous trouvons enfin, pour l'expression de la perte de charge due au ressaut superficiel :

$$\frac{(\omega_1 - \omega_0)^3}{4\omega_1\,\omega_0 l}\cos i.$$

Lorsque le lit a une pente faible, cos i peut être pris égal à l'unité, et si, en même temps, la section est rectangulaire, on a $\omega_1 = lh_1$, $\omega_0 = lh_0$ et l'expression de la perte de charge devient :

$$\frac{(h_1 - h_0)^3}{4h_1h_0}.$$

C'est sous cette forme simplifiée qu'elle a été calculée la première fois par Bélanger.

71. Exemples de ressauts. — Le phénomène du ressaut, dit M. Bazin[1], très rare dans les cours d'eau naturels, se produit au contraire très fréquemment dans les canaux artificiels à parois régulières et à fortes pentes. Il a été signalé pour la première fois par Bidone[2], mais il s'en faut de beau-

1. *Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts.*
2. *Mémoires de l'Académie de Turin*, 1820.

coup que l'observation de ce phénomène soit susceptible d'autant de précision qu'on pourrait le croire à la lecture de son

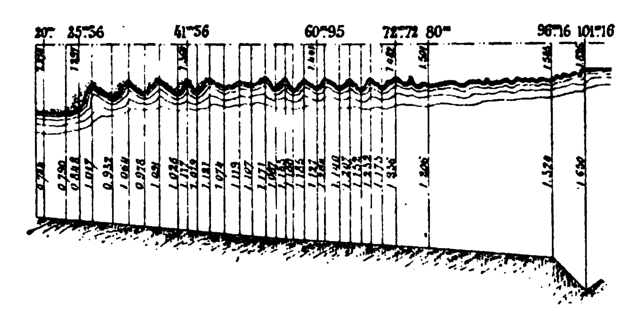


Fig. 51.
Ressaut observé sur le pont aqueduc de Roquefavour (canal de Marseille).

mémoire. Lorsque $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \cdot \frac{l}{\omega}$, qui, dans les canaux rectangulaires, devient $\frac{\alpha U^2}{gh \cos i}$, est peu supérieur à l'unité, le ressaut est fort allongé et présente l'aspect d'une simple contre-pente

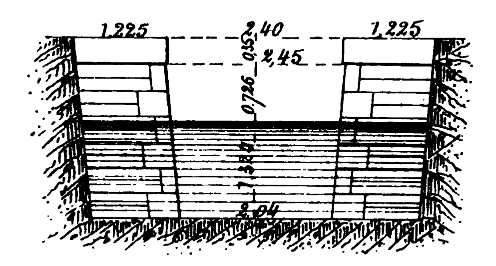


Fig. 52.
Profil en travers du canal, immédiatement après l'extrémité du pont.

couverte d'ondulations. A mesure que cette quantité augmente, on voit le ressaut se raccourcir et l'on finit par obtenir, comme Bidone, un relèvement à peu près subit de la surface. Le ressaut est suivi de fortes ondulations qui rendent impossible tout nivellement exact, mais qui conservent une position à peu près fixe. Dans les deux ressauts remarquables qu'il a observés au pont de Roquefavour et sur le canal de Craponne,

Baumgarten a relevé aussi exactement que possible la distance et la hauteur de ces ondulations, qui se prolongeaient,

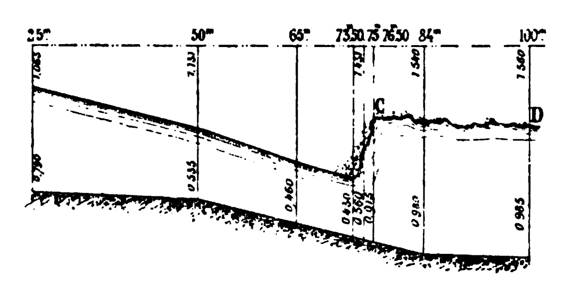


Fig. 53.
Ressaut observé sur le pont aqueduc de Crau (canal de Craponne).

à Roquefavour, sur plus de 50 mètres de longueur (fig. 51). Au pont de Crau, où le ressaut était très violent (fig. 53), ces ondulations étaient extrêmement fortes et beaucoup plus élevées au milieu du canal que sur les bords (fig. 54). Cette remarque est générale : il existe toujours, dans l'axe du courant, une protubérance plus élevée que le long des parois ; le ressaut

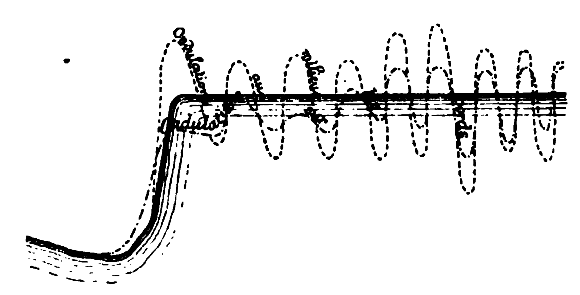


Fig. 54.
Profil en long indiquant le détail des ondes qui suivent le ressaut entre les points C et D, de la figure 53.

lui-même affecte la forme d'un arc dont la concavité est tournée vers l'amont.

Il est donc impossible d'obtenir, au milieu de l'agitation de l'eau, une évaluation exacte de la hauteur du ressaut ; lorsqu'il est bien accusé, c'est-à-dire lorsque $\frac{\alpha U^2}{gh \cos i}$ dépasse 2, il

ne présente plus à l'œil que l'aspect d'une barre d'écume bouillonnant avec violence ; sa hauteur et même sa position dans le canal sont soumises à une fluctuation incessante, au milieu de laquelle on ne peut songer à une mesure précise de la profondeur du courant.

§ 9

TOURBILLONS

72. Étude sommaire des tourbillons liquides. — Nous avons déjà parlé de l'agitation dite tourbillonnaire, ou des mouvements irréguliers, presque toujours gyratoires, qui s'observent dans les courants liquides. Ces tourbillons n'ont, en général, qu'une très faible durée, mais cependant paraissent se reproduire à peu près périodiquement au même lieu, sous l'influence d'une même cause qui, bien que continue ou permanente, produit ainsi des effets intermittents ; ils ne peuvent être étudiés facilement, mais on en tient compte dans toute la mesure possible, eu égard aux ressources actuelles de l'analyse, en substituant, aux vitesses réelles des molécules, les vitesses moyennes locales, définies comme nous l'avons fait plus haut (n° 16, page 30). Ces tourbillons ont souvent leurs axes de gyration horizontaux et ils se présentent sous la forme de rouleaux partant du fond, qui grossissent ou s'élèvent à travers la masse liquide et viennent s'épanouir à la surface. Ceux qui ont leurs axes verticaux persistent plus longtemps, mais se dissipent également à une certaine distance du point où ils ont pris naissance pour reparaître un instant après.

Indépendamment de ces tourbillons, accidentels et irréguliers, il se produit quelquefois, sous l'influence de causes déterminées, des mouvements gyratoires réguliers, permanents,

dans lesquels les molécules liquides décrivent, autour d'un axe sensiblement vertical, des trajectoires à peu près circulaires. Ces mouvements, dont nous allons faire une étude sommaire, sont de deux sortes : ou bien la matière liquide tourbillonnante se renouvelle sans cesse par un écoulement le long de son axe, ou bien elle reste formée des mêmes particules.

73. Tourbillons de première espèce. — Le premier cas se présente dans tout écoulement par un orifice, sous des charges assez peu considérables pour que la surface libre du liquide devienne sensiblement concave, et lorsqu'il existe quelque dissymétrie tendant à produire une rotation de la masse autour d'un axe vertical. Les tourbillons de cette première espèce se produisent dans des réservoirs dont le fond est percé d'un trou, ou bien près des vannes entr'ouvertes d'où l'eau s'échappe par le bas. Ils se produisent encore, par exemple, lorsqu'un coup d'aviron, plongeant à une certaine profondeur et imprimant aux molécules liquides situées à cette profondeur une vitesse plus grande qu'à celles de la surface, tend à former un creux où le liquide de la surface doit descendre pour le remplir.

Dans tous ces cas, l'entonnoir se creuse autour d'un axe vertical et le mouvement est descendant. Considérons, dans un pareil tourbillon, une particule voisine de la surface ; admettons que sa trajectoire soit sensiblement un cercle horizontal de rayon r ; appelons z son ordonnée au-dessus d'un plan horizontal inférieur, V et p la vitesse et la pression de cette particule. Soit p_0 la pression atmosphérique constante, et V_0 la vitesse également constante avec laquelle les molécules fluides arrivent au bord du tourbillon considéré comme limité à un rayon r_0 que rien n'empêche de supposer infini. Si nous regardons le mouvement comme permanent et si nous admettons que la composante verticale w' de l'accélération soit négligeable, la dernière des équations (1) de la page 28, se réduisant

à $\frac{dp}{dz} = -\rho g$, montre que la pression varie, sur une même verticale, suivant la loi hydrostatique. D'après le théorème de Bernoulli, la somme $\frac{p}{\Pi} + z + \frac{V^2}{2g}$ est constante tout le long de trajectoire d'une molécule, et par suite, sa dérivée par rapport à r est nulle, ce qui donne :

$$\frac{dp}{\Pi dr} + \frac{VdV}{gdr} = 0.$$

D'autre part, l'équation générale de l'hydrostatique, appliquée au mouvement supposé circulaire d'une molécule, nous montrera que la dérivée $\frac{dp}{dr}$, de la pression par rapport au rayon, est égale à l'inertie de l'unité de volume suivant le rayon, seule force agissant dans cette direction sur la molécule considérée, c'est-à-dire à $\rho \frac{V^2}{r}$. En susbtituant cette valeur à $\frac{dp}{dr}$ dans l'équation précédente, celle-ci devient :

$$\frac{\rho}{\Pi} \frac{V^2}{r} + \frac{VdV}{gdr} = 0, \quad \text{ou} \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} = 0,$$

ou, encore, en exceptant le cas $r = 0$:

$$V + \frac{rdV}{dr} = 0, \quad \text{ou} \frac{d.(Vr)}{dr} = 0,$$

ce qui revient à :

$$Vr = V_0 r_0 = C,$$

en appelant C une quantité constante.

La vitesse des molécules est inversement proportionnelle à leur distance à l'axe.

Si l'on applique à une molécule de la surface libre le théorème de Bernoulli, p ayant alors la valeur constante p_0 on a :

$$\frac{p_0}{\Pi} + z + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\Pi} + z_0 + \frac{V_0^2}{2g}.$$

ce qui, en appelant h la profondeur $z_0 - z$ de la surface libre au-dessous du plan horizontal contenant le bord du tourbillon, de rayon r_0, donne, pour le profil de cette surface libre :

$$h = \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = \frac{C^2}{2g}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right).$$

Ce profil est asymptote à l'axe vertical ; mais cette analyse ne s'applique pas aux parties très voisines de l'axe, comme nous l'avons dit.

L'énergie d'un pareil tourbillon est considérable. Celle d'une couche fluide comprise entre deux plans horizontaux distants de l'unité et entre deux circonférences de rayons r_1 et r_0 a pour expression :

$$\int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{2}\rho\, V^2(2\pi r)dr = \pi\rho C^2 \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r} = \pi\rho C^2 \operatorname{Log.} \frac{r_0}{r_1}.$$

quantité qui devient très grande lorsque r_1 est très petit et qui deviendrait même infinie si la formule s'appliquait encore à $r_1 = 0$.

74. Tourbillons de seconde espèce. — Les tourbillons de la seconde espèce, dans lesquels la masse en mouvement ne se renouvelle pas, se produisent toutes les fois qu'une masse liquide annulaire est animée d'un mouvement de rotation qu'elle communique de proche en proche à d'autres masses annulaires contiguës. Le mouvement des premières peut leur être imprimé, soit par exemple par le frottement d'un cylindre solide et creux, immergé dans le liquide, soit par deux courants horizontaux, de sens inverse, agissant à la manière d'un couple sur deux points opposés des masses annulaires considérées. Le mouvement dépend alors évidemment du coefficient de frottement intérieur des couches liquides les unes sur les autres. On trouve facilement[1] que lorsque le mouvement est permanent la vitesse V, à une distance r de l'axe d'un pareil tourbillon est exprimée, A et B étant deux constantes, par:

$$V = Ar + \frac{B}{r}.$$

1. Le frottement est égal, d'après la note du n° 16, à un certain coefficient ε multiplié par la vitesse de glissement. Si dans ces masses annulaires en

Cette formule donnerait aussi V infini pour $r = 0$ si l'on admettait qu'elle fût encore applicable à cette limite. En tout cas, la vitesse commence par diminuer à mesure qu'on s'éloigne du centre du tourbillon ; elle passe par un minimum dont la distance au centre est fonction des valeurs des constantes A et B, et elle augmente ensuite avec r.

mouvement on suppose que la vitesse soit la même en tous les points d'une même verticale, et si l'on considère un élément compris entre deux plans méridiens distants de $d\theta$, entre deux plans horizontaux distants de dz et entre deux cylindres concentriques distants de dr, on reconnaîtra que la vitesse de glissement, sur les faces $rd\theta dz$, est égale au produit du rayon r par la dérivée, par rapport à r, de la vitesse angulaire $\frac{V}{r}$, et par suite l'effort tangentiel T par unité d'aire de ces faces aura pour valeur:

$$T = \varepsilon r \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right).$$

En exprimant l'équilibre de cet élément, c'est-à-dire en écrivant l'égalité à zéro des sommes des projections sur les trois directions, r, θ, z des forces qui agissent sur lui et de son inertie, et en remarquant que les composantes de cette inertie sont $\rho \frac{V^2}{r}$ suivant le rayon et $\rho \frac{dV}{dt}$ suivant la tangente, on aura les trois équations:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad , \quad \frac{dp}{dr} = \rho \frac{V^2}{r} , \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{d.Tr}{dr} + \frac{T}{r} = \rho \frac{dV}{dt}.$$

Si le mouvement est permanent le dernier membre de cette troisième équation est nul, et en mettant pour T sa valeur précédente, on a :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left[\varepsilon r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right)\right] + \varepsilon \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right) = 0, \quad \text{ou bien } \frac{\varepsilon}{r^3} \frac{d}{dr}\left[r^3 \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right)\right] = 0;$$

ce qui donne : $r^3 \frac{dr}{d}\left(\frac{V}{r}\right) = \text{const} = -2B$, ou bien : $\frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right) = -\frac{2B}{r^3}$

et enfin en appelant A une nouvelle constante : $\frac{V}{r} = A + \frac{B}{r^2}$.

(Voir Boussinesq, *Essai sur la théorie des Eaux courantes*, pages 616 à 634).

CHAPITRE IV

TUYAUX DE CONDUITE

§ 1. *Formules et tables.* — § 2. *Problèmes divers.* — § 3. *Étude détaillée de l'écoulement.*

§ 1.

FORMULES ET TABLES

75. Formule générale de l'écoulement dans les tuyaux de diamètre constant. — L'équation générale (17) du mouvement permanent des courants liquides, que nous avons établie plus haut (n°24, page 51) :

$$\sin I - \frac{1}{\Pi}\frac{dp_0}{ds} = \frac{\chi}{\omega}\varphi(U) + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

peut s'appliquer aux tuyaux de diamètre constant D. La vitesse moyenne U est alors constante et le dernier terme est nul ; le périmètre mouillé $\chi = \pi D$ et la section transversale $\omega = \pi\frac{D^2}{4}$. Cette équation devient alors :

$$\sin I - \frac{1}{\Pi}\frac{dp_0}{ds} = \frac{4}{D}\varphi(U).$$

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué au n° 31, page 59, le niveau piézométrique, dans l'étendue ds, s'est abaissé de $ds \sin I - \frac{dp_0}{\Pi}$

Désignons par J l'abaissement de ce niveau par unité de longueur, ou bien posons

$$J = \sin I - \frac{1}{\Pi}\frac{dp_0}{ds},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{1}{4}DJ = \varphi(U).$$

Elle peut s'établir directement.

Appelons toujours ω l'aire de la section transversale, χ son périmètre, p la pression moyenne sur une section donnée, I l'angle formé par l'axe du tuyau avec l'horizontale. Si le mouvement est supposé uniforme, nous pouvons écrire l'équilibre d'une tranche comprise entre deux sections transversales distantes de ds. Le poids de cette tranche, $\Pi\omega ds$, a pour composante, suivant l'axe du tuyau, $\Pi\omega ds \sin I$; sur ses deux faces extrêmes s'exercent des pressions normales dont la différence, projetée sur le même axe, est $-\omega dp$, et enfin sur le pourtour s'exerce un frottement qui, à raison de F par unité de surface vaut $-F\chi ds$. L'équation d'équilibre sera ainsi :

$$\Pi\omega\, ds \sin I - \omega dp - F\chi ds = 0.$$

Si les points de l'axe du tuyau sont rapportés à un plan horizontal inférieur, z étant l'ordonnée d'un point quelconque, la différence $-dz$ de deux points consécutifs sera $-dz = ds \sin I$; substituons, changeons les signes et divisons par $\Pi\omega$, nous obtiendrons

$$dz + \frac{dp}{\Pi} + \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\Pi}\, ds = 0.$$

L'effort du frottement F par unité de surface de la paroi du tuyau est une fonction de la vitesse u_0 le long de la paroi ; mais comme cette vitesse est inconnue, il est plus commode, comme nous l'avons dit, de l'exprimer en fonction de la vitesse moyenne U et d'écrire $\frac{F}{\Pi} = \varphi(U)$. Il vient ainsi

$$(1) \qquad dz + \frac{dp}{\Pi} + \frac{\chi}{\omega}\varphi(U)\, ds = 0.$$

Intégrons cette équation et appelons $H - \frac{U^2}{2g}$ la constante à laquelle nous devrons égaler l'intégrale du premier membre, ce qui est légitime puisque U est constant, nous trouvons

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = H - \frac{\chi}{\omega} \varphi (U) s.$$

Sous cette forme, l'équation montre que le plan de charge s'abaisse proportionnellement à la longueur s, ce qui est évident à priori puisque la seule cause de perte de charge, le frottement du liquide contre la paroi, agit proportionnellement à cette longueur s. La *ligne de charge* est alors une ligne inclinée dont les ordonnées décroissent linéairement à mesure que s grandit, et si nous appelons J cet abaissement du plan de charge par unité de longueur, ce qui revient à poser :

$$J = \frac{\chi}{\omega} \varphi (U),$$

ou bien, pour $\chi = \pi D$ et $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$,

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi (U),$$

l'équation différentielle (1) ci-dessus s'écrira :

$$dz + \frac{dp}{\Pi} + J\, ds = 0,$$

ou $$J = -\frac{dz}{ds} - \frac{1}{\Pi}\frac{dp}{ds} = \sin I - \frac{1}{\Pi}\frac{dp}{ds};$$

ce qui montre bien que J est la même quantité que celle que nous avons désignée plus haut par la même lettre.

76. Formules pratiques. — La fonction φ (U) exprimant le frottement du liquide est inconnue et on a essayé de la représenter de bien des manières différentes. Nous allons rappeler les principales. On peut toujours, évidemment, donner à la fonction φ (U) la forme

$$\varphi (U) = b_1 U^2$$

à la condition de considérer le coefficient b_1 non comme une constante, mais comme une fonction de la vitesse U. Les expériences montrent même qu'il doit être aussi, probablement, fonction du diamètre D de la conduite et peut-être de la charge J.

L'équation générale de l'écoulement dans les tuyaux de diamètre constant D se met alors sous la forme

$$\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2, \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même

$$U = C\sqrt{\frac{DJ}{4}}; \tag{3}$$

en appelant $C = \frac{1}{\sqrt{b_1}}$, un nouveau coefficient[1], fonction comme b_1 de la vitesse U et du diamètre D.

77. Formules anciennes. — La formule qui a été longtemps la plus usitée est en même temps l'une des plus anciennes ; c'est celle de Prony :

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2,$$

qui revient à faire

$$b_1 = b + \frac{a}{U}.$$

Les valeurs données par Prony pour les coefficients a et b sont :

$$a = 0{,}000017 \quad , \qquad b = 0{,}000348.$$

D'Aubuisson et Eytelwein ont proposé d'autres valeurs numériques, mais celles-ci restent les plus usitées.

Dupuit, supposant b_1 ou C constant a proposé la formule

$$U = 51\sqrt{\frac{DJ}{4}}$$

1. La table VIII, à la fin de ce volume, donne les valeurs correspondantes des deux coefficients C et b_1, ainsi définis.

qui est commode à cause de sa simplicité mais qui ne donne pas des résultats d'une exactitude suffisante. On la rend un peu meilleure en augmentant le coefficient numérique et en le portant à 60 et même à 63 ; mais même avec cette correction elle s'écarte encore beaucoup de la réalité.

De Saint-Venant a remplacé le terme $\sqrt{\frac{DJ}{4}}$ ou $\left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ par la puissance fractionnaire $\left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{7}{12}}$. Le coefficient numérique doit être modifié en conséquence. La formule ainsi établie

$$U = 114 \left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{7}{12}}$$

est peu employée.

78. Défaut commun à ces formules.— Toutes ces formules présentent un défaut qui leur est commun et qui tient à la valeur constante attribuée aux coefficients numériques. Il n'y est pas tenu compte de l'état de rugosité des parois, et cela vient probablement en grande partie d'une idée fausse que l'on se faisait des circonstances de l'écoulement. Du Buat avait commencé par mettre en doute cette influence : « En considérant, dit-il, comment l'eau prépare elle-même la surface sur laquelle elle coule, on voit que la différence des matières dont peut être composée la paroi ne doit pas en apporter de bien sensible dans la résistance. » Prony avait adopté cette opinion et en avait donné une explication : « Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche de fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau ou dans laquelle ce lit est creusé ; cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. » Ces observateurs n'avaient pas remarqué que, même en admettant l'existence de cette couche d'eau immobilisée, elle ne peut complétement effacer les aspérités de la paroi, et que dès lors, la pré-

sence de ces aspérités occasionne, dans le courant, des tourbillonnements et des mouvements confus dont l'action ne saurait être négligée.

79. Formules modernes.— C'est Darcy qui, le premier, a proposé de tenir compte de l'état des parois. En même temps qu'il proposait, pour le coefficient b_1, la forme :

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{R},$$

R étant le rayon du tuyau qu'il a mis dans sa formule au lieu du diamètre D plus généralement adopté, il donnait les valeurs numériques des coefficients α et β applicables à la fonte neuve, et il proposait de les doubler pour les rendre applicables à la fonte recouverte de dépôts.

Il écrivait alors sa formule :

$$RJ = b_1 U^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) U^2;$$

mais, afin d'éviter toute confusion (le rayon R a été quelquefois pris pour le rayon moyen $\frac{D}{4}$), nous l'écrirons :

$$\frac{DJ}{4} = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) U^2;$$

et alors les coefficients α et β ont les valeurs suivantes pour la fonte recouverte de dépôts :

$$\alpha = 0{,}000507 \quad , \qquad \beta = 0{,}00001294.$$

Pour la fonte neuve, les valeurs de α et de β seraient les moitiés de celles-ci.

On voit que, dans l'hypothèse de Darcy, où le coefficient b_1 est fonction du rayon R, la vitesse moyenne U est égale au produit de $\sqrt{RJ}$ par une certaine fonction de R. M. Maurice Lévy a proposé, pour la fonte recouverte de dépôts, la formule :

$$U = 20{,}5 \sqrt{RJ(1 + 3\sqrt{R})},$$

qui revient à donner au coefficient b_1 une forme :

$$b_1 = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{R}}.$$

Elle est peu employée.

M. Gauckler avait donné la formule plus compliquée :

$$\sqrt{U} + \frac{1}{4} D \sqrt[4]{U} = \alpha \sqrt[3]{D} \sqrt[4]{J},$$

avec $\alpha = 7$ environ, qui n'est pas non plus passée dans la pratique.

M. Hagen avait cru reconnaître la nécessité de conserver à la formule la forme qui lui avait été donnée par Prony avec un terme du premier degré en U, et c'était le coefficient de ce terme qu'il rendait variable avec le diamètre. Il écrivait, avec nos notations :

$$\frac{DJ}{4} = \frac{a}{D} U + bU^2 ;$$

a et b étant des coefficients numériques constants.

Le premier terme de cette formule, le seul qui soit à considérer lorsque les vitesses sont petites, est analogue à celui qui figure dans la formule établie par Poiseuille pour les tubes capillaires [1], laquelle s'écrit, avec nos notations :

$$U = aJD^2,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{DJ}{4} = \frac{a'}{D} U.$$

Weisbach a donné la formule suivante

$$\frac{DJ}{4} = \left(a + \frac{b}{\sqrt{U}}\right) U^2,$$

avec $a = 0{,}0007336$, $b = 0{,}0004828$,

au moyen de laquelle il a dressé des tables qui sont fort usitées à l'étranger, en Angleterre et en Allemagne.

1. *Mémoires des savants étrangers à l'Académie des sciences*, tome IX, 1846

Comme résultat d'une discussion détaillée d'un grand nombre de résultats d'expériences, M. Albert Franck[1] a conclu à l'adoption de la formule :

$$\frac{DJ}{4} = \left(a + \frac{b}{\sqrt{D}}\right)U^2,$$

avec $a = 0,000512$, $b = 0,000385$.

Le docteur Lampe, à la suite d'expériences très précises, avait proposé :

$$D^{1.25}J = aU^{1.802},$$

avec $a = 0,0007555$.

M. Osborne Reynolds, par la comparaison des résultats de ses expériences, a été amené à conclure que la résistance due au frottement n'était pas proportionnelle à U^2, mais à une puissance U^n de U, variable suivant le degré de rugosité des parois. D'après lui, l'exposant de cette puissance serait 1,7 pour les tuyaux très lisses, 1,722 pour les tuyaux en plomb et n'atteindrait 2 que pour ceux dont la paroi est très rugueuse.

M. le professeur Unwin a proposé la formule suivante :

$$J = a\frac{U^n}{D^{3-n}},$$

a et n étant variables ; ce dernier nombre, qui figure dans les exposants de U et de D, semblerait compris entre 1,79 et 2 pour les tuyaux en fonte, ce qui serait d'accord avec les indications de M. Reynolds.

M. Edgar Thrupp[2] est arrivé, de son côté, à une formule à peu près analogue, qui, bien que présentée sous une forme différente, revient à

$$J = a\frac{U^n}{D^{0,6116n}},$$

1. *Der Civilingenieur*, 1881.
2. Cité par M. le professeur Henry Robinson, dans son ouvrage *Hydraulic power and hydraulic machinery*, 1887.

et dans laquelle n varie de 1,70 à 2. Elle devient identique à la précédente, lorsque $n = 1,86$, ce qui est sensiblement sa valeur moyenne d'après les deux auteurs.

80. Formules analogues à celles des canaux découverts. — Comme nous le verrons en parlant des canaux découverts, la plupart des formules proposées pour les tuyaux l'ont été également pour ces canaux, avec des coefficients numériques différents. Inversement, certaines formules, établies par des hydrauliciens en vue de représenter les lois de l'écoulement dans les canaux découverts, ont été appliquées aux tuyaux. Je citerai, en particulier, celle de MM. Ganguillet et Kutter qui sera donnée plus loin sous la forme :

$$U = C\sqrt{\frac{DJ}{4}},$$

le coefficient C ayant pour valeur :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right)\frac{2n}{\sqrt{D}}},$$

et qui peut s'appliquer aux tuyaux de fonte, en service, en y donnant à n la valeur 0,013 ou 0,014, soit en moyenne $\frac{1}{n} = 72$. De même, la formule de M. Robert Manning, dont il sera parlé au chapitre des canaux découverts et qui peut s'écrire :

$$U = C\sqrt{J}\sqrt[3]{\frac{D^2}{16}} = \frac{C}{4}\sqrt{J}\sqrt[3]{D^2},$$

s'applique aussi aux mêmes tuyaux avec la valeur $C = 72$ ou $\frac{C}{4} = 18$, ce qui donne :

$$U = 18\sqrt[3]{D^2}\sqrt{J} \quad \text{ou bien} \quad \frac{DJ}{4} = \frac{0,00078}{\sqrt[3]{D}}U^2.$$

81. Difficultés du problème. — Ces nombreuses tentatives pour arriver à une formule pratique de l'écoulement dans les tuyaux montrent que la question est complexe et qu'elle est bien loin d'être résolue. Il semble impossible d'avoir une formule s'appliquant à tous les cas à cause de la rugosité qui a une importance considérable dont on peut se rendre compte par l'indication sommaire de Darcy laquelle consiste à doubler, pour la fonte recouverte de dépôts, des coefficients numériques déterminés pour les tuyaux en fonte neuve. Cette indication est manifestement insuffisante, car elle néglige l'importance de ces dépôts. La rugosité de la paroi des tuyaux n'est malheureusement pas susceptible d'un mesurage précis, c'est pourquoi il sera toujours très difficile d'en tenir un compte exact dans les formules. Ce que l'on doit chercher, c'est une formule, la plus simple possible, qui s'accorde assez bien avec les observations dans la limite de la pratique et pour les tuyaux de conduite ordinaires d'une rugosité moyenne.

Il semble démontré que la résistance due au frottement des liquides croît moins vite que le carré de la vitesse. Du Buat l'avait déjà constaté pour des mouvements même assez rapides. M. Gauckler [1] a démontré, pour les cours d'eau, que la loi du frottement proportionnel à la première puissance de la vitesse était la loi véritable dans les cours d'eau à faible pente, comme le sont à peu près toutes les rivières. Dans les écoulements un peu rapides, mais très réguliers, c'est encore celle qui s'observe et qui semble, en quelque sorte, être la loi primordiale du phénomène dégagé des perturbations produites par les tourbillonnements et l'agitation qui accompagnent toujours les grandes vitesses. La formule proposée par Prony se présente donc, au point de vue théorique, comme la plus rationnelle et celle qui avec des coefficients convenables, aurait le plus de chances de s'accorder avec les faits; du reste, M. Bechmann a remarqué [2] que les formules de Prony, et les

1. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1868, 1er semestre, p. 254.
2. *Distributions d'eau*, Paris 1888, no 285, p. 318.

tables qui en sont déduites, sont meilleures, pour les diamètres moyens et même pour les grands, que celles de Darcy. Et, en réalité, beaucoup d'ingénieurs continuent à se servir des tables de Prony, malgré les travaux plus récents.

La formule de Prony a l'inconvénient d'être binôme ; celle de Darcy n'est monôme qu'en apparence, puisque le coefficient b_1 y est de la forme $a + \frac{b}{D}$. Cela a pour effet de compliquer les calculs, de rendre difficile l'emploi des logarithmes. Aussi a-t-on vu plus haut que les ingénieurs anglais avaient surtout cherché des formules véritablement monômes, même en acceptant la complication d'exposants fractionnaires, comme St Venant l'avait déjà proposé précédemment. Sa tentative pour faire adopter la formule $U = a\,(DJ)^{\frac{7}{12}}$, n'a pas eu, il faut le reconnaître, le succès qu'elle méritait. Les praticiens ont-ils été effrayés par cet exposant fractionnaire, malgré les tables numériques dressées pour rendre facile l'usage de la formule, ou bien ont-ils reconnu qu'elle n'était pas plus exacte que les autres, c'est ce qu'il est difficile de savoir. Le fait est qu'elle est tombée en désuétude, ainsi que les tables qui en sont déduites. Il semblera peut-être alors bien présomptueux de renouveler cette tentative et de proposer une nouvelle formule à exposant fractionnaire : l'avenir seul permettra de juger si c'était inutile.

82. Nouvelle formule proposée. — D'un examen détaillé d'un très grand nombre de résultats d'expériences et d'observations, il m'a paru qu'il était possible de conclure que le coefficient b_1, de la formule

$$\frac{DJ}{4} = b_1\,U^2,$$

pouvait recevoir la forme $b_1 = \frac{1}{\sqrt{DU}}$, ce qui, en appelant a un coefficient numérique, conduit à la formule :

$$D^5 J^4 = a^4 U^7,$$

ou bien $$D^{\frac{5}{4}} J = aU^{\frac{7}{4}}.$$

C'est la formule du docteur Lampe, donnée plus haut, sauf une petite différence dans l'exposant de U qui y est de 1,802 au lieu de $\frac{7}{4}$ = 1,750. La formule proposée concorde aussi avec celle de M. le professeur Unwin lorsque, dans cette dernière, on fait $n = 1.75$. Le coefficient numérique a doit y recevoir la valeur moyenne $a = 0{,}000740$ pour les tuyaux lisses, parfaitement unis à l'intérieur, ou recouverts d'une couche de coaltar ou autre enduit qui en fait disparaître les rugosités, et la valeur moyenne 0,00092 pour les tuyaux légèrement incrustés comme le sont, au bout de quelque temps de service, tous ceux qui ont à conduire des eaux un peu calcaires. Si les tuyaux sont fortement incrustés, aucune formule n'est plus applicable car il faudrait alors tenir compte de la diminution de la section transversale qui pourrait être considérable.

L'effet des incrustations est variable, naturellement, avec le diamètre des tuyaux ; il est d'autant moindre que le diamètre est plus grand. Lorsque le diamètre n'est que de 0,05 à 0,10 l'effet d'incrustations ordinaires doublerait facilement le coefficient de résistance ; tandis qu'il n'augmenterait ce coefficient que de moitié pour des diamètres de 0,20 à 0,60 et d'un quart, à peine, pour des diamètres plus grands.

Les tuyaux parfaitement lisses sont un peu une exception et il est bien rare qu'ils conservent longtemps leur poli primitif; on peut voir, en comparant les observations faites par Darcy, qu'un dépôt à peine perceptible, d'une petite fraction de millimètre d'épaisseur, suffit pour changer les conditions de l'écoulement en augmentant la résistance. C'est pourquoi je propose d'adopter, dans tous les cas pratiques, la formule [1] :

1. Dans une matière aussi peu susceptible d'exactitude, il me paraît inutile de donner, pour le coefficient numérique, plus de deux chiffres significatifs.

(4) $$DJ = 0,00092 \sqrt[4]{\frac{U^7}{D}}.$$

88. Tables numériques. — Les problèmes que l'on peut être appelé à résoudre sur les tuyaux de conduite se réduisent toujours, étant données deux des quatre quantités R ou D, rayon ou diamètre du tuyau, J perte de charge par unité de longueur, U vitesse moyenne de l'eau, et $Q = \pi R^2U$, débit de la conduite par unité de temps, à déterminer les deux autres.

Cela se fait au moyen de la relation $Q = \pi R^2U$ et de l'une des formules qui viennent d'être données établissant une relation empirique entre R ou D, J et U. En vue de faciliter les calculs, la plupart de ces formules ont eté traduites en tables numériques dont les dispositions sont diverses.

Les tables de Prony et de St Venant sont à simple entrée et donnent, en regard de la vitesse moyenne U, la valeur de $\frac{DJ}{4}$. Elles ne sont pas commodes pour les calculs, car le débit $Q = \pi R^2U$ de la conduite, par seconde, qui est un élément important, n'y figure pas, et si, par exemple, c'est ce débit qui est donné avec la perte de charge J, le diamètre D de la conduite, qui est à calculer, ne peut être trouvé que par tâtonnement.

La table de Darcy est à double entrée ; elle donne, pour une valeur de U comprise entre 0^m10 et 3^m00 et pour un diamètre D compris entre 0,01 et 1^m00, le débit Q et la charge J. La table de Mary est également à double entrée ; elle donne, pour les diamètres usuels compris entre 0^m05 et 0^m60 et pour un débit Q compris entre 0 lit. 022 et 266 lit. 6 par seconde, la vitesse moyenne U et la charge J. Elle est déduite de la formule de Prony [1].

On peut, dans la formule $\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2$, remplacer U par sa

1. Les débits qui figurent à la première colonne de la table de Mary sont des multiples ou des sous-multiples du pouce de fontainier. Un pouce de fontainier représente un débit de 0 lit. 22217 par seconde. Cette mesure n'est plus usitée.

valeur en fonction du débit $U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4Q}{\pi D^2}$, ce qui donne :

$$J = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}. \qquad \text{ou} \qquad \frac{J}{Q^2} = \frac{64\, b_1}{\pi^2 D^5}.$$

M. Bresse a dressé une table qui donne, pour une valeur du diamètre D, comprise entre 0 m. 01 et 1 m. 20, la valeur correspondante de $\frac{J}{Q^2}$ et de son logarithme. Cette table est calculée d'après la formule et les coefficients de Darcy ; un extrait en est donné dans la table III, à la fin du présent volume.

La formule précédente peut se mettre sous la forme:

$$Q = \frac{\pi D^3}{8\sqrt{b_1 D}}\sqrt{J} = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2 b_1 R}}\sqrt{J};$$

et M. Gay, professeur à l'université de Lausanne, a donné une table où l'on trouve, pour les valeurs du rayon R comprises entre 0 m. 01 et 0 m. 50 la valeur du logarithme du coefficient $\frac{\pi R^2}{\sqrt{2 b_1 R}}$.

Enfin, on peut, de la formule de Prony, $\frac{DJ}{4} = aU + bU^2$, éliminer le diamètre D en fonction du débit : $D^2 = \frac{4\,Q}{\pi\,U}$; on trouve

$$J^2 Q = 4\pi U\,(aU + bU^2)^2.$$

M. Fourneyron a calculé une table qui pour une valeur donnée de J^2Q, fournit immédiatement la valeur correspondante de U.

Ces dernières tables sont, croyons-nous, peu employées.

Toutes ces tables ne sont d'ailleurs que la traduction des formules de Prony ou de Darcy. Celles qui portent les numéros V, VI et VII à la fin de ce volume, ont été au contraire calculées d'après la formule (4) proposée à la page 151. Elles permettent de résoudre immédiatement tous les problèmes relatifs aux conduites.

84. Usages de ces tables. — *Exemples* : 1° Etant donnés le diamètre D d'une conduite et la perte de charge par mètre J, calculer son débit Q.

La formule :

$$D^5 J^4 = a^4 U^7$$

devient, en y mettant pour U sa valeur $U = \frac{4Q}{\pi D^2}$,

$$D^{19} J^4 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 Q^7 :$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{Q^7}} = \frac{1}{J} a \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}} .$$

La table V donne, pour toutes les valeurs de D comprises entre 0 m. 01 et 1 m. 40, la valeur de $a \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}}$ qui y est désignée, pour abréger, par la lettre γ. On divisera donc, par la perte de charge donnée J, le nombre de cette table correspondant au diamètre donné D et l'on cherchera, dans la table VI qui donne les valeurs de $\frac{1}{\sqrt[4]{Q^7}} = \frac{\gamma}{J}$ le nombre qui se rapproche le plus du produit obtenu ; on trouvera, en regard, le débit cherché Q.

Exemple : *Quel est le débit d'une conduite de* 0 m. 35 *de diamètre, sous une charge de* 0 m. 00013 *par mètre.*

Le nombre γ de la table V, correspondant au diamètre 0,35, est 0,205. La charge J étant 0,00013, le quotient $\frac{\gamma}{J}$ est 1577.

La table VI donne en regard du débit Q = 0 m. 015 le nombre 1560, et en regard du débit Q = 0,014, le nombre 1755. Le débit cherché sera donc, à très peu près de 15 litres par seconde.

2° Etant donnés le débit Q et la charge J, calculer le diamètre D.

On multipliera la charge donnée J par la valeur de $\frac{\gamma}{J}$ inscrite dans la table VI, en face du débit donné Q et l'on aura ainsi la valeur de γ; il suffira de chercher, dans la table V, la valeur de D correspondante.

Exemple : *Quel diamètre faudra-t-il donner à une conduite pour qu'elle puisse débiter cent dix litres par seconde sous une charge de* 0 m. 00021 *par mètre.*

Le nombre $\frac{\gamma}{J}$ de la table VI correspondant au débit de 110 litres est 48. Le produit de ce nombre par la charge donnée 0,00021 est 0,01008, lequel est compris entre ceux qui sont, dans la table V, en regard des diamètres 0,65 et 0,70. Une interpolation, faite à la manière ordinaire, conduirait à la valeur $D = 0,662$; mais il sera en général suffisant et préférable, en pratique, d'adopter le chiffre le plus élevé 0,70.

3° Etant donnés le débit Q et le diamètre D, calculer la perte de charge par mètre J.

On prendra, dans la table VI le nombre correspondant au débit donné Q ; dans la table V celui qui correspond au diamètre donné D ; le premier est $\frac{\gamma}{J}$, le second est γ, il suffira donc de diviser le second par le premier pour avoir J.

Exemple : *Une conduite de* 0 m. 40 *de diamètre débite* 55 *litres par seconde : quelle est la perte de charge par mètre.*

La table VI donne, pour $Q = 0,055$, $\frac{\gamma}{J} = 160$; la table VI, pour $D = 0,40$, $\gamma = 0.107$. En divisant ce nombre par le précédent, on trouve $J = 0,000669$.

L'emploi de ces tables, bien que très simple, exige encore un petit calcul, multiplication ou division ; pour l'éviter, on peut se servir de la table VII où l'on trouvera les résultats de ce calcul pour un certain nombre de diamètres usuels et pour

des débits variables. Cette table, à double entrée, fait connaître la perte de charge J pour un débit et un diamètre donnés, ou inversement. L'usage de cette table n'a besoin d'aucune explication.

Les tables IV et IV bis donnent les débits en fonction de la vitesse ou inversement, dans les conduites ayant les diamètres les plus usuels. Ces tables ne sont que la traduction en chiffres de l'une des formules :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot U \qquad \text{ou} \qquad U = \frac{4}{\pi D^2} \cdot Q$$

Elles sont limitées, pour chaque série de diamètres aux neuf chiffres significatifs ; elles permettent d'obtenir tous les débits correspondant à toutes les vitesses, ou inversement, par un simple déplacement de la virgule et une addition.

Exemple : *Quelle est la vitesse moyenne correspondant à un débit de* 253 *litres par seconde, dans une conduite de* 0 m. 80 *de diamètre.*

La table IV bis donne, dans une conduite de 0, 80 :

pour un débit de	200 litres	une vitesse de	0m,39789
—	50 litres	—	0m,09947
—	3 litres	—	0m,00597
Et par suite pour un débit de	253 litres	une vitesse de	0m,50333

Quel est le débit correspondant à une vitesse de 0 m. 68 *dans une conduite de* 0 m. 25.

La table IV donne, pour la conduite de 0,25 :

Débit correspondant à une vitesse de	0,60	29lit.45
— —	0,08	3lit.93
Débit correspondant à une vitesse de	0,68	33lit.38

85. Limitation de la vitesse dans les conduites. — Il n'est pas inutile de rappeler ici que, pour diverses causes

et en particulier pour éviter les coups de bélier dans les conduites, il est d'usage de limiter la vitesse moyenne de l'eau qu'elles débitent. Cette limitation de la vitesse n'a évidemment rien d'absolu et peut dépendre des précautions plus ou moins nombreuses qu'on aura prises d'autre part pour se mettre à l'abri des coups de bélier, elle peut aussi être fonction, dans une certaine mesure, de la pression moyenne dans les conduites. Cependant, on peut admettre en général les limites ci-après, pour les conduites de différents diamètres :

Diamètres	Vitesses maxima	Diamètres	Vitesses maxima
$0^m,10$	$0^m,75$	$0^m,40$	$1^m,25$
0 ,15	0 ,80	0 ,50	1 ,40
0 ,20	0 ,90	0 ,60	1 ,60
0 ,25	1 ,00	0 ,80	1 ,80
0 ,30	1 ,10	1 ,00	2 ,00

Bien des ingénieurs se tiennent même notablement au-dessous de ces limites qui sont rarement atteintes.

§ 2

PROBLÈMES DIVERS

86. Conduite partant d'un réservoir. — Soit au moyen des tables, soit au moyen de l'une des formules proposées pour calculer le débit des conduites, on peut donc résoudre les problèmes auxquels leur établissement peut donner lieu. Il y a toutefois, en ce qui concerne la détermination de la perte de charge, une remarque essentielle à faire lorsqu'il s'agit d'une conduite partant d'un réservoir sur la paroi duquel elle s'embranche.

Considérons une pareille conduite AB (fig. 55) et soit H la

hauteur verticale entre le niveau de l'eau dans le réservoir et

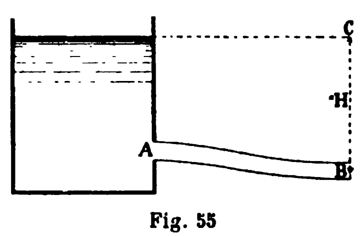


Fig. 55

celui de l'extrémité B de la conduite que nous supposons déboucher librement dans l'air. Si L est la longueur AB de la conduite, la perte de charge par mètre ne sera pas $\frac{H}{L}$, car une partie de la charge totale H est perdue à l'entrée dans la conduite, et une autre, utilisée pour produire la vitesse d'écoulement, se trouve en réalité perdue également, puisque le liquide s'écoule par l'extrémité B sans que sa vitesse y soit utilisée. La perte de charge due à l'entrée de l'eau dans la conduite est, comme on l'a vu au n° 43, exprimée par $\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{1}{9}\right]$ en appelant m le coefficient de contraction de la veine liquide à l'entrée du tuyau. La charge utilisée à produire la vitesse U est égale à $\frac{U^2}{2g}$ et, d'après ce qui vient d'être dit, la perte de charge totale se trouve être ainsi de $\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{10}{9}\right]$. Cette quantité doit être retranchée de la charge totale H pour que l'on puisse en déduire la perte due au frottement du liquide dans la conduite par unité de longueur, laquelle a ainsi pour valeur

$$J=\frac{H-\frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{10}{9}\right]}{L}.$$

Nous avons vu que, pour la valeur ordinaire du coefficient $m=0{,}62$, la parenthèse qui multiplie $\frac{U^2}{2g}$ a pour valeur environ $\frac{3}{2}=1.50$. On peut, pour abréger, représenter cette parenthèse par δ et écrire :

$$J=\frac{H-\delta\frac{U^2}{2g}}{L}.$$

La vitesse d'écoulement U se déterminera ainsi par l'équation générale $\frac{DJ}{4} = b_1 U^2$, dans laquelle on mettra pour J cette expression et pour b_1 soit une valeur constante, soit l'une des nombreuses valeurs variables que nous avons données précédemment. On aura ainsi :

$$\frac{D}{4L}\left(H - \delta \frac{U^2}{2g}\right) = b_1 U^2 \ ;$$

d'où l'on tirera :

$$U = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{\frac{8Lb_1 g}{D} + \delta}}.$$

La vitesse réelle est donc égale à la vitesse théorique $\sqrt{2gH}$ multipliée par un coefficient de réduction μ, plus petit que l'unité et ayant pour expression :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{8Lb_1 g}{D} + \left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{10}{9}\right]}}.$$

Lorsque L est égal à D ou ne le dépasse pas beaucoup, ce qui est le cas de l'ajutage cylindrique, le premier terme sous le radical, où b_1 est voisin de 0,0004, ne dépasse pas 0,03 ou 0,04 et peut être négligé par rapport au terme suivant, dont la valeur, pour $m = 0,62$, est 1,50. On trouve alors pour le coefficient μ environ 0,82.

Mais si L augmente le coefficient μ diminue, et voici les valeurs qu'il prend lorsque la longueur L devient égale à 5 fois, 10 fois..... le diamètre D.

Valeurs de $\frac{L}{D}$	Valeurs de μ	Valeurs de $\frac{L}{D}$	Valeurs de μ
5	0,78	30	0,63
10	0,75	40	0,60
15	0,71	50	0,57
20	0,68	100	0,46
25	0,66	200	0,36

Tous ces chiffres, et les deux derniers surtout, doivent être considérés comme seulement approximatifs, car ils sont calculés en admettant, pour le coefficient de frottement b_1, une valeur moyenne qui peut suivant la nature des parois différer beaucoup de la réalité. Pour les faibles longueurs, l'influence de ce coefficient est moins grande, et les résultats ont plus de chance d'être approchés.

87. Observations de M. de Caligny. — M. de Caligny, d'après de nombreuses observations, a été amené à penser que la longueur d'un tuyau doit être au moins de trente-six fois celle de son diamètre pour que la vitesse centrale soit sensiblement influencée par le frottement des parois. Jusque là l'effet retardateur de ce frottement ne se fait sentir que sur les couches les plus éloignées du centre. La distribution des vitesses, dans un tuyau de faible longueur, serait donc très différente de celle que l'on a observée dans les tuyaux plus longs et que nous ferons connaître plus loin.

Indépendamment de l'influence de la longueur, M. de Caligny a constaté aussi celle de la durée de l'écoulement, ou de l'amplitude totale du mouvement. « Quand le chemin parcouru par l'eau dans un tuyau de conduite, dit-il, par un mouvement permanent ou par un mouvement oscillatoire, est, relativement au diamètre, au-dessous d'une certaine limite, sans être excessivement petit, le coefficient de la résistance des parois, proportionnelle au carré de la vitesse moyenne dans chaque élément de l'espace et du temps, est beaucoup moindre qu'on n'aurait dû le penser jusqu'ici, d'après les idées généralement reçues sur le mode d'action des frottements. » Il en conclut, avec beaucoup de raison, que la résistance passive doit être en général moindre dans les mouvements oscillatoires que dans les mouvements permanents, si, de part et d'autre, les vitesses moyennes ne sont pas très petites.

Cette différence provient, d'après M. de Caligny, « d'une diminution dans le rapport de la vitesse de la couche d'eau

qui glisse contre la paroi à la vitesse moyenne de chaque tranche, dans un même instant donné. »[1]

Cela revient à dire que le frottement du liquide contre la paroi est beaucoup plus grand que celui du liquide sur lui-même, et que l'influence retardatrice du frottement ne s'exerce de proche en proche et d'une couche à la suivante, que dans un temps appréciable. Il se produirait alors, au commencement de l'écoulement, une vitesse moyenne plus grande qu'un instant après.

88. Conduite à diamètre variable. — Les tuyaux de conduite à diamètre graduellement variable ne sont employés que d'une façon exceptionnelle et sur de petites longueurs pour raccorder deux conduites de diamètre différent. La loi de l'écoulement dans ces tuyaux est donnée par la formule générale (17) ou (18) ci-dessus (pages 50 et 51) dans laquelle on devra supposer D, diamètre de la conduite, variable et fonction donnée de la longueur s. L'équation (18) multipliée par ds devient, en y remplaçant comme nous l'avons déjà fait plus haut, ds sin I par $-dz$:

$$dz + \frac{dp}{\Pi} + \frac{4}{D}\varphi(U)\,ds + \alpha' d\left(\frac{U^2}{2g}\right) = 0.$$

Intégrons depuis une section initiale particularisée par l'indice 0, nous aurons :

$$z - z_0 + \frac{p - p_0}{\Pi} + 4\int_{s_0}^{s} \frac{\varphi(U)}{D}\,ds + \alpha'\left(\frac{U^2 - U_0^2}{2g}\right) = 0.$$

Nous pouvons, comme nous l'avons fait dans le cas du mouvement uniforme, remplacer la fonction inconnue φ (U) par $B_1 U^2$, en appelant B_1 un coefficient qui peut être fonction de U, de D, etc. Cela revient simplement à poser $\frac{\varphi(U)}{U^2} = B_1$ ce qui peut être admis à titre de simplication.

1. *Hydraulique*, Tome I, pages 42 et suivantes.

Nous pouvons ensuite, sous le signe d'intégration, remplacer U par sa valeur en fonction de Q c'est-à-dire par $\frac{4Q}{\pi D^2}$ et observer que Q, étant indépendant de s, sortira de ce signe; nous obtiendrons alors, en faisant cette substitution et groupant les termes d'une façon différente :

$$z+\frac{p}{\Pi}+\frac{U^2}{2g}=z_0+\frac{p_0}{\Pi}+\frac{U_0^2}{2g}-\frac{64Q^2}{\pi^2}\int_{s_0}^{s}\frac{B_1 ds}{D^5}-(\alpha'-1)\left(\frac{U^2-U_0^2}{2g}\right)$$

Sous cette forme on voit que l'abaissement du plan de charge ou la perte de charge entre deux sections données se compose de deux parties : 1° le terme $\frac{64Q^2}{\pi^2}\int_{s_0}^{s}\frac{B_1 ds}{D^5}$ qui est dû au frottement contre la paroi ; et 2° le terme $(\alpha'-1)\left(\frac{U^2-U_0^2}{2g}\right)$ dû à l'accélération ou à l'accroissemement de vitesse moyenne, c'est-à-dire à l'inertie de la masse liquide en mouvement.

Pour évaluer la première partie $\frac{64Q^2}{\pi^2}\int_{s_0}^{s}\frac{B_1 ds}{D^5}$, il faut connaître d'abord la loi de variation de D en fonction de s que l'on suppose donnée, et aussi la loi de variation du coefficient B_1. Or on n'a, sur ce coefficient, aucune notion exacte. On peut supposer, approximativement, qu'il est à peu près le même, dans le cas d'une conduite à diamètre variable que dans une conduite à diamètre constant et lui attribuer alors soit une valeur constante b_1 soit une expression variable, ou bien en fonction de U comme l'a proposé Prony, ou bien en fonction du diamètre D comme l'a fait Darcy. Eu égard au peu d'importance pratique de la question, rien n'empêche d'admettre la première hypothèse et de faire ce coefficient constant, ce qui permet de le faire sortir du signe d'intégration.

Pour la seconde partie de la perte de charge $(\alpha'-1)\left(\frac{U^2-U_0^2}{2g}\right)$ son évaluation exige la connaissance du coefficient α', dont la valeur dépend de l'excès, sur le produit $U^2\omega$, de l'intégrale $\int_\omega u^2 d\omega$. Nous avons établi plus haut la loi des variations de

la vitesse u en fonction de la distance de chacun des filets liquides au centre du tuyau, dans le cas du mouvement uniforme. Si nous admettons, bien que cela semble assez peu probable, que la répartition des vitesses dans une section soit la même lorsque le diamètre de la conduite est variable, la valeur pratique à attribuer à α' serait d'environ 1,111 soit $\frac{10}{9}$; de sorte que $(\alpha' - 1)$ serait égal à $\frac{1}{9}$[1].

Nous pourrons alors écrire définitivement la formule applicable aux conduites à diamètre variable de la façon suivante :

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{D^5} - \frac{1}{9}\left(\frac{U^2 - U_0^2}{2g}\right).$$

Le dernier terme est positif ou négatif suivant que U_0 est plus grand ou plus petit que U, c'est-à-dire que le diamètre de la conduite augmente ou diminue. Dans le premier cas, ce terme correspond non pas à une perte, mais à une augmentation de la charge, et il représente un relèvement du plan de charge, c'est-à-dire qu'il vient en déduction de la perte de charge mesurée par le terme précédent.

Il convient d'ailleurs de remarquer que le dernier terme, très petit, est presque toujours négligeable par rapport aux autres. Si nous nous étions contentés, comme on le fait quelquefois, d'appliquer le théorème de Bernoulli à l'étude de

1. En réalité, la valeur du coefficient α déduite de la loi de la répartition des vitesses dans une même section transversale est beaucoup plus faible et ne dépasse guère 1,03 ; mais comme nous l'avons dit plus haut (p. 50, en note), la substitution, dans le terme précédent, du coefficient b_1 relatif au régime uniforme équivaut à négliger un terme en $\frac{U^2 - U_0^2}{2g}$, de sorte que pour corriger cette erreur, on est conduit à augmenter le coefficient α' de près de quatre fois son excès sur l'unité, et à adopter par suite la valeur donnée $\alpha' = 1,111$ (voir le mémoire de Saint-Venant sur les eaux courantes ; *Annales des ponts et chaussées*, 1er semestre, 1881, pages 148 et suiv.).

l'écoulement dans le cas dont il s'agit, nous n'aurions pas eu à écrire ce dernier terme, et nous aurions eu simplement :

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{D^5}.$$

C'est sous cette forme que l'on donne ordinairement l'équation des conduites à diamètre variable.

Le plus souvent, les pressions p et p_0 sont égales toutes deux à la pression atmosphérique et dans la plupart des problèmes pratiques les deux termes $\frac{U^2}{2g}$ et $\frac{U_0^2}{2g}$ diffèrent assez peu l'un de l'autre pour que l'on puisse négliger leur différence. La perte de charge totale $z_0 - z$ vaut alors simplement :

$$(6) \qquad z_0 - z = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{D^5}.$$

89. Conduite à débit variable. Service en route. — Au lieu de supposer le mouvement varié par suite d'un changement progressif du diamètre de la conduite, on peut supposer qu'il le soit par suite d'une modification du débit. Soit donc une conduite que nous supposerons à section constante, ayant à son origine un débit Q_0, mais laissant sortir par des orifices, répartis d'une manière continue, un débit q par unité de longueur, de telle sorte qu'à une distance s de l'origine le débit de cette conduite ne soit plus que $Q_0 - qs$. C'est ce que Dupuit appelait le service en route.

Admettons que l'équation précédente, soit applicable, à la condition de considérer Q comme variable et égal à $Q_0 - qs$ et de le faire entrer, par suite, sous le signe d'intégration ; nous obtiendrons en intégrant :

$$z_0 - z = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} \int_{s_0}^{s} (Q_0 - qs)^2 ds,$$

ou bien

$$z_0 - z = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} \left(Q_0^2 s - Q_0 q s^2 + \frac{1}{3} q^2 s^3 \right).$$

Si l'on suppose que, au bout de la longueur L de la conduite, le débit soit réduit à Q_1 c'est-à-dire si l'on pose $Q_0 = qL + Q_1$, on trouvera, en remplaçant s par L et réduisant :

$$z_0 - z = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} \left[Q_1^2 + Q_1 q L + \frac{1}{3} q^2 L^2 \right].$$

Cette relation entre D, Q_1, q, L et $z_0 - z$ servira à calculer l'une de ces quantités, les autres étant connues.

On peut se demander quel serait le débit de la même conduite, sous la même charge, s'il n'y avait pas de service en route. Ce débit Q' sera évidemment donné par la relation

$$Q'^2 = Q_1^2 + Q_1 q L + \frac{1}{2} q^2 L^2,$$

qui donne à peu près, d'après Bresse :

$$Q' = Q_1^2 + \frac{9}{16} q L.$$

Si tout le débit Q_0 se fait en route de manière que le débit Q_1 à l'extrémité soit nul, la charge est

$$z_0 - z = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} \cdot \frac{1}{3} q^2 L^2 = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} \cdot \frac{1}{3} Q_0^2.$$

Si, au contraire, il n'y avait pas de service en route, pour porter le même débit total Q_0 à l'extrémité, il faudrait une charge

$$z_0 - z = \frac{64 b_1 L}{\pi^2 D^5} \cdot Q_0^2,$$

triple de la précédente.

90. Conduite formée de plusieurs parties de diamètre différents. Règle de Dupuit. — Au lieu de conduites à diamètre graduellement variable on emploie, en pratique, des conduites formées de portions plus ou moins longues, chacune de diamètre constant, ce diamètre étant différent pour les diverses portions. Si l'on applique, à cha-

cune d'elles, la formule simplifiée (6), c'est-à-dire si, pour chaque portion de longueur L_1, L_2, L_3,... et de diamètre D_1, D_2, D_3..., on calcule l'abaissement du plan de charge exprimé par le second membre de cette formule, $\frac{64b_1 Q^2}{\pi^2}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{D^5}$, on trouvera, pour la perte de charge due à la première partie: $\frac{64b_1 Q^2 L_1}{\pi^2 D_1^5}$; faisant le même calcul pour les autres parties et additionnant, il viendra pour la perte de charge totale :

$$\frac{64b_1Q^2}{\pi^2}\left(\frac{L_1}{D_1^5}+\frac{L_2}{D_2^5}+\frac{L_3}{D_3^5}+\ldots\ldots\right)$$

La longueur L′, d'une conduite d'un diamètre donné D qui pour le même débit Q produirait la même perte de charge que la première partie, serait donnée par l'équation $\frac{64b_1 Q^2 L'}{\pi^2 D^5}=\frac{64b_1 Q^2 L_1}{D_1^5}$, ou $L'=L_1\frac{D^5}{D_1^5}$; de même, la longueur d'une conduite d'un diamètre D qui produit la même perte de charge que la seconde partie sera $L_2\frac{D^5}{D_2^5}$, et ainsi de suite ; de sorte que la conduite considérée est équivalente, au point de vue de la perte de charge, à une conduite unique de diamètre D et de longueur :

$$L_1\left(\frac{D}{D_1}\right)^5+L_2\left(\frac{D}{D_2}\right)^5+L_3\left(\frac{D}{D_3}\right)^5+\ldots\ldots$$

c'est ce qu'on appelle la longueur *réduite* ; et la règle qui consiste à remplacer ainsi les conduites successives de différents diamètres par une conduite unique de diamètre D et de longueur réduite est la *règle de Dupuit.*

Il y a lieu d'ajouter, à la perte de charge ainsi calculée, celle qui est due aux changements brusques de section, et que nous avons évaluée plus haut (nos 42 et 43).

91. Conduites branchées.—Considérons trois conduites

AD, BD, CD (fig. 56) aboutissant à un même point D et mettant en

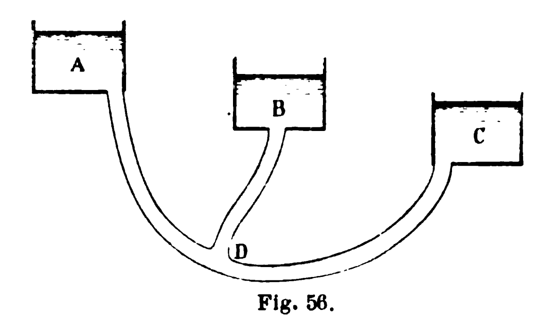


Fig. 56.

communication trois réservoirs A, B, C, dans chacun desquels nous supposons le niveau maintenu constant, et proposons-nous d'étudier les conditions de l'écoulement dans un pareil système. Faisons abstraction des pertes de charge secondaires à l'entrée de chacun des tuyaux, aux coudes s'il en existe et au point d'embranchement D ; supposons que chacune des conduites AD, BD, CD soit d'un diamètre constant. Appelons respectivement z_1, z_2, z_3 les altitudes supposées données des trois niveaux des réservoirs au-dessus d'un plan horizontal inférieur, z_0 l'ordonnée du point d'embranchement D au-dessus du même plan de comparaison, et L_1, L_2, L_3 ; D_1, D_2, D_3 les longueurs et les diamètres des trois conduites, Q_1, Q_2, Q_3 leurs débits, et enfin p la pression inconnue au point d'embranchement D. Supposons, pour fixer les idées, que le niveau du réservoir B soit intermédiaire entre celui des deux autres ou que $z_1 > z_2 > z_3$. Si p_0 est la pression atmosphérique s'exerçant sur les niveaux des trois réservoirs, les hauteurs piézométriques aux points A et D étant respectivement $z_1 + \frac{p_0}{\Pi}$ et $z_0 + \frac{p}{\Pi}$, la perte de charge, dans la conduite AD, sera $\left(z_1 - z_0 - \frac{p - p_0}{\Pi}\right)$ et l'on exprimera les conditions de l'écoulement de cette conduite par l'équation :

$$z_1 - z_0 - \frac{p - p_0}{\Pi} = \frac{64 b_1}{\pi^2} \frac{Q_1 L_1}{D^5},$$

De même, on aura, pour les deux autres conduites, en supposant que le niveau piézométrique en D soit plus élevé qu'en B, c'est-à-dire que l'écoulement ait lieu, dans ces deux conduites, dans le sens DB et DC :

$$z_0 - z_2 + \frac{p-p_0}{\Pi} = \frac{64b_1}{\pi^2}\frac{Q_2^2L_2}{D^5},$$

$$z_0 - z_3 + \frac{p-p_0}{\Pi} = \frac{64b_1}{\pi^2}\frac{Q_3^2L^2}{D^5},$$

équations auxquelles il convient d'ajouter, d'après l'hypothèse que nous venons de faire, la suivante :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

ce qui donne quatre équations pour déterminer quatre inconnues qui pourront être, suivant les cas, p, D_1, D_2, D_3 ou bien p, Q_1, Q_2, Q_3.

Si le niveau piézométrique en D était moins élevé qu'en B, l'écoulement dans la seconde conduite aurait lieu de B vers D et les deux premiers réservoirs alimenteraient le troisième ; la seconde équation serait alors :

$$z_0 - z_2 - \frac{p-p_0}{\Pi} = \frac{64b_1}{\pi^2}\frac{Q_2^2L_2}{D^5}.$$

et la quatrième :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

Ces équations se résolvent par tâtonnement. Supposons, par exemple, donnés les diamètres et soit à déterminer les débits. On prendra pour p une valeur arbitraire et l'on choisira celle qui mettrait le niveau piézométrique au point D à la même hauteur que le réservoir intermédiaire, c'est-à-dire qu'on annulera le premier membre de la seconde équation, et par suite Q_2. On aura, d'après les deux autres :

$$Q_1 = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{(z_1-z_2)D_1^5}{b_1L_1}} \quad ; \quad Q_3 = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{(z_2-z_3)D_3^5}{b_1L_3}}.$$

Si ces deux valeurs sont égales, la quatrième équation sera satisfaite, puisque $Q_2 = 0$ et le problème sera résolu. Si elles sont inégales, cette dernière équation n'étant pas vérifiée, on aura $Q_1 > Q_3$ ou $Q_1 < Q_3$. Dans le premier cas, on augmentera la valeur de p, ce qui aura pour conséquence de diminuer Q_1, d'augmenter Q_3 et de donner à Q_2 une valeur correspondant à un écoulement dans le sens BD. Dans le second cas, on diminuera au contraire p, ce qui augmentera Q_1, diminuera Q_3 et donnera, pour Q_2, une valeur correspondant à un écoulement dans le sens DB. On calculera, d'après la nouvelle valeur arbitraire de p, les valeurs correspondantes de Q_1, Q_2, Q_3 qui devront vérifier la quatrième équation sous l'une ou l'autre de ses deux formes, et l'on corrigera la valeur de p jusqu'à ce que cette vérification ait lieu.

Si, au lieu des diamètres, ce sont les débits Q_1, Q_2, Q_3 qui sont donnés, et si l'on doit en déduire les diamètres des conduites, la quatrième équation devant être vérifiée par les données et ne contenant pas les inconnues, il n'y a, en réalité, pour calculer celles-ci que les trois premières, ce qui laisse le problème indéterminé. On doit alors avoir recours à une nouvelle condition à laquelle on astreindra les diamètres des conduites. On peut, par exemple, chercher quels seront les diamètres qui rendront minimum la dépense en argent, ce qui, en admettant que le prix d'une conduite soit proportionnel à son diamètre, revient à rendre minimum la somme

$$L_1D_1 + L_2D_2 + L_3D_3.$$

En substituant à D_1, D_2, D_3 leurs valeurs en fonction de Q_1, Q_2, Q_3 et égalant à zéro la dérivée de cette expression prise par rapport à la variable indépendante p, on établit des équations du degré $\frac{5}{2}$ dont la résolution laborieuse ne saurait être considérée comme pratique. Généralement, on se donne arbitrairement l'un des diamètres à déterminer et les deux autres se déduisent des équations précédentes, ainsi que la pression p au point D.

Celle-ci doit toujours être positive et au moins égale à la moitié de la pression atmosphérique, pour que l'écoulement ne soit pas troublé par le dégagement de l'air contenu en dissolution dans l'eau.

92. Calcul d'une conduite élévatoire. — En général, l'eau destinée à la distribution dans les villes doit être puisée au moyen de machines qui seront étudiées dans un autre volume de l'*Encyclopédie*, et refoulée dans un réservoir élevé. Le calcul du diamètre de la conduite de refoulement donne lieu à une remarque intéressante. Désignons par p le prix du cheval-vapeur de la machine élévatoire, y compris la dépense d'entretien et d'exploitation capitalisée, et par p' le prix de l'unité de longueur d'une conduite ayant pour diamètre l'unité. Si N est le nombre de chevaux-vapeur de la machine, D le diamètre de la conduite et L sa longueur, la dépense en argent de la machine et de la conduite représentera un capital $P = pN + p'DL$.

Soit Q le volume d'eau à élever par seconde et H la hauteur d'élévation. Le travail utile de la machine, par seconde, sera ΠQH ; mais elle devra en outre vaincre le travail de frottement dans la conduite, ce qui revient à dire que la hauteur réelle d'élévation H sera augmentée de la perte de charge qui, pour la longueur L sera, d'après ce que nous venons de voir, $\frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}$. Le travail réel à développer par la machine sera ainsi $\Pi Q\left[H + \frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}\right]$. Le nombre N de chevaux-vapeur s'obtiendra en divisant ce travail, exprimé en kilogrammètres, par le rendement m de la machine et par 75. Il en résulte que le capital aura pour expression :

$$P = p\frac{\Pi Q}{75m}\left[H + \frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}\right] + p'DL.$$

Si l'on veut choisir le diamètre D de la conduite de manière

que P soit minimum, il faut égaler à zéro la dérivée $\frac{dP}{dD}$, ce qui donne :

$$-5\frac{p\Pi Q}{75m}\cdot\frac{64b_1Q^2L}{\pi^2D^6}+p'L=0.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{D^6}{Q^3}=\frac{64b_1p\Pi}{15m\pi^2p'},\ \text{ou bien}\ \frac{D^2}{Q}=\frac{4}{\pi}\sqrt[3]{\frac{b_1\pi\Pi}{15m}\cdot\frac{p}{p'}},$$

ou bien :

$$D=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt[6]{\frac{b_1\pi\Pi}{15m}\frac{p}{p'}}\cdot\sqrt{Q}.$$

Le coefficient de $\sqrt{Q}$ ne dépend ni de la longueur L, ni de la hauteur H, ni du débit, il ne dépend que du rendement m de la machine et des prix p et p'. Le rapport variable $\frac{p}{mp'}$, ne figure d'ailleurs que par sa racine sixième, c'est-à-dire que ses variations n'ont pas beaucoup d'influence sur la valeur du coefficient qui multiplie $\sqrt{Q}$. Soit, par exemple, $b_1=0{,}0004$; $m=0{,}75$; $p=5{,}000$ fr.[1] ; $p'=100$, il viendra :

$$D = 1{,}50\sqrt{Q}.$$

Si, au lieu de ces valeurs, qui peuvent être considérées comme moyennes, on avait, dans des circonstances exceptionnelles, le rapport $\frac{p}{p'}=100$, au lieu de 50, on trouverait $D=1.70\sqrt{Q}$; et si, au contraire, ce rapport n'était que de 25, au lieu de 50, la valeur de D serait $D=1.35\sqrt{Q}$, ce qui confirme bien ce que nous venons de dire au sujet de l'influence des variations des quantités qui entrent dans la formule. La valeur moyenne $1.50\sqrt{Q}$, qui a été indiquée par Bresse, peut donc toujours être adoptée.

1. Ce prix de 5.000 fr. peut être ainsi justifié : acquisition de la machine, 1.000 fr.; frais annuels, par cheval, consommation de combustible, 4 tonnes à 30 fr., 120 fr.; entretien et réparation, 30 fr.; amortissement, 50 fr.. Total 200 fr., représentant un capital de 4.000 fr.

On peut remarquer que la vitesse moyenne U, dans la conduite ascensionnelle, qui est égale à $\frac{4Q}{\pi D^2}$, a pour valeur, d'après l'expression ci-dessus de $\frac{D^2}{Q}$:

$$(7) \qquad U = \sqrt[3]{\frac{15\,mp'}{b_1\,\pi\Pi p}};$$

ce qui, avec les valeurs précédentes de m, p et p', donne :

$$U = 0^m,564.$$

Et cette valeur moyenne de la vitesse U peut, pour les mêmes raisons qui viennent d'être développées, être considérée comme à peu près constante ou applicable à tous les cas pratiques. En tout cas, quelle que soit cette vitesse la plus économique (7), d'après les valeurs locales de m, p et p', elle restera la même si, au lieu d'une seule conduite réunissant la machine au réservoir, il y en a deux ou un plus grand nombre. Alors, en effet, s'il y a n conduites, par exemple, le débit de chacune étant Q et son diamètre D, le débit total sera nQ, mais la hauteur correspondant à la perte de charge, à ajouter à H pour calculer la puissance de la machine, sera toujours $\frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}$. L'expression de la dépense totale P sera alors :

$$P = p.\frac{\Pi.nQ}{75m}\left[H + \frac{64\,b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}\right] + p'.nDL.$$

et l'équation à résoudre pour obtenir le minimum de P sera exactement la même que ci-dessus. On en tirera donc toujours la même valeur de $\frac{D^2}{Q}$ ou de U.

Cette circonstance, de deux ou plusieurs conduites ascensionnelles, se présente fréquemment et en particulier lorsque la ville qu'il s'agit d'alimenter se trouve placée entre la machine élévatoire et le réservoir. La vitesse la plus économique est indépendante du nombre de ces conduites, et elle a une valeur déterminée dans chaque localité par celles de m, p et p'.

Cette conclusion, ainsi que les précédentes, suppose toutefois que l'on fait abstraction des variations du coefficient b_1 avec le diamètre et avec la vitesse. Elle est assez exacte pour une première approximation et cette approximation est généralement suffisante, car le diamètre à adopter pour les conduites ascensionnelles n'a pas besoin d'être déterminé avec une exactitude absolue eu égard à la nécessité économique où l'on se trouve de n'employer que des conduites ayant les diamètres existant dans le commerce.

98. Calcul d'une conduite en dérivation. — M. Sorel, ingénieur des ponts et chaussées, m'a fait remarquer qu'une analyse semblable peut être faite pour le cas où, au lieu d'avoir recours à une machine élévatoire, on veut prendre l'eau directement dans une rivière dont la pente I, aux abords du point où doit se faire la prise d'eau, est donnée.

Soit h la hauteur, également donnée, du niveau que doit atteindre l'eau dans le réservoir, au-dessus de la ligne de pente I supposée prolongée jusqu'à la verticale de ce réservoir. Si L est la longueur de la conduite véritable inconnue du problème, et J la perte de charge par mètre on aura, d'après ces définitions :

$$h = L(I - J).$$

Si l'on appelle encore D le diamètre fonction déterminée de la longueur L de la conduite, p' le prix de l'unité de longueur d'une conduite ayant un diamètre égal à l'unité, la dépense d'établissement sera $p'DL$, et il pourra y avoir lieu d'y ajouter une dépense pour acquisition de terrains sur tout ou partie de la longueur L. Si p'' est le prix, par unité de longueur, des terrains nécessaires et si l'on suppose que, sur une longueur L', l'acquisition ne soit pas nécessaire, la dépense dont il s'agit sera $p''(L - L')$ et la dépense totale P, à rendre minimum, sera exprimée par :

$$P = p'DL + p''(L - L') = (p'D + p'')L - p''L'.$$

D'autre part, Q étant le débit donné de la conduite, on a entre D et J, la relation :

$$J = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}.$$

Dans l'expression de P, substituons à L sa valeur $\frac{h}{I - J}$, après avoir posé, pour simplifier :

$$d^5 = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2 I},$$

cette expression devient :

$$P = \frac{p' D + p''}{I} \cdot \frac{h D^5}{D^5 - d^5} - p'' L'.$$

Et la dérivée de P par rapport à D étant égalée à zéro donnera l'équation :

$$\left(\frac{D}{d}\right)^6 - 6 \left(\frac{D}{d}\right) - 5 \frac{p''}{p' d} = 0,$$

Lorsque $p'' = 0$, ou qu'on ne tient pas compte de la dépense d'acquisition des terrains, cette équation fournit immédiatement :

$$D = d \sqrt[5]{6} = 1{,}432 d = \sqrt[5]{\frac{6 \times 64\, b_1 Q^2}{\pi^2 I}}.$$

ou encore :

$$J = \frac{1}{6} I.$$

on en déduira $$L = \frac{6h}{5I}.$$

Lorsque p'' n'est pas négligeable, le rapport $\frac{p''}{p'd}$ du prix du terrain à celui de la conduite d'un diamètre d est toujours inférieur à l'unité, et alors la résolution de l'équation du 6e degré, en $\frac{D}{d}$, peut se faire au moyen du tableau suivant, dressé par M. Sorel, qui donne les valeurs correspondantes des deux rapports $\frac{D}{d}$ et $\frac{p''}{p'd}$:

$\frac{p''}{p'd}$	$\frac{D}{d}$	$\frac{p''}{p'd}$	$\frac{D}{d}$
0,053	1,44	0,478	1,50
0,119	1,45	0,532	1,51
0,185	1,46	0,642	1,52
0,254	1,47	0,820	1,54
0,326	1,48	0,919	1,56
0,400	1.49	1,015	1,58

On obtient, en général, une approximation suffisante en prenant pour D et par suite pour L la valeur ci-dessus, correspondant à $J = \frac{1}{6}$ I, trouvée pour le cas où il n'y a pas d'acquisition de terrains. On voit en effet que, même pour des terrains très chers, où l'on aurait $p'' = p'd$, le diamètre D serait porté seulement à 1,58 d au lieu de 1,43 d, c'est-à-dire augmenté seulement d'un dixième environ. L'augmentation résultant de la prise en considération du prix des terrains sera toujours inférieure à ce chiffre.

94. Consolidation des coudes des conduites. — Lorsque l'on établit une conduite d'eau, il ne faut jamais négliger de tenir compte de la pression qui s'exerce dans les coudes et qui tend à y disloquer les tuyaux. Si l'on considère une conduite présentant un coude tel que AB (fig. 57) et si l'on y suppose l'eau en repos, la masse liquide comprise entre les sections extrêmes AA', BB' du coude, recevra, de l'eau contenue dans le reste de la conduite, des pressions qui se transmettront à la paroi AB du coude et qui tendront à le séparer des parties rectilignes. Les assemblages des tuyaux ne sont

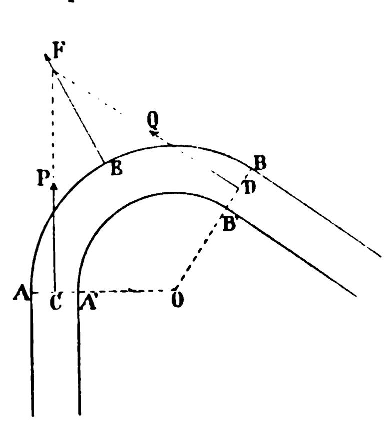


Fig. 57

pas, en général, en état de résister à de pareils efforts, et les tuyaux se sépareront effectivement si l'on n'a pas eu la précaution d'appuyer la partie convexe AB du coude sur un massif très résistant, ordinairement en maçonnerie ou en charpente. Dans l'état statique, l'effort auquel ce massif doit résister est simplement la résultante des pressions qui s'exercent sur les deux sections extrêmes AA', BB'. Lorsque l'eau est en mouvement il faut ajouter à cette pression l'action due à la force centrifuge que l'on pourra calculer approximativement en supposant que la masse d'eau comprise dans le coude est concentrée en son sommet. Alors l'action de la force centrifuge sera égale à cette masse multipliée par $\frac{U^2}{\rho}$ en appelant U la vitesse moyenne et ρ le rayon de courbure du coude. Cette action est souvent assez petite, et négligeable par rapport aux pressions statiques.

§ 3

ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT

95. Lois de la variation des vitesses à l'intérieur d'un tuyau de conduite. — D'expériences faites sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux publiées en 1857, Darcy avait conclu que dans une conduite circulaire de rayon R, la vitesse v d'un filet liquide, à une distance r du centre, était liée à la vitesse V du filet central et à la différence de charge J par la relation :

$$V - v = \frac{K}{R} r^{\frac{3}{2}} \sqrt{J};$$

K étant un coefficient numérique.

Cette équation, différentiée par rapport à r, donne :

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{3}{2}\frac{K}{R}\sqrt{rJ}.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{2R}{3K}$, élevant au carré et multipliant encore par πr, on obtient :

$$\frac{2}{9K^2}\left(R\frac{dv}{dr}\right)^2 . 2\pi r = \pi r^2 J;$$

et sous cette forme on reconnaît l'équation d'équilibre d'une masse liquide cylindrique de rayon r, à la condition que le frottement, par unité superficielle de son contour, soit exprimé par $\frac{2}{9K^2}\left(R\frac{dv}{dr}\right)^2$. En effet le premier membre représente alors la force retardatrice sur l'unité de longueur, et le second membre, la force accélératrice. D'après cela, le frottement mutuel des couches liquides serait proportionnel au carré de $\frac{dv}{dr}$ ou de leur vitesse relative, et en même temps au carré du rayon R du tuyau considéré. Ce résultat déduit de l'expérience était en contradiction avec l'hypothèse généralement admise depuis Newton et surtout depuis Navier et Poisson, qui avaient supposé, avec tous les hydrauliciens, que le frottement intérieur des liquides était simplement proportionnel à la vitesse relative $\frac{dv}{dr}$. Mais M. Bazin, en observant des canaux découverts de forme demi-circulaire et de dimension bien plus grande que les tuyaux sur lesquels Darcy avait opéré, a reconnu que la loi de la variation des vitesses était plus exactement représentée par l'équation :

$$\frac{V - v}{\sqrt{RJ}} = K\left(\frac{r}{R}\right)^3; \qquad (9)$$

et il a expliqué que si Darcy n'avait pas trouvé une expression de cette forme, cela pouvait être attribué à ce que ses observations, à raison des dimensions relativement faibles des conduites sur lesquelles elles avaient porté, ne s'étaient pas étendues à une distance du centre supérieure aux deux tiers du rayon. Dans la partie voisine du centre les courbes repré-

sentant les deux lois de variation des vitesses ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre : elles sont en effet toutes les deux normales au filet central qui a la vitesse maximum. Elles ont donc, en ce point, même tangente, et en leur donnant un autre point commun, elles ne peuvent pas s'écarter beaucoup dans la partie intermédiaire. Ce n'est donc que dans la région la plus éloignée du centre que peut se manifester la divergence des deux courbes et c'est précisément celle que Darcy n'a pas observée. « Il ne serait donc pas impossible, dit M. Bazin, que, dans un tuyau fermé, la décroissance des vitesses dans le voisinage de la paroi s'opérât plus rapidement que ne l'indique la formule obtenue par M. Darcy. »

La formule de M. Bazin, différentiée par rapport à r, donne :

$$(10) \qquad -\frac{dv}{dr}\frac{R^2}{3K\sqrt{RJ}}=r^2.$$

Multiplions-en les deux membres par πJ, et remplaçons, dans le premier membre, $\sqrt{RJ}$ par $U\sqrt{b_1}$ déduit de $RJ = b_1U^2$; nous obtiendrons :

$$-\left(\frac{R}{2}\frac{\sqrt{b_1}}{3K}\frac{R}{r}U\frac{dv}{dr}\right).2\pi r=\pi r^2 J.$$

La parenthèse du premier membre exprime encore, pour les mêmes raisons que tout à l'heure, la force retardatrice sur l'unité de longueur, ou le frottement par unité superficielle du liquide sur lui-même. On voit que ce frottement est alors proportionnel à la première puissance de la vitesse relative $\frac{dv}{dr}$, conformément aux hypothèses anciennes, au rayon moyen $\frac{R}{2}$, et inverse de la distance proportionnelle $\frac{r}{R}$ de la couche considérée au centre du tuyau.

Nous avons indiqué plus haut (n° 28, page 55) les raisons

qui pouvaient être invoquées en faveur de l'introduction de ces deux derniers facteurs : ils sont destinés à tenir compte du manque de parallélisme des filets, qui engendre les tourbillonnements et mouvements compliqués ou obliques absorbant une portion de force vive non utilisée pour l'écoulement proprement dit. Ce manque de parallélisme est d'autant plus prononcé que les dimensions de la section transversale sont plus grandes et que le filet considéré est relativement moins éloigné de la paroi solide. Darcy avait reconnu, par ses observations, l'influence des dimensions absolues du tuyau, puisqu'il avait signalé la présence, dans l'expression du frottement intérieur, du facteur R^2 proportionnel au carré du rayon; facteur qui se retrouve, en réalité, dans l'expression résultant de la formule de M. Bazin.

Cette dernière formule donne des résultats identiques à ceux que nous avons trouvés plus haut ; l'expression ci-dessus, pour le frottement intérieur, ne diffère de celle que nous avons adoptée (page 55), d'après M. Boussinesq, que par le facteur U (vitesse moyenne) au lieu de u_0 (vitesse à la paroi), et aussi par le facteur numérique.

Dans sa formule (9) ci-dessus, M. Bazin a déterminé expérimentalement la valeur du coefficient numérique K ; il a trouvé, dans quatre séries d'expériences, des nombres variant entre 18 et 23, et généralement assez voisins de 21, et c'est ce dernier chiffre qu'il a adopté La formule, écrite alors :

$$V - v = 21 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sqrt{RJ},$$

donne :

$$v = V - 21 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sqrt{RJ} ;$$

et pour la vitesse à la paroi, désignée plus haut par u_0 mais que M. Bazin appelle w :

$$w = V - 21 \sqrt{RJ}.$$

La vitesse v à une distance quelconque r du centre peut s'écrire :

$$v = w + 21\sqrt{\mathrm{RJ}}\left(1 - \frac{r^3}{\mathrm{R}^3}\right) = w\left[1 + 21\frac{\sqrt{\mathrm{RJ}}}{w}\left(1 - \frac{r^3}{\mathrm{R}^3}\right)\right];$$

forme absolument identique à celle que nous avons trouvée [équation (24), page 60] par des considérations théoriques, à la condition d'admettre que le facteur $21\frac{\sqrt{\mathrm{RJ}}}{w}$ peut être assimilé à la constante que nous avons appelée $\frac{2\mathrm{B}'}{3\mathrm{A}'}$.

On peut exprimer la vitesse moyenne U en fonction de la vitesse maximum V. Il suffit de multiplier v par la surface $2\pi r dr$ d'une couche annulaire élémentaire et d'intégrer de 0 à R, on obtient ainsi :

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\pi \mathrm{R}^2}\int_0^{\mathrm{R}}\left[\mathrm{V} - 21\left(\frac{r^3}{\mathrm{R}^3}\right)\sqrt{\mathrm{RJ}}\right]2\pi r dr;$$

ou bien :

$$\mathrm{U} = \mathrm{V} - 8{,}4\sqrt{\mathrm{RJ}};$$

ou, encore, en remplaçant RJ ou $2.\frac{\mathrm{DJ}}{4}$ par $2b_1\mathrm{U}^2$:

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}} = 1 + 8{,}4\sqrt{2b_1} = 1 + 11{,}9\sqrt{b_1}\,.$$

Le rayon r' de la couche où la vitesse v est égale à la vitesse moyenne U est donnée par :

$$\frac{r'^3}{\mathrm{R}^3} = \frac{8{,}4}{21} = \frac{2}{5}; \qquad \text{ou} \qquad r = 0{,}737\mathrm{R}.$$

En réalité, la vitesse moyenne ne se rencontre qu'un peu plus loin du centre.

Pour des tuyaux dans lesquels b_1 aurait les valeurs moyennes

$$b_1 = 0{,}0004, \quad 0{,}000360, \quad 0{,}000325;$$

on aurait :

$$\mathrm{V} = 1.238\mathrm{U}, \quad 1.226\mathrm{U}, \quad 1.214\mathrm{U}.$$

La vitesse à la paroi, ou la vitesse minimum :

$$\frac{w}{U} = 1 - 17.85 \sqrt{b_1} \; ;$$

serait, dans les mêmes hypothèses :

$$w = 0,643U, \quad 0,661U, \quad 0,679U.$$

Elle serait alors un peu plus que la moitié de la vitesse maximum.

Toutes les formules ci-dessus, déduites de celle qu'a donnée M. Bazin pour des canaux demi-circulaires s'accordent bien avec l'observation ; c'est pourquoi nous pensons qu'elles doivent être adoptées de préférence à celles que Darcy avait proposées d'après des expériences sur les tuyaux. Un motif de cette préférence, d'ordre purement théorique, nous semble cependant devoir être invoqué en première ligne : c'est la forme à laquelle conduisent les formules de Darcy pour l'expression du frottement intérieur. Nous verrons, en parlant des canaux découverts, sur lesquels des observations ont été faites en bien plus grand nombre et dans des conditions bien plus variées que sur les tuyaux, que tous les résultats s'accordent pour démontrer que le frottement intérieur du liquide y est proportionnel à la première puissance de la vitesse relative. Il semble dès lors impossible d'admettre que, dans les tuyaux, les lois de ce frottement soient différentes. C'est pourquoi les formules de M. Bazin, qui correspondent à cette expression du frottement intérieur, doivent, *à priori*, être préférées. D'ailleurs elles s'accordent, tout aussi bien que celles de Darcy, avec les résultats expérimentaux donnés par ce dernier.

En divisant l'équation (10) par l'équation (9) on obtient la valeur de $\frac{dv}{dr}$ en fonction de v et de r, qui est :

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{1}{3r}(V - v),$$

et cette expression différentielle peut servir à tracer, par ses

tangentes, la courbe représentative des vitesses, c'est-à-dire la parabole du 3e degré représentée par l'équation (9).

Nous donnerons au chapitre VI, en parlant des procédés de jaugeage des cours d'eau, la description des instruments qui ont été employés pour mesurer les vitesses aux divers points de la section transversale d'un courant, et qui ont permis d'établir expérimentalement les lois qui viennent d'être énoncées.

CHAPITRE V

CANAUX DÉCOUVERTS

---

§ 1. *Mouvement uniforme.* — § 2. *Etude détaillée de l'écoulement.* — § 3. *Applications.* — § 4. *Mouvement varié.* — § 5. *Remous.* — § 6. *Etranglement ou élargissement du lit.*

§ 1.

MOUVEMENT UNIFORME

96. Division du sujet. — La question de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, qui constitue la partie la plus intéressante de l'hydraulique, est beaucoup plus compliquée que celle de l'écoulement dans les tuyaux. Elle n'est résolue d'une manière à peu près complète que pour le cas où le canal a une forme régulière, présentant une section transversale constante ou à peu près constante, un axe rectiligne ou à courbure insensible. Dès qu'il s'agit de cours d'eau naturels, dans lesquels ces conditions ne sont pas remplies, et surtout dans lesquels le lit se compose de matières susceptibles d'être entraînées par le courant, les conditions de l'écoulement ne peuvent plus être étudiées que d'une façon empirique et approximative. Ce n'est que par une extension souvent abusive que l'on applique à de pareils cours d'eau les formules et les lois que l'on a trouvées pour des canaux rectilignes à section et à pente régulière.

Tout au plus ces formules peuvent-elles être applicables à certaines parties régulières des cours d'eau naturels assimilables à des canaux [1]. Mais lorsqu'il s'agit de cours d'eau ordinaires, plus ou moins irréguliers, cette application ne donne plus qu'une approximation qui, souvent, s'écarte beaucoup de la réalité.

Nous diviserons donc l'étude de l'écoulement de l'eau dans les cours d'eau en deux parties distinctes. La première sera consacrée aux *canaux découverts*, en désignant par ce mot tout cours d'eau de forme régulière, à pente sensiblement constante et à peu près rectiligne. Dans l'autre, consacrée aux *cours d'eau naturels*, nous exposerons les quelques règles empiriques qui ont été établies au sujet de ces cours d'eau, nous les justifierons le mieux possible, et nous dirons dans quelle mesure les formules trouvées dans la première partie peuvent y être appliquées.

Dans la première partie, consacrée aux canaux, nous étudierons d'abord le mouvement uniforme, puis le mouvement permanent varié.

L'étude du mouvement non permanent fera l'objet d'un chapitre spécial.

97. Mouvement uniforme. — Le mouvement uniforme de l'eau est caractérisé par ce fait que, dans un canal rectiligne, à pente et à section transversale constantes, la vitesse d'une molécule reste la même tout le long d'un même filet liquide. Ainsi défini, le mouvement uniforme ne pourrait être réalisé, sans doute, que dans des canaux à section transversale très petite, comparables aux tubes capillaires, et dans lesquels la vitesse serait extrêmement réduite. Aussitôt que les

1. Encore convient-il d'observer que l'écoulement dans ces parties régulières est influencé, sur une portion de la longueur, par les conditions antérieures. On ne peut d'ailleurs rencontrer que très exceptionnellement de telles parties, la mobilité du lit et des rives tendant à faire disparaitre la régularité qui aurait existé à un moment donné.

dimensions transversales deviennent sensibles, la vitesse des molécules liquides change, à chaque instant, de grandeur et de direction. Mais on conserve la dénomination de mouvement uniforme à celui dans lequel la vitesse *moyenne locale* des molécules qui passent en chaque point est constante, et reste la même tout le long d'un même filet liquide. Et l'on admet que cette condition est réalisée lorsque le canal est rectiligne et que sa pente et sa section transversale restent constantes.

Il est bien certain que la vitesse moyenne U est la même pour toutes les sections : cette vitesse étant le quotient du volume Q débité en une seconde, par l'aire ω de la section transversale ; mais ce n'est que par induction que l'on en conclut la constance des vitesses moyennes locales, car chaque molécule possède, en réalité, une vitesse oblique sur la direction du courant ; il en résulte des croisements en tous sens des filets liquides que l'on suppose parallèles, et rien n'est moins prouvé que l'invariabilité de la vitesse en chaque point. Au contraire, nous dirons plus loin que, même en ne comparant que les composantes des vitesses parallèles au courant, ces composantes varient, en chaque point, dans des limites assez étendues ; à plus forte raison les vitesses elles-mêmes doivent-elles se modifier, puisqu'elles changent constamment de direction.

Dans la complication du mouvement réel, la vitesse moyenne locale en chaque point et sur toute l'étendue d'un même filet reste sensiblement constante, à la condition qu'elle soit observée pendant un temps assez long, et l'on peut, en ne considérant que ces vitesses moyennes locales, admettre que le liquide se meut d'un mouvement uniforme par filets parallèles. Mais il ne faut pas oublier que ce n'est là qu'une moyenne dont la réalité diffère notablement à chaque instant.

98. Formule générale du mouvement uniforme. — Si, alors, dans un pareil canal, nous isolons une portion d'une longueur égale à l'unité et limitée par deux sections transversales parallèles, rien ne distinguant l'une de ces sections de

l'autre, les pressions sur chacun de leurs éléments y seront les mêmes et disparaîtront des équations. Il faudra donc, ainsi que l'a remarqué Du Buat, puisque le mouvement est uniforme, qu'il y ait équilibre entre la force accélératrice due à la pesanteur et les forces retardatrices dues au frottement. Ces dernières proviennent surtout des parois du canal. Il faut faire entrer en ligne de compte, dans les résistances, les frottements intérieurs du liquide qui proviennent des vitesses obliques, ou des composantes des vitesses des molécules fluides perpendiculaires à la direction du mouvement. Ces composantes ne contribuent en rien à l'écoulement, et elles donnent lieu à des frottements mutuels, à des tourbillonnements qui constituent une perte de force vive et par suite une résistance. Mais l'obliquité des vitesses est elle-même due à la rugosité des parois et l'on peut admettre que toutes les résistances, par conséquent, proviennent de cette cause unique. Elles seront alors, en totalité, proportionnelles à la longueur χ du périmètre mouillé. Elles seraient aussi fonction de la vitesse à la paroi variable d'un point à l'autre de celle-ci. On l'exprime, comme nous l'avons dit, en fonction de la vitesse moyenne U par $\chi f(U)$, en appelant f une fonction à déterminer. Cette résistance, doit, d'après la remarque de du Buat, être égale à la composante du poids de la masse liquide considérée. Ce poids est $\Pi\omega$, en appelant Π le poids spécifique du liquide, et sa composante suivant la pente I sera $\Pi\omega \sin I$ ou simplement $\Pi\omega I$ en mettant le petit angle I au lieu de son sinus. L'équation du mouvement sera ainsi

$$\Pi\omega I = \chi f(U);$$

ou bien en divisant par $\Pi\chi$:

$$\frac{\omega}{\chi} I = \frac{f(U)}{\Pi}.$$

Le rapport $\frac{\omega}{\chi}$ est le rayon moyen de la section transversale que nous désignerons par R; la fonction $f(U)$ peut toujours

être mise sous la forme $\Pi b\, U^2$, en appelant b un coefficient qui serait lui-même, au besoin, une fonction de U ou des autres éléments ; et alors l'équation du mouvement uniforme prendra la forme suivante, sous laquelle elle est généralement donnée :

$$(1) \qquad RI = bU^2.$$

Elle est identique, dans la forme, à celle du mouvement dans les tuyaux, et elle aurait pu, comme celle-ci, se déduire de la formule générale démontrée au n° 26.

En résolvant cette équation par rapport à U, on l'écrit :

$$(2) \qquad U = \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{RI}, \qquad \text{ou} \qquad U = C\sqrt{RI};$$

le coefficient C étant, comme $\frac{1}{\sqrt{b}}$ dont il tient la place, une fonction de U, de R, de I, et surtout de la rugosité de la paroi.

Il est intéressant de pouvoir passer facilement d'un de ces coefficients à l'autre. La table VIII, à la fin du volume, donne les valeurs de b correspondant à celles de C pour tous les besoins de la pratique.

99. Formules anciennes. — Comme pour les tuyaux, Prony a proposé, pour le coefficient b, la forme $b + \frac{a}{U}$, ce qui revient à écrire

$$RI = aU + bU^2;$$

et d'après quelques expériences de du Buat, il a proposé les valeurs suivantes pour les nombres a et b :

$$a = 0{,}000044 \qquad , \qquad b = 0{,}000309.$$

Eytelwein a donné des valeurs un peu différentes quoique déduites des mêmes expériences.

Depuis longtemps les ingénieurs italiens appliquaient une formule simplifiée, dite de Tadini, dans laquelle ils considé-

raient les coefficients b et C comme constants ; cette formule, qui est

$$(3) \qquad RI=0,0004\,U^2, \quad \text{ou} \quad U=50\sqrt{RI},$$

est suffisante lorsqu'il s'agit de cours d'eau tranquilles, profonds et à faible pente, et qu'on ne désire pas une grande approximation. Elle peut être utilisée pour un avant-projet.

St. Venant a proposé de remplacer le terme U^2 par la puissance $\frac{21}{11}$ de la vitesse moyenne et il a donné les formules :

$$RI=0,0004\,U^{\frac{21}{11}}, \quad \text{ou} \quad U=60(RI)^{\frac{11}{21}},$$

qui ne sont pas employées, malgré les tables qui ont été dressées pour en faciliter l'usage.

Toutes ces formules ont en effet un grave défaut, c'est de ne tenir aucun compte de la rugosité des parois. A la rigueur, pour les tuyaux, on a pu dans une certaine mesure, proposer une sorte de valeur moyenne pour les coefficients, parce que, dans la pratique, les tuyaux en service depuis un certain temps parviennent à un état de rugosité moyenne peu différent de l'un à l'autre, lorsque les eaux qu'ils conduisent ne sont pas trop incrustantes. Mais pour les cours d'eau, il n'en est pas ainsi. La rugosité des parois varie dans des limites très étendues et a pour conséquence de modifier, dans une proportion considérable, pour les cours d'eau de faibles dimensions au moins, les valeurs des coefficients qui doivent en tenir compte. Ce n'est donc qu'avec restriction et pour des cours d'eau définis dont les parois ont un degré déterminé de rugosité que l'on peut adopter des formules à coefficient constant.

100. Formules modernes. — MM. Darcy et Bazin mirent cette conclusion en évidence par les expériences qu'ils exécutèrent sur une rigole détachée du canal de Bourgogne. Les résultats de ces expériences ont été publiés par M. Bazin,

qui a proposé par le coefficient b la forme $\alpha + \frac{\beta}{R}$, analogue à celle que Darcy avait déjà donnée pour les tuyaux de conduite, en attribuant à ce coefficient les valeurs suivantes pour quatre catégories de parois, auxquelles MM. Ganguillet et Kutter ont ajouté la cinquième (parois en gravier) :

1. *Parois très unies,* ciment lissé, bois raboté, etc.... $b = 0,00015\left(1 + \frac{0,03}{R}\right)$

2. *Parois unies,* pierres taillées, briques, planches, etc. $b = 0,00019\left(1 + \frac{0,07}{R}\right)$

3. *Parois peu unies,* maçonnerie de moellons .... $b = 0,00024\left(1 + \frac{0,25}{R}\right)$

4. *Parois en terre*.............................. $b = 0,00028\left(1 + \frac{1,25}{R}\right)$

5. *Parois en gravier*............................ $b = 0,00040\left(1 + \frac{1,75}{R}\right)$

La formule de MM. Darcy et Bazin, ainsi écrite :

$$RI = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right)U^2 = bU^2,$$

et dans laquelle α et β ont les valeurs qui viennent d'être données, peut, comme toutes les autres, se mettre sous la forme $U = C\sqrt{RI}$, en attribuant au coefficient C la signification :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}}.$$

La table IX donne les valeurs à adopter pour ce coefficient C d'après les grandeurs du rayon moyen R, pour les diverses natures de parois. On en déduirait, au moyen de la table VIII, les valeurs correspondantes du coefficient b, dans la formule $RI = bU^2$.

MM. Ganguillet et Kutter ont montré, par la discussion d'un très grand nombre d'expériences et d'observations, que, pour une même nature de parois, le coefficient b ou C devait varier, non-seulement avec le rayon moyen R, mais aussi avec la pente I du cours d'eau, et ils ont conclu à l'adoption dans la

formule $U = C\sqrt{RI}$, de la forme suivante pour le coefficient C:

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}}.$$

Le nombre désigné par n est variable suivant la nature de la paroi, dont il mesure en quelque sorte la rugosité. Il a les valeurs suivantes:

	n	$\frac{1}{n}$
1° *Parois très unies* : ciment lissé, bois raboté, etc......	0,010	100
2° *Parois unies* : pierres taillées, briques..............	0,013	77
3° *Parois peu unies* : maçonnerie de moellons..........	0,017	58
4° *Parois rugueuses* : moellons bruts..................	0,020	50
5° *Parois en terre*..................................	0,025	40
6° *Parois en gravier*, ou plantes aquatiques...........	0,030	33
7° *Parois de gravier, irrégulières et mal entretenues*....	0,035	29
8° *Parois très irrégulières*..........................	0,040	25

Cette formule est compliquée, mais elle donne des résultats qui paraissent s'accorder, au moins aussi bien que celle de M. Bazin, avec l'observation. Elle est fort usitée à l'étranger, principalement en Allemagne, en Angleterre et en Amérique; cela tient peut-être à ce que le coefficient n variable avec la rugosité est unique, tandis que dans la formule de M. Bazin il y a deux coefficients α et β, dont chacun dépend suivant une loi inconnue de l'état de la paroi.

La table XI donne les valeurs du coefficient C de Ganguillet et Kutter pour les huit natures de parois qui viennent d'être définies et pour un certain nombre de pentes comprises dans les limites de la pratique. Au moyen de ces tables, l'emploi de la formule dont il s'agit est presque aussi simple que celui de la formule de M. Bazin. Nous donnerons un peu plus loin des exemples de l'application de l'une et de l'autre.

La comparaison des résultats de la formule de Ganguillet et Kutter avec ceux de l'observation semble montrer qu'elle n'attribue pas à la pente I une importance suffisante, car les

écarts que l'on a constatés paraissent être fonction de la pente et sont surtout appréciables lorsque celle-ci est très petite.

On peut d'ailleurs objecter à cette formule qu'il est bien extraordinaire que, lorsque le rayon moyen a la valeur $R = 1$ m., le coefficient C devient indépendant de la pente, tandis qu'il varie avec elle lorsque le rayon moyen a une valeur ou plus grande ou plus petite. D'après cette formule, le coefficient C croît avec la pente pour les valeurs de R inférieures à 1 et il décroît au contraire quand la pente augmente lorsque R est supérieur à l'unité. On ne voit pas les causes de cette différence qui semble difficile à expliquer.

M. Robert Manning, professeur au Collège Royal de Dublin, a proposé la formule [1]:

$$U = C_1 \sqrt[3]{R^2}\sqrt{I} = C_1 R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}};$$

dans laquelle le coefficient C_1, variable avec la nature de la paroi, a la valeur $\frac{1}{n}$ de l'inverse du coefficient de rugosité n de la formule de Kutter. On devrait donc prendre, pour les parois en terre, $C_1 = 40$, et de même pour les autres. Cette formule revient à :

$$U = C_1 \sqrt[6]{R} . \sqrt{RI},$$

1. Cette formule n'est qu'une forme simplifiée d'une formule plus générale donnée par M. Rob. Manning sous la forme

$$U = C \sqrt{gI} \left[\sqrt{R} + \frac{0{,}22}{\sqrt{m}} (R - 0{,}15\, m)\right],$$

dans laquelle m représente la hauteur de la colonne de mercure qui équilibre la pression atmosphérique. Les valeurs des coefficients numériques y restent les mêmes quelle que soit l'unité adoptée pour les longueurs. Pour la valeur $m = 0^m76$, en prenant le mètre pour unité de longueur, elle devient simplement

$$U = C_1\sqrt{I}\left(\sqrt{R} + \frac{R}{4} - 0^m{,}03\right).$$

C'est la parenthèse que remplace le facteur $\sqrt[3]{R^2}$ de la forme plus simplifiée donnée ci-dessus. Voir la brochure *On the flow of water in open channels and pipes*, par Robert Manning. Dublin, 1890.

et elle rentre dans la formule générale $U = C\sqrt{RI}$ ou $RI = bU^2$ avec :

$$C = C_1 \sqrt[6]{R} \quad \text{ou} \quad b = \frac{1}{C_1^2 \sqrt[3]{R}}.$$

D'après M. Robert Manning, elle s'accorderait, tout aussi bien que celle de Kutter, avec les résultats d'expérience desquels celle-ci a été déduite. La forme en avait déjà été indiquée par M. Gauckler, pour les valeurs de I supérieures à 0,0007, soit à $0^m,70$ par kilomètre. Pour les pentes inférieures à ce chiffre, M. Gauckler avait proposé :

$$U = CR^{\frac{4}{3}} I.$$

mais M. Gauckler attribuait à C une valeur constante.

On trouvera, à la table X, les valeurs du coefficient C d'après cette formule de M. Robert Manning, dont l'usage semble devoir être recommandé.

Une formule bien plus compliquée a été déduite par MM. Humphreys et Abbot de leurs observations sur le Mississipi. Ils y ont fait entrer, non pas le rayon moyen R, tel qu'il est défini plus haut, ou le rapport au périmètre mouillé de l'aire de la section transversale, mais bien un rapport R_1 obtenu en divisant cette aire par le périmètre total de la section, y compris la surface libre.

Cette formule est :

$$U = \left[\sqrt[4]{69 R_1 \sqrt{I}} - 0,0214\right]^2.$$

En négligeant le terme constant, 0,0214, elle peut s'écrire approximativement :

$$U = \sqrt{69 R_1} \sqrt[4]{I} = 8,3 \sqrt{R_1} \sqrt[4]{I};$$

ce qui revient encore à

$$R_1 I = \frac{\sqrt{I}}{69} U^2 = bU^2,$$

en faisant

$$b = \frac{\sqrt{I}}{69}.$$

Lorsqu'il s'agit de canaux de très petite dimension, comme les dernières petites rigoles employées pour les irrigations, MM. Darcy et Bazin ont trouvé que l'on pouvait prendre, avec une approximation suffisante :

$$b = \frac{k}{\sqrt{RU}}, \qquad \text{ou} \qquad RI = \frac{k}{\sqrt{RU}} U^2.$$

k étant une constante. Il en résulte, ainsi que l'a fait remarquer M. Boussinesq, en appelant α une autre constante :

$$U = \alpha RI^{\frac{2}{3}} = \alpha R \sqrt[3]{I^2}.$$

D'après les résultats inscrits au tableau de la page 106 des *Recherches hydrauliques* de M. Bazin, et déduits d'expériences sur des rigoles de 0 m. 10 de largeur dans lesquelles le rayon moyen a varié de 1 à 3 centimètres, les valeurs du coefficient k auraient été d'environ 0,00004, lorsque les parois des rigoles étaient polies et de 0,00012 lorsqu'elles avaient été rendues rugueuses par la juxtaposition d'une forte toile. Il serait intéressant d'avoir la valeur de k pour des rigoles tapissées de végétation.

§ 2.

ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT

101. Répartition des vitesses dans un courant. — La détermination de la vitesse moyenne U, dans de pareils canaux, s'opère directement par le mesurage du débit dans un temps donné, obtenu en remplissant un réservoir. Mais ce procédé n'est plus applicable à ceux de grande dimension. La vitesse moyenne doit alors y être déterminée par l'observation des vitesses en un grand nombre de points d'une même section transversale et l'étude de la répartition des vitesses qui, dans les tuyaux, n'offre qu'un intérêt secondaire, devient primordiale lorsqu'il s'agit des canaux découverts.

D'après ce qui a été dit au chapitre II, n° 31, et ce que nous avons vérifié dans les tuyaux de conduite, la vitesse dans un canal doit être minimum le long de la paroi et aller en croissant à mesure qu'on s'en éloigne ; il semble en résulter que la vitesse maximum se trouverait au milieu de la surface libre, si l'on pouvait faire abstraction de la résistance de l'air. L'atmosphère qui repose sur la surface libre constitue cependant une véritable paroi sur laquelle frotte le liquide en mouvement et qui produit sur lui un effet retardateur comparable à celui qui provient des parois solides. Cet effet, à peine sensible lorsque l'air est immobile, devient beaucoup

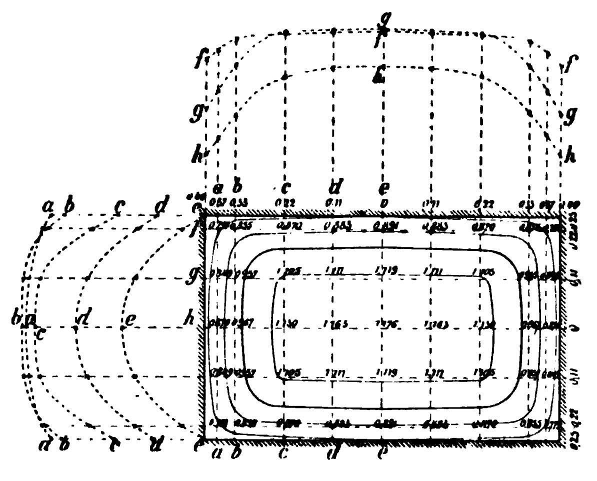


Fig. 58.

plus intense si l'air se déplace en sens inverse du liquide, c'est-à-dire si le vent souffle en sens contraire du courant. Mais la résistance de l'air ne suffit pas à rendre compte des différences que l'on observe dans la répartition des vitesses dans un canal découvert de forme rectangulaire, et dans le même canal formant la moitié inférieure d'un tuyau fermé à section rectangulaire ; ces différences sont rendues évidentes par la comparaison des deux figures 58 et 59 empruntées à l'ouvrage de M. Bazin. Dans le canal découvert

(fig. 59), les courbes d'égale vitesse, au lieu de présenter à peu près la forme de rectangles, comme elles le font dans le tuyau fermé (fig. 58), affectent une figure elliptique beaucoup plus prononcée, surtout lorsqu'on se rapproche de l'axe ; au

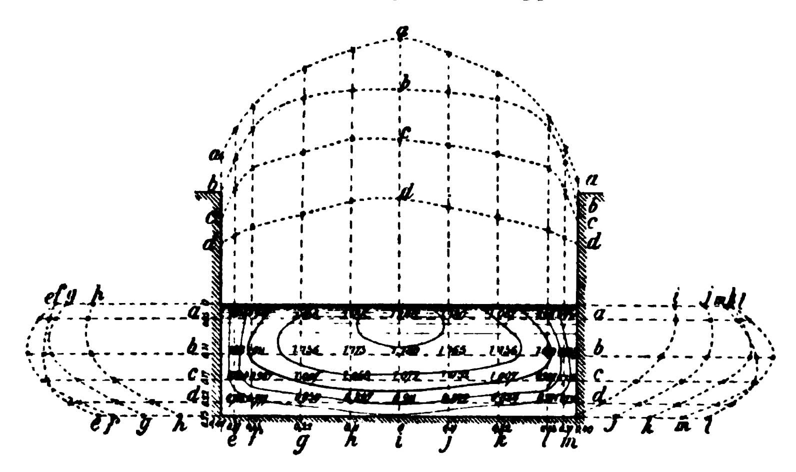


Fig. 59.

lieu de venir couper à angle droit la surface horizontale du courant, elles la rencontrent, au contraire, sous un angle aigu et manifestent, en s'en rapprochant, une tendance à se refermer ; enfin elles sont plus éloignées de l'axe que dans le cas du tuyau fermé, surtout celles qui correspondent à la vitesse moyenne $V = U$ et à la vitesse $V = 1{,}10U$; au contraire, la courbe des vitesses $V = 0{,}80U$ semblerait un peu plus rapprochée. La loi de la répartition des vitesses est donc complètement modifiée.

Une perturbation aussi notable ne peut pas être uniquement attribuée, d'après M. Bazin, à la résistance opposée par l'air au mouvement des tranches supérieures du fluide, car s'il en était ainsi, elle disparaîtrait dans le cas d'un vent soufflant d'amont avec une vitesse égale ou supérieure à celle du courant et ce n'est pas ce que l'on observe : la vitesse maximum se trouve encore, alors, au-dessous de la surface. La diminution de vitesse des couches supérieures, dans un canal dé-

couvert, doit donc être imputée à l'absence de résistance sur la surface libre et au défaut d'invariabilité de la section; ces circonstances favorisent, aux environs de la surface, la production de mouvements irréguliers de toute espèce, qui correspondent à une déperdition de force vive non translatoire ou à des vitesses obliques dont la composante, dans le sens de l'écoulement, est notablement plus faible que dans les couches correspondantes du tuyau fermé.

108. Répartition des vitesses sur une verticale. — Quoi qu'il en soit de la véritable cause du phénomène, le fait n'en est pas moins avéré : il est très rare que, sur une verticale, la vitesse la plus grande se trouve à la surface. Les expériences de M. Bazin lui ont permis d'affirmer que la loi des variations des vitesses, sur une même verticale, pouvait être représentée par une parabole du second degré à axe horizontal dont le sommet, correspondant à la vitesse maximum, était placé à une certaine profondeur au-dessous de la surface libre. Cette loi de répartition des vitesses a été retrouvée par tous les observateurs, et en particulier par M. Allan Cunningham, qui a dirigé des expériences très nombreuses et très exactes sur le canal du Gange, c'est-à-dire sur un cours d'eau régulier de dimensions exceptionnelles, beaucoup plus grandes que celles de tous ceux qui avaient été l'objet d'observations du même genre en Europe[1]. Cette loi parabolique peut être exprimée par une équation de la forme :

$$v = V - \theta\,(z - z_1)^2, \tag{4}$$

dans laquelle v est la vitesse d'un filet fluide, V la vitesse maximum, θ un coefficient numérique, z la profondeur au-dessous de la surface du filet, considéré et z_1 la profondeur du filet dont la vitesse est maximum. Différentiée par rapport à

1. Il a été donné un résumé des expériences de M. Cunningham dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1882, 2e semestre, page 43.

z, cette équation donne :

$$-\frac{dv}{dz} = 2\theta\,(z - z_1).$$

Si nous considérons, dans la masse liquide en mouvement, un prisme rectangulaire de longueur et de largeur égales à l'unité et limité par deux plans horizontaux dont les ordonnées soient z et z_1, le poids de ce prisme sera $\Pi(z-z_1)$ et la composante de ce poids, accélératrice du mouvement du prisme considéré, aura pour valeur, en appelant I la pente du cours d'eau que l'on peut prendre égale à sin I :

$$\Pi\mathrm{I}\;(z - z_1).$$

La force retardatrice ne s'exerce pas sur les faces latérales du prisme si l'on suppose que les vitesses y soient les mêmes de part et d'autre, et par conséquent qu'il n'y ait pas de vitesse relative. Elle ne s'exerce pas non plus sur la face dont l'ordonnée est $z = z_1$, car la vitesse étant maximun sur cette face, $\frac{dv}{dz}$ y est nulle, il n'y a pas non plus de vitesse relative des molécules situées de part et d'autre. Elle ne s'exerce donc que sur la face du prisme dont l'aire est égale à l'unité et l'ordonnée égale à z, et elle doit équilibrer la force accélératrice qui vient d'être écrite. Cette action retardatrice, due au frottement du liquide sur lui-même, est ainsi égale à :

$$\Pi\mathrm{I}(z - z_1) = -\frac{\Pi\mathrm{I}}{2\theta}\frac{dv}{dz}.$$

Elle est donc proportionnelle à la première puissance de $\frac{dv}{dz}$, comme nous l'avons déjà dit à propos des tuyaux de conduite.

D'autre part, les expériences de M. Bazin lui ont montré que le coefficient que nous avons appelé θ était lié à la pente I, et au rayon moyen ou bien à la profondeur h dans le cas d'un canal de largeur indéfinie, par la relation :

$$\theta = \frac{k}{h^2}\sqrt{h\mathrm{I}}.$$

Cette valeur étant portée dans l'expression précédente du frottement moléculaire par unité superficielle lui donne la forme :

$$-\frac{\Pi I h^2}{2k\sqrt{hI}}\frac{dv}{dz} = -\frac{\Pi}{2k}h\sqrt{hI}\cdot\frac{dv}{dz}$$

ou bien encore, en mettant pour hI sa valeur bU^2 :

$$-\frac{\Pi\sqrt{b}}{2k}\,h\,U\,\frac{dv}{dz}.$$

Expression du frottement intérieur identique à celle que nous avons supposée au chapitre II, n° 28, à la seule différence que la vitesse à la paroi u_0 est remplacée par la vitesse moyenne U ; le coefficient $\frac{\Pi\sqrt{b}}{2k}$ remplaçant en même temps celui que nous avions appelé ΠA ou ρgA. Nous trouvons ainsi une confirmation expérimentale des hypothèses qui ont été faites alors sur le frottement intérieur.

103. Formules de M. Bazin. — Reprenons alors l'équation générale (4) et mettons-y, pour le coefficient θ la valeur $\frac{k}{h^2}\sqrt{hI}$ trouvée par M. Bazin ; cette formule devient :

$$v = V - k\sqrt{hI}\left(\frac{z}{h}-\frac{z_1}{h}\right)^2;$$

et en désignant, pour simplifier, par ζ, ζ_1 les rapports $\frac{z}{h}$, $\frac{z_1}{h}$, c'est-à-dire les profondeurs proportionnelles, ou les rapports des profondeurs z ou z_1 à la profondeur totale h, et aussi par K le produit $k\sqrt{hI}$:

(5) $$v = V - K(\zeta-\zeta_1)^2.$$

La vitesse moyenne sur une verticale, que nous appellerons u, sera :

$$u = \int_0^1 v\,d\zeta = V - K\left(\frac{1}{3}-\zeta_1+\zeta_1^2\right),$$

en supposant que le coefficient K soit constant.

Dans la même hypothèse, la moyenne des vitesses v_ζ et $v_{1-\zeta}$, en deux points symétriques par rapport à la surface et au fond, diffère peu de la vitesse moyenne u sur la même verticale, car l'équation (5), en y faisant successivement $\zeta = \zeta$ et $\zeta = 1 - \zeta$, donne :

$$\frac{v_\zeta + v_{1-\zeta}}{2} = u - \mathrm{K}\left(\zeta^2 - \zeta + \frac{1}{6}\right);$$

et l'on voit facilement que lorsque ζ varie de 0 à $\frac{1}{2}$, le trinôme varie de $\frac{1}{6}$ à $-\frac{1}{12}$; la moyenne des deux vitesses considérées diffère de la vitesse moyenne de moins de $\frac{1}{6}$ de K, lequel est toujours une petite fraction de cette vitesse moyenne.

La vitesse au milieu de la hauteur, pour $\zeta = \frac{1}{2}$, est :

$$v_{\frac{1}{2}} = u + \frac{1}{12}\mathrm{K};$$

elle diffère donc peu de la vitesse moyenne sur la même verticale. Mais la vitesse aux $\frac{3}{5}$ de la profondeur, obtenue en faisant $\zeta = \frac{3}{5}$, diffère encore moins de la vitesse moyenne u ; on a en effet :

$$v_{\frac{3}{5}} = u - \frac{1}{5}\mathrm{K}\left(\frac{2}{15} - \zeta_1\right).$$

Or, ζ_1, en pratique, ne dépasse presque jamais $\frac{1}{3}$ et lorsqu'il varie de 0 à $\frac{1}{3}$, le second terme de cette expression, qui représente la différence entre $v_{\frac{3}{5}}$ et u, varie, de $\frac{\mathrm{K}}{37,5}$ à $\frac{\mathrm{K}}{25}$. On peut donc presque toujours, avec une approximation suffisante, écrire :

$$u = v_{\frac{3}{5}}.$$

Cette formule approximative, donnée par M. Bazin, a été remarquablement vérifiée par les expériences de M. Cunningham qui lui ont montré que la vitesse moyenne, sur une verticale, était la même que celle d'un point dont la profondeur variait de 0,577 à 0,667 de la hauteur. La moyenne de ses observations lui a donné, pour la profondeur de ce point, $\zeta = \frac{5}{8} = 0,625$, au lieu de $\zeta = 0,60$. Mais cela tient à ce qu'il a fait entrer, dans cette moyenne, les observations faites sur des verticales rapprochées des rives, sur lesquelles la distribution des vitesses est différente de ce qu'elle est dans un canal de largeur indéfinie. Près des rives, en effet, la profondeur où se rencontre la vitesse maximum s'abaisse et la vitesse moyenne se trouve plus bas que vers le milieu du canal. Le point où l'on rencontre une vitesse égale à la vitesse moyenne peut s'abaisser jusqu'à $\zeta = 0,728$, mais alors il se trouve, près de la surface, à $\zeta = 0,10$, un autre point où la vitesse est la même. M. Cunningham a déduit, de la loi parabolique des vitesses, les valeurs de la vitesse moyenne sur une verticale en fonctions de celles de filets situés à diverses hauteurs. Voici quelques unes de ces valeurs :

$$u = \frac{1}{4}\left(v_0 + 3v_{\frac{2}{3}}\right),$$

$$= \frac{1}{7}\left(3v_{\frac{1}{6}} + 4v_{\frac{3}{4}}\right),$$

$$= \frac{1}{6}\left(v_0 + 4\, v_{\frac{1}{2}} + v_1\right),$$

$$= \frac{1}{3}\left(2v_{\frac{1}{4}} - v_{\frac{1}{2}} + 2v_{\frac{3}{4}}\right),$$

etc.....

Il n'est pas inutile de faire remarquer que v_0, dans ces formules, représente la vitesse pour $\zeta = 0$, c'est-à-dire la vitesse à la surface, et v_1 la vitesse pour $\zeta = 1$ ou la vitesse au fond. Celle-ci est d'une détermination difficile.

On peut, en adoptant l'une ou l'autre de ces formules, déterminer approximativement la vitesse moyenne sur une verticale au moyen de la mesure directe d'une seule, ou de deux, ou de trois vitesses sur cette verticale.

104. Rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne. — Tout ce qui précède suppose, d'après ce qui a a déjà été remarqué, que le coefficient désigné par K, qui exprime le paramètre de la parabole des vitesses, est constant. Au contraire, les expériences de M. Bazin [1] lui ont montré que ce coefficient devait être remplacé par $\frac{M}{(1-\zeta_1)^2}$, c'est-à-dire qu'il est d'autant plus grand que ζ_1, profondeur relative au-dessous de la surface libre du point où la vitesse est maximum, est plus petit ; la courbure de la parabole est d'autant plus prononcée à son sommet que ce sommet est plus bas, ou que la vitesse maximum se trouve plus loin de la surface libre. L'équation qui exprime la loi de variation des vitesses devient alors :

$$(6) \qquad v = V - M\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta_1}\right)^2,$$

et le coefficient M a pour valeur :

$$M = 20\sqrt{hI}.$$

Dans un courant rectangulaire de largeur assez grande pour que l'influence des rives pût être considérée comme négligeable, h pourrait être confondue avec le rayon moyen R et la vitesse moyenne sur une verticale, désignée ici par u, ne différerait pas sensiblement de la vitesse moyenne U dans toute la section transversale. L'équation précédente s'écrirait alors, en divisant tous ses termes par u ou par U et en remplaçant h par R :

$$\frac{v}{u} = \frac{V}{u} - 20\sqrt{\frac{RI}{U^2}}\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta_1}\right)^2.$$

1. *Annales des ponts et chaussées*, 2e semestre, 1875, p. 309.

Nous avons trouvé plus haut :

$$\frac{V}{u} = 1 + \frac{K}{u}\left(\frac{1}{3} - \zeta_1 + \zeta_1^2\right);$$

la décroissance des vitesses sur une verticale est, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus prononcée que la résistance opposée par les parois à l'écoulement du fluide est elle-même plus considérable. Le coefficient K ou plutôt le rapport $\frac{K}{u}$ qui mesure cette décroissance, doit augmenter avec la résistance. Remplaçons, en effet, ce coefficient K par sa valeur en M, et remarquons que $\frac{RI}{U^2} = b$, nous obtenons :

$$\frac{V}{U} = 1 + 20\sqrt{b}\,\frac{\frac{1}{3} - \zeta_1 + \zeta_1^2}{(1 - \zeta_1)^2}.$$

Nous avons déjà dit que ζ_1 était généralement inférieur à $\frac{1}{3}$. Dans les canaux très larges, comme ceux dont nous parlons maintenant, il est rare que ζ_1 dépasse 0,20 ; alors, avec la valeur moyenne $\sqrt{b} = 0,02$ qui correspond au coefficient de Tadini, et qui est applicable aux cours d'eau tranquilles et à vitesse modérée, le rapport $\frac{V}{U}$ varie entre 1,10 et 1,13. Pour les autres valeurs de b applicables aux grands cours d'eau de forme et de vitesse moins régulières, ce rapport peut varier entre 1,09 et 1,19. Cela veut dire que la vitesse maximum, dans un cours d'eau rectangulaire très large, ne dépasse la vitesse moyenne que de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{10}$ de sa valeur.

L'expression précédente de $\frac{V}{U}$ peut d'ailleurs, en effectuant la division indiquée par le dernier facteur et en négligeant les termes du 3ᵉ ordre en ζ_1, se mettre sous la forme :

$$\frac{V}{U} = 1 + 20\sqrt{b}\,.\,\frac{1}{3}(1 - \zeta_1)$$

ou bien encore, en remplaçant b par $\frac{hI}{U^2}$:

$$V = U + \frac{1}{3}(1 - \zeta_1)\, 20\sqrt{hI}.$$

Dans les limites qui viennent d'être rappelées pour la variation ordinaire de ζ_1, c'est-à-dire lorsque cette quantité varie de 0, sa limite inférieure qu'elle n'atteint presque jamais, à 0,20, le coefficient numérique du second terme, qui affecte $\sqrt{hI}$, varie de 6,67 à 5,33. La moyenne de ces deux valeurs, qui correspond à $\zeta = 0{,}10$, est exactement 6. On peut donc écrire, en moyenne et à titre d'approximation :

$$V = U + 6\sqrt{hI}, \tag{7}$$

le coefficient 6 pouvant varier de 5,33 à 6,67.

Avec la formule de Tadini : $U = 50\sqrt{hI}$, cette expression prend la forme $V = 1{,}12\, U$, ce qui est précisément ce que nous venons de dire, d'après les observations de M. Bazin sur les canaux rectangulaires très larges.

Dans les mêmes conditions, la parabole des vitesses a pour équation :

$$\frac{v}{u} = \frac{V}{u} - \frac{20\sqrt{b}}{(1 - \zeta_1)^2}(\zeta - \zeta_1)^2$$

et son paramètre $\frac{20\sqrt{b}}{(1 - \zeta_1)^2}$ est compris entre 0,40 et 0,60.

105. Vitesse au fond. — La vitesse au fond, pour $\zeta = 1$, que nous représenterons par w, est alors :

$$w = V - 20\, u\sqrt{b} = V - 20\sqrt{hI};$$

et la différence $V - w = 20\sqrt{hI}$ varie, dans les canaux artificiels, entre $\frac{1}{4}$ V et $\frac{1}{2}$ V. Elle augmente avec la rugosité de la paroi, puisqu'elle est proportionnelle à la racine carrée du coefficient b, lequel mesure la résistance à cette paroi.

Cet écart, entre la vitesse maximum V et la vitesse au fond w reste, on le voit, aux environs de $\frac{1}{3}$ V, et c'est cette valeur moyenne qu'il conserve dans beaucoup de cours d'eau naturels, où la résistance des parois présente des conditions à peu près moyennes et peu différentes. Toutefois, sur le Rhin, à Bâle, sur un fond formé de gros galets produisant une résissistance extraordinaire, cet écart a atteint presque $\frac{1}{2}$ V; mais on doit considérer ce résultat comme exceptionnel.

Nous avons vu, que dans les tuyaux, au contraire, l'écart entre la vitesse maximum et la vitesse à la paroi était peu inférieur à $\frac{1}{2}$ V, lorsque les parois étaient d'une rugosité moyenne. Cette différence tient à l'inégalité de la répartition des vitesses, déjà signalée, entre les tuyaux et les canaux découverts.

L'étude qui précède, sur la répartition des vitesses dans un courant, est empruntée à M. Bazin, et les résultats expérimentaux ont été déduits en outre des expériences personnelles de ce savant ingénieur, des expériences faites sur la Saône, à Raconnay, sous la direction de M. Léveillé, de celles qui ont été dirigées par M. Emmery sur la Seine, à Meulan, de celles de Baumgarten sur la Garonne, d'une expérience de Defontaine sur un bras du Rhin, à Kehl, d'une expérience sur le Rhin, à Bâle, par une commission d'ingénieurs, des expériences de MM. Humphreys et Abbot sur le Mississipi et enfin de celles de Robert Gordon sur l'Irrawaddi.

Les expériences de M. Allan Cunningham, sur le canal du Gange, sont postérieures au travail de M. Bazin; elles en ont confirmé les conclusions.

106. Cas d'un canal de dimensions restreintes. — Lorsque les dimensions transversales du canal ne sont pas très grandes par rapport à la profondeur et que l'on ne peut plus, sans erreur sensible, prendre pour le rayon moyen R la profondeur h, les résultats précédents ne sont plus applicables.

La répartition des vitesses sur une même verticale suit toujours la loi parabolique exprimée par l'équation (6); mais l'on ne peut plus, comme nous l'avons fait, remplacer la vitesse moyenne u sur une verticale par la vitesse moyenne U dans toute la section transversale. Celle-ci n'est évidemment qu'une fraction de la vitesse moyenne sur la verticale du milieu, à laquelle s'appliquerait peut-être, au moins approximativement, la relation (7) qui deviendrait :

$$V = u + 6\sqrt{hI}.$$

La vitesse moyenne U étant alors notablement inférieure à u, le coefficient numérique doit augmenter, en même temps que l'on remplace h par R. En effet, les expériences de M. Bazin lui ont permis d'établir, pour des canaux de dimension restreinte, la formule

$$V = U + 14\sqrt{RI}, \tag{8}$$

mais le coefficient 14 semble, dans bien des cas, trop élevé.

On n'a, pour les cas intermédiaires, c'est-à-dire pour ceux où la largeur du cours d'eau, sans pouvoir être considérée comme indéfinie, est cependant assez grande, aucun renseignement expérimental. M. Cunningham a simplement constaté que dans une formule de la forme :

$$V = U + K\sqrt{RI}$$

le coefficient K devait varier avec les dimensions de la section transversale; mais il n'a pas dégagé les lois de cette variation qui paraissent compliquées.

Il a d'ailleurs fait observer qu'une pareille formule ne pourrait avoir d'utilité pratique que si, au lieu de renfermer la vitesse maximum V qu'il est difficile d'observer directement, elle contenait la vitesse la plus grande à la surface libre, laquelle est toujours inférieure à V.

Lorsqu'il s'agit de canaux dont la largeur n'est pas indéfinie, il devient impossible de déterminer la vitesse à la paroi.

Cette vitesse est alors variable suivant une loi qui n'est pas connue. Elle a ordinairement son maximum au milieu du fond horizontal du canal et elle va en diminuant jusqu'aux angles formés par le fond et les parois où se trouvent les plus petites vitesses de toute la section. Elle augmente ensuite jusque vers le milieu de la hauteur de ces parois et diminue enfin jusqu'à la surface libre. A défaut de toute autre indication, on pourra admettre que dans ces canaux limités, comme dans les grands cours d'eau, la vitesse maximum sur le fond est comprise entre la moitié et les deux tiers de la vitesse maximum V afférant à la section entière.

107. Formules empiriques. — D'après cela, on comprendra que nous nous bornions à rappeler sans discussion, la relation empirique entre la vitesse maximum V, la vitesse moyenne U et la vitesse au fond w, qui avait été trouvée par Prony et que l'on emploie encore quelquefois :

$$U = \frac{V + w}{2} . \tag{9}$$

Prony avait même exprimé la vitesse moyenne en fonction de la vitesse maximum seule, par la formule :

$$U = V \cdot \frac{2.37 + V}{3.15 + V} . \tag{10}$$

On emploie aussi quelquefois l'expression plus simple et qui souvent n'est pas plus inexacte :

$$U = 0,80\ V, \qquad \text{ou } V = 1,25\ U , \tag{11}$$

laquelle, mise dans l'équation précédente (9), donnerait :

$$w = 0,75\ U = 0,60\ V. \tag{12}$$

Quelques ingénieurs adoptent encore la formule déduite par M. Sonnet d'une analyse spéciale, mais qui, malgré cela, doit être considérée comme aussi empirique que les précédentes :

$$U = \frac{2V + w}{3} .$$

Avec U = 0,80 V, elle donne $w = 0{,}50U = 0{,}40V$. Mais, comme nous venons de le dire, la vitesse au fond, w, n'a pas de signification précise dans les cours d'eau de faible largeur.

108. Application à quelques cours d'eau naturels. — Ces formules approximatives ou empiriques ne sont basées que sur un nombre restreint d'expériences, correspondant à peu près toutes à un seul et même cas, celui des rivières de dimensions moyennes, à écoulement assez régulier et pour lesquelles la formule de Tadini $U = 50\sqrt{RI}$ était le plus souvent suffisante. Les expériences faites sur la Seine et sur la Saône, dont il vient d'être parlé (n° 105), ont conduit M. Bazin à la formule :

$$\frac{RI}{U^2} = 0{,}000280\left(1 + \frac{1.25}{R}\right);$$

que l'on peut écrire $U = C\sqrt{RI}$, en désignant par C le coefficient $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}00028\left(1+\frac{1{,}25}{R}\right)}}$. Alors, ce coefficient prend la valeur de Tadini, C = 50 pour R = 3 m.; mais pour R = 1 m., on a C = 40, et pour R = 10 m., C = 56. Dès que R dépasse deux mètres, le coefficient C diffère peu de celui de Tadini, et il n'y a pas lieu de s'en étonner, puisque la Seine et la Saône rentrent dans le cas de rivières à cours tranquille. Lorsqu'il s'agit de canaux artificiels, la forme de la section transversale est régulière, et le degré de rugosité des parois peut être assimilé à certains types usités dans la pratique et pour lesquels nous avons donné plus haut des valeurs du coefficient à adopter. Les formules que l'on établit alors sont d'une exactitude suffisante. Mais, lorsqu'il s'agit de cours d'eau naturels, les conditions de l'écoulement varient non seulement suivant la nature du sol qui constitue le fond du lit et qui est d'une diversité bien plus grande que dans les canaux artificiels, mais aussi et surtout avec les irrégularités de forme des sections transver-

sales, bien plus accentuées toujours, même dans les cours d'eau d'allure très régulière, que dans les canaux artificiels. De ces irrégularités, aucune formule ne peut tenir compte ; tout ce que l'on peut faire, c'est adopter un coefficient moyen applicable à quelques cours d'eau présentant une certaine analogie entre eux.

Par exemple, au lieu de la formule qui précède, applicable aux cours d'eau tranquilles, comme la Seine, Kutter a proposé, pour les cours d'eau torrentiels de la Suisse, charriant des galets, la formule :

$$\frac{RI}{U^2} = 0,0004 \left(1 + \frac{1.75}{R}\right),$$

qui donne, pour R = 1 m., C = 30 ; pour R = 3 m., C = 40, et pour R = 10 m., C = 46. M. Graeff a donné la valeur C = 36 comme applicable aux affluents de la Loire supérieure. Sur le Rhin, à Bâle, dont le fond est tapissé de gros galets, on a trouvé C = 38. Pour le Danube, à Vienne, les observations très précises de M. Harlacher ont donné C = 45. Pour l'Irrawaddi, les valeurs obtenues par M. Gordon seraient, sans doute, après vérification et rectification, inférieures à C = 50, malgré les grandes dimensions du lit. Pour le Mississipi, MM. Humphreys et Abbot ont trouvé pour C des valeurs atteignant 70, et en tout cas bien supérieures aux précédentes pour des valeurs de R comprises, à la vérité entre 15 et 20 mètres ; mais toutefois ces résultats, obtenus par la méthode des doubles flotteurs (voir plus loin, chapitre VI, n° 163), auraient besoin, d'après M. Bazin, d'être rectifiés dans une mesure qui n'est pas connue [1]. Dans les expériences qu'il a faites à Roorkee sur le canal du Gange, M. Cunningham a trouvé pour C des valeurs variant de 19,43 à 72,12, mais près de 80 pour cent de ses observations lui ont donné des chiffres compris entre 40 et 60.

1. *Note sur l'emploi des doubles flotteurs pour la mesure des vitesses dans les grands cours d'eau*, par M. Bazin. *Annales des ponts et chaussées*, 1884, 1er semestre, pages 587 et suivantes.



La valeur du coefficient C diminue évidemment lorsque les aspérités du fond du lit augmentent. Cet effet, très sensible en même temps que très naturel dans les cours d'eau de petite et de moyenne dimension, est encore très appréciable dans les grands cours d'eau où cependant il semblerait que les inégalités du fond doivent s'effacer devant les dimensions du lit. Cela tient à ce que le coefficient de frottement intérieur ε (n° 28) augmente avec le rayon moyen du cours d'eau.

109. Répartition des vitesses sur une horizontale. — Si, au lieu de comparer les vitesses aux différents points d'une même verticale, on rapproche celles des points d'une même ligne horizontale menée à travers le courant, en opérant sur une section transversale symétrique avec un lit horizontal et dans un bief uniforme et d'une grande longueur, on reconnaît les lois approximatives suivantes, observées par M. Cunningham :

1° La vitesse, sur chaque ligne horizontale, est maximum près du milieu ; elle subit, de ce point vers les rives, une diminution d'abord très lente, qui devient plus rapide en approchant des rives et très rapide contre les rives ;

2° La courbe horizontale des vitesses est entièrement convexe vers l'aval et elle est symétrique par rapport au milieu du canal, à moins d'irrégularités dans la forme de celui-ci, soit en amont soit en aval du poste d'observation, soit dans le profil lui-même ;

3° Tout changement marqué dans la forme du lit se fait sentir dans la forme de la courbe des vitesses. Une augmentation de profondeur accroît la vitesse et inversement ; ainsi, une concavité du lit produit une convexité de la courbe des vitesses et *vice versa*. Ces effets sont d'autant plus marqués que l'eau est moins profonde.

110. Variation de la vitesse en chaque point. — Il ne s'agit, dans tout ce qui précède, que des vitesses moyennes

locales définies comme plus haut (n° 97) dont les vitesses réelles diffèrent à chaque instant, non seulement en grandeur mais encore en direction.

Dans une étude des plus intéressantes[1], M. Bazin a récemment cherché, en se servant d'observations faites antérieurement et dans un tout autre but, à déterminer dans quelles limites pouvait varier, aux divers points d'une même section transversale, la composante longitudinale de la vitesse. Comme celle-ci change à chaque instant et que les instruments qui servent à la mesurer ne donnent jamais que sa moyenne pendant un temps plus ou moins court, on ne peut arriver, avec les procédés d'observation dont on dispose, à mesurer exactement la différence réelle de ces composantes; mais on peut observer une quantité qui, si elle ne lui est pas proportionnelle, varie vraisemblablement dans le même sens que cette différence.

Sous cette restriction, M. Bazin a reconnu que l'écart entre la plus petite et la plus grande des composantes longitudinales de la vitesse en un même point avait son maximum à la paroi et décroissait, à partir de cette paroi, en variant à peu près comme le rapport $\frac{V-v}{U}$; c'est-à-dire que cet écart est sensiblement le même sur tout le parcours d'une courbe d'égale vitesse. Il varie, en outre, entre deux canaux de dimensions comparables, proportionnellement au coefficient $\sqrt{b}$ qui mesure la résistance des parois.

M. Bazin n'a pas pu déterminer l'influence, sur la valeur de cet écart, des dimensions absolues de la section transversale, parce que ses observations ont porté sur des canaux de dimensions à peu près semblables. L'influence de ces dimensions doit cependant être considérable si l'on en juge par les tourbillons qui sillonnent la surface des cours d'eau naturels. Ces mouvements expliquent même comment il se fait que la

1. *Note sur la mesure des vitesses à l'aide du tube jaugeur. Annales des ponts et chaussées*, 1887, 2e semestre, page 195.

valeur du coefficient $\sqrt{b}$ se maintient presque constante dans les grands cours d'eau, malgré l'augmentation du rayon moyen R, contrairement à ce qui se passerait dans les canaux artificiels. Il semble, en effet, au premier abord que, dans un fleuve, l'influence des aspérités des parois doive s'effacer devant les grandes dimensions du lit ; il en serait ainsi dans un canal de section régulière. Mais, dans les cours d'eau naturels, le lit, dont la profondeur et la largeur varient sans cesse, ne peut jamais être assimilé à un canal prismatique ; ces variations de section, comparables aux dimensions du lit, donnent lieu à des mouvements irréguliers d'une amplitude considérable, de sorte que le coefficient $\sqrt{b}$ peut conserver la même valeur pour un grand fleuve et pour un cours d'eau de largeur médiocre, ainsi que l'ont constaté divers observateurs.

Les variations de vitesse constatées par M. Bazin sont, comme il a été dit, simplement celles de la composante longitudinale de la vitesse en chaque point ; les données expérimentales manquent pour ce qui est de la composante verticale ou transversale qui doit probablement, si l'on en juge par ce que montre l'observation sommaire, varier dans des limites beaucoup plus étendues.

Enfin, il est un fait qui a été constaté par plusieurs observateurs et en particulier par M. Harlacher, c'est que les variations de la composante longitudinale des vitesses se font par périodes régulières, rhythmiques, et sont en quelque sorte le résultat d'une oscillation ou plutôt d'une *pulsation* que semble effectuer la masse liquide. Les ingénieurs américains ont donné à ce phénomène le nom significatif de *pouls* des rivières. La cause n'en paraît pas déterminée. Nous avons vu aussi plus haut (nº 29) que, dans les expériences de M. Couette, il se produisait, dans l'écoulement de la veine fluide, des alternatives de vitesses. Sont-elles dues à la même cause ? C'est une question qui n'est pas élucidée.

§ 3.

APPLICATIONS

111. Problèmes divers. Forme de section qui donne le débit maximum. — On peut se proposer, étant donnée la pente I d'un canal à ouvrir, ainsi que l'inclinaison m des talus de la cunette, déterminée par la nature du terrain dans lequel ce canal doit être creusé, de trouver la forme à donner à la section transversale pour assurer le débit maximum par unité d'aire de cette section.

Le débit, par unité d'aire, sera proportionnel à la vitesse moyenne U, laquelle, pour une pente donnée I, croît avec le rayon moyen R. Le problème revient donc à trouver, pour une section donnée ω, la forme pour laquelle R sera maximum, c'est-à-dire pour laquelle le périmètre mouillé χ sera maximum.

Alors, l étant la largeur au plafond et h la profondeur d'eau, la section ω sera :

$$\omega = h(l + mh),$$

et le périmètre mouillé :

$$\chi = l + 2h\sqrt{1+m^2}.$$

La section ω étant supposée donnée, sa différentielle totale est nulle :

$$h(dl + mdh) + (l + mh)dh = 0.$$

D'autre part, pour que le périmètre mouillé χ soit minimum, il faut aussi que sa différentielle soit nulle, ou que

$$dl + 2dh\sqrt{1+m^2} = 0\,;$$

ce qui, en éliminant dl et dh, fournit entre l et h la relation :

$$l = 2h\left(\sqrt{1+m^2} - m\right).$$

La demi-largeur $AH=HB=\frac{l}{2}$ doit donc être égale à la différence entre $DB=h\sqrt{1+m^2}$ et $BE=mh$, c'est-à-dire que HE=BD, ou bien, en abaissant OF perpendiculaire à BD et BI perpendiculaire à OD, il faut que OF soit égal à BI ou à OH. Les côtés DB et BA sont tangents à une même circonférence décrite du point O comme centre.

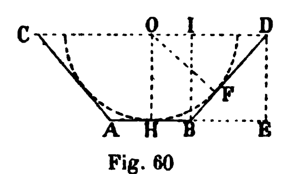


Fig. 60

Le rapport $\frac{h}{l}$ de la profondeur à la largeur au plafond vaut ainsi, dans les profils donnant le débit maximum :

$$\frac{h}{l}=\frac{1}{2(\sqrt{1+m^2}-m)}=\frac{m+\sqrt{1+m^2}}{2}$$

c'est-à-dire, en mettant pour m les valeurs usuelles :

Talus verticaux	Talus inclinés				
	à 1 de base pour 2 de hauteur	à 1 de base pour 1 de hauteur 45°	à 3 de base pour 2 de hauteur	à 2 de base pour 1 de hauteur	à 3 de base pour 1 de hauteur
$m=0$	$m=0{,}50$	$m=1$	$m=1{,}50$	$m=2$	$m=3$
$\frac{h}{l}=0{,}50$	$\frac{h}{l}=0{,}81$	$\frac{h}{l}=1{,}21$	$\frac{h}{l}=1{,}65$	$\frac{h}{l}=2{,}12$	$\frac{h}{l}=3{,}08$

On voit que, pour les talus d'une inclinaison inférieure à 45 degrés, ou pour $m>1$, le rapport $\frac{h}{l}$ ne s'écarte pas beaucoup de la valeur approximative :

$$\frac{h}{l}=m+\frac{0{,}24}{m},$$

un peu plus facile à calculer que la valeur exacte.

Dans tous les cas, le rayon moyen, dans le profil ainsi déterminé, exprimé par :

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h(l + mh)}{l + 2h\sqrt{1 + m^2}},$$

vaut, lorsque l'on y met pour le rapport $\frac{h}{l}$ la valeur qui correspond au débit maximum :

$$(13) \qquad R = \frac{h}{2} = (m + \sqrt{1 + m^2})\frac{l}{4}.$$

Il est toujours égal à la moitié de la profondeur d'eau, comme dans la section demi-circulaire.

Le rapport $\frac{h}{l}$ étant ainsi calculé, pour une inclinaison donnée m des talus de la cunette, il sera facile de trouver la valeur de h et par suite celle de l correspondant à une section transversale d'aire donnée ω. L'on a en effet :

$$\omega = h(l + mh) = h^2(2\sqrt{1 + m^2} - m),$$

d'où l'on déduira :

$$(14) \qquad h = \sqrt{\frac{\omega}{2\sqrt{1 + m^2} - m}}.$$

Pour une section transversale ω donnée, la profondeur h et par suite le rayon moyen $R = \frac{h}{2}$ sont d'autant plus grands que les talus de la cunette sont plus rapprochés de la verticale. Il y a donc toujours un double intérêt, lorsque l'on ouvre un canal destiné à débiter un volume d'eau donné avec une pente également donnée, à adopter, pour le profil transversal les talus les plus raides possibles eu égard à la nature du terrain. On réduit ainsi, d'abord, la largeur de l'emprise, et ensuite, en augmentant le rayon moyen, on augmente la vitesse moyenne, ce qui permet de diminuer dans la même

proportion l'étendue ω de la section transversale, ou le cube des déblais par mètre courant.

Tout ce qui précède suppose, bien entendu, que la détermination de la forme de la section transversale ne dépend d'aucune autre considération que celle qui doit conduire au maximum de la vitesse ou du rayon moyen. Il arrive fréquemment que, pour rendre plus facile l'exécution des déblais lors de la construction, ou l'entretien de la cunette quand le canal est en service, on s'impose la condition de ne pas dépasser, pour la profondeur, une dimension déterminée : deux mètres, trois mètres, par exemple.

L'utilité de limiter la profondeur d'un canal est souvent justifiée par celle de diminuer les pertes par infiltration. Toutes choses égales, ces pertes augmentent rapidement avec la profondeur, c'est-à-dire avec la charge d'eau sur les petits orifices capillaires par lesquels elles se produisent. Elles sont d'autant plus réduites que l'on adopte des profils dans lesquels la profondeur est moindre. Alors, pour une section transversale dont l'aire ω est donnée, l'inclinaison maximum des talus m étant déterminée par la nature des terrains, si l'on se limite, pour l'une des raisons qui précèdent, la grandeur maximum de la profondeur h, il ne reste, dans l'équation :

$$\omega = h(l + mh).$$

qu'une seule inconnue, l, à déterminer.

112. Influence des herbes aquatiques. — Lorsque les eaux que doit porter le canal à ouvrir sont chargées de vase et qu'elles peuvent produire des dépôts ou des envasements, et lorsque la nature des talus et du fond permet la croissance d'herbes aquatiques, il est prudent de tenir compte, dès l'ouverture du canal, de la diminution de section transversale qui en sera la conséquence. Les envasements sont destinés à être enlevés périodiquement, mais l'on ne peut le faire avec facilité que lorsqu'ils ont atteint une épaisseur suffisante, vingt centimètres par exemple.

Les herbes aquatiques sont de deux sortes : celles qui tapissent simplement les parois en s'élevant à une faible hauteur et celles qui s'élèvent jusqu'à la surface de l'eau en traversant toute la profondeur du canal. Les premières ne sont à considérer, comme les envasements, qu'au point de vue de la diminution de section transversale, relativement assez faible, qu'elles produisent. On en tient un compte généralement suffisant en leur attribuant une épaisseur de dix centimètres, comme l'a conseillé M. Alfred Picard, dans son ouvrage sur l'*Alimentation du canal de la Marne au Rhin et du canal de l'Est*. Quant aux grandes herbes, leur influence sur l'écoulement peut devenir considérable, tant à cause de la diminution de section qu'elles occasionnent que de l'augmentation du périmètre mouillé qu'il est impossible d'évaluer. D'après les observations de M. Picard, la réduction de débit due à la végétation est d'autant plus forte que la vitesse d'écoulement est moindre, et l'on comprend bien qu'il en soit ainsi, car sous l'action de l'eau animée d'une vitesse un peu grande, les herbes se courbent, se couchent sur le fond et occupent dans la section transversale un espace relatif moindre que lorsque la vitesse est faible.

« Quel que soit donc le soin, dit M. Alfred Picard, que l'on « compte apporter à l'entretien des rigoles à talus en terre, il « sera toujours prudent d'augmenter un peu le débouché cal« culé..... Il appartient d'ailleurs aux ingénieurs d'apprécier, « dans chaque cas particulier, la mesure de cette augmenta« tion d'après l'étendue du débouché, la vitesse d'écoulement, « la nature du terrain, le développement auquel il faut s'at« tendre pour la végétation, etc. »

Il convient d'ajouter que les cofficients numériques ou les tables servant aux calculs sont établis pour des eaux pures. Lorsque les eaux sont troubles, une partie de la force vive de l'eau est employée à maintenir en suspension les matières solides qu'elle roule, il en résulte une augmentation du frottement intérieur qui se traduit par une augmentation du coef-

ficient b mesurant ce frottement, ou par une diminution du coefficient $C = \frac{1}{\sqrt{b}}$. L'importance des modifications à apporter à ces coefficients n'a pas été déterminée.

118. Détermination de la pente d'un canal de dérivation. — Le problème de l'ouverture d'un canal de dérivation se pose, au point de vue économique, de la manière suivante. Un cours d'eau naturel présente, dans la partie où l'on veut faire la prise d'eau, une pente J, donnée ; on veut en dériver un volume Q par seconde et l'amener en un point d'une altitude donnée. Pour assurer l'écoulement, il suffit évidemment que le point où s'effectuera la prise d'eau soit à une altitude supérieure au point d'arrivée ; mais si la différence de niveau est faible, la pente I du canal à ouvrir sera également faible et le canal devra avoir une grande section transversale. Plus on remontera la prise d'eau le long du cours d'eau naturel, plus on pourra augmenter la pente de la dérivation et plus on pourra réduire la section transversale ; mais aussi plus la longueur du canal à ouvrir sera grande.

Désignons par ω l'aire de la section transversale, inconnue, du canal à ouvrir, par R son rayon moyen, et enfin par L la longueur comprise entre la prise d'eau et le point d'arrivée. Nous aurons d'abord, entre les quantités L, I, J, la relation :

$$L(J - I) = \text{une constante} = H$$

cette constante H pouvant être considérée comme une donnée de la question. C'est en effet la hauteur du point d'arrivée des eaux au-dessus de la ligne de pente J supposée prolongée suivant le tracé du canal à ouvrir.

La dépense de construction du canal se compose ordinairement de deux parties : l'une, correspondant aux acquisitions de terrains est sensiblement proportionnelle à la largeur à la ligne d'eau ; l'autre, correspondant aux déblais, est plutôt proportionnelle à l'aire ω de la section transversale. Toutefois,

pour simplifier, nous admettrons que la première partie de la dépense elle-même est proportionnelle à ω ; ce sera, dans tous les cas, une approximation. Alors, si l'on représente par p le prix de l'unité de longueur du canal, par unité d'aire de la section transversale, la dépense à faire P sera :

$$P = p\omega L = p\omega \frac{H}{J-I}.$$

D'autre part, nous devons supposer que, d'après la nature des terrains où le canal sera ouvert, on connaît l'inclinaison maximum possible des talus de la cunette et que l'on peut adopter la forme de section transversale la plus économique ; on a alors, entre le rayon moyen R et la section transversale ω, la relation suivante (15) qui résulte de celles (13) et (14) ci-dessus (n° 111), et dans laquelle m représente l'inclinaison des talus :

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{2\sqrt{1+m^2}-m}}, \tag{15}$$

que l'on peut écrire plus simplement :

$$R^2 = n\omega,$$

en représentant par n le coefficient $n = \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{1+m^2}-m}$.

Cela posé, prenons l'équation du mouvement uniforme :

$$RI = bU^2,$$

et supposons que le coefficient b soit constant, ce qui nous donnera une première approximation. Remplaçons-y la vitesse moyenne U par le quotient $\frac{Q}{\omega} = \frac{nQ}{R^2}$, nous la mettrons sous la forme :

$$R^5 I = bnQ.$$

Posons, pour abréger :

$$\rho^5 J = bnQ = R^5 I$$

en appelant ρ une quantité auxiliaire connue et définie par cette équation. Dans l'expression du prix P d'établissement du canal, remplaçons ω, I et J, par leurs valeurs déduites des équations précédentes, nous obtiendrons :

$$P = \frac{pH\rho^5}{bnQ} \frac{R^7}{R^5 - \rho^5}.$$

Et si nous voulons que le prix P soit minimum, il faudra égaler à zéro la dérivée $\frac{dP}{dR}$, ce qui, après suppression du facteur commum $\frac{pH\rho^5}{bnQ}$, donnera :

$$2R^5 = 7\rho^5\,;$$

ou bien, puisque $\rho^5 J = R^5 I$:

$$I = \frac{2}{7} J.$$

La pente la plus économique du canal de dérivation devra donc, dans les hypothèses où nous nous sommes placés, être égale aux deux septièmes de celle du cours d'eau où s'effectue la prise.

On pourrait, en exprimant le coefficient b en fonction du rayon moyen R, d'après la formule de M. Bazin, par exemple, obtenir une approximation un peu plus grande, au prix d'une bien plus grande complication des calculs. Cela semble assez inutile, dans l'espèce, étant données les hypothèses déjà assez peu exactes en ce qui concerne l'établissement du prix P.

Le résultat est un peu différent si, au lieu d'adopter pour la section transversale la forme qui donne le périmètre minimum ou le rayon moyen maximum, on est conduit, par quelqu'une des considérations indiquées plus haut (n° 111) à limiter la profondeur. Alors cette profondeur h doit être considérée comme une constante donnée, la section transversale ω varie proportionnellement à la largeur moyenne que nous

appellerons l, et le rayon moyen R est sensiblement constant ; il est une fraction à peu près toujours la même, lorsque la largeur varie même dans des limites assez étendues, de la profondeur h. Si, dans l'équation $RI = bU^2$, nous remplaçons U par $\frac{Q}{\omega}$ et ω par lh, nous obtenons :

$$h^2 I = \frac{bQ^2}{Rh^2},$$

et si nous prenons, comme plus haut, une quantité auxiliaire λ définie par l'équation :

$$\lambda^2 J = \frac{bQ^2}{Rh^2} = l^2 I,$$

l'expression du prix d'établissement du canal $P = p\omega \frac{H}{J - I}$ devient, en y mettant pour ω, I et J, leurs valeurs en fonction de h, l et λ :

$$P = \frac{pRh^3\lambda^2}{bQ^2} \cdot \frac{l^3}{l^2 - \lambda^2}.$$

La dérivée $\frac{dP}{dl}$ égalée à zéro donne, après suppression du facteur constant :

$$l^2 = 3\lambda^2,$$

ou bien, puisque $l^2 I = \lambda^2 J$:

$$I = \frac{1}{3} J.$$

Dans cette nouvelle hypothèse, la pente la plus économique du canal de dérivation devra donc être égale au tiers de celle du cours d'eau alimentaire. Dans la pratique, il arrivera fréquemment que les conditions dans lesquelles on se trouvera seront, en quelque sorte, intermédiaires entre celles que nous avons supposées. Le prix du canal par unité de longueur, par exemple, ne sera pas exactement proportionnel

à l'aire de la section transversale, comme nous l'avons admis d'abord, et il ne le sera pas non plus à la largeur moyenne, ainsi que le suppose implicitement la seconde hypothèse ; il s'exprimera par une fonction de la forme $p\omega + p'l$. La détermination de la pente la plus économique donnerait lieu alors à la résolution d'une équation de degré supérieur dont la solution, répondant à la question, serait comprise entre les deux limites que nous avons trouvées $I = \frac{2}{7} J = 0,286J$ et $I = \frac{1}{3} J = 0,333J$. On ne se trompera donc pas beaucoup, en général, en adoptant pour la pente du canal de dérivation, une fraction, 0,30 par exemple, intermédiaire entre les deux précédentes, de celle du cours d'eau alimentaire.

Il convient d'ailleurs d'ajouter que la pente du canal de dérivation peut être limitée par d'autres considérations, et en particulier par la nécessité de maintenir à la vitesse moyenne et par suite à la vitesse au fond une valeur assez faible pour ne pas affouiller les parois du lit eu égard à la nature des terres dont elles sont formées. Inversement, si les eaux à dériver sont troubles, il faut leur assurer une vitesse suffisante pour que les matières vaseuses en suspension ne se déposent pas. D'après Du Buat, le dépôt n'a pas lieu tant que la vitesse est supérieure à $0^m,15$ par seconde, mais ce chiffre varie un peu avec la nature des vases entraînées. Belgrand n'admettait pas, en général, dans les canaux de dérivation, de vitesse moyenne inférieure à $0^m,25$ et à cette vitesse limite correspondent naturellement des pentes différentes suivant le type du canal que l'on veut ouvrir, ses dimensions transversales, la nature des talus, etc. Par exemple, pour les aqueducs construits pour l'adduction des sources à Paris, la pente ne doit pas être inférieure à $0^m,10$ par kilomètre.

Il peut encore arriver que le cours d'eau alimentaire soit disposé de telle façon que la prise d'eau ne puisse s'y effectuer que dans certaines régions déterminées, ou plutôt qu'elle soit

impraticable dans certaines autres. Si, par exemple, ce cours d'eau est bordé d'une ville riveraine, la prise d'eau ne pourra pas, en général, être pratiquée dans toute l'étendue de la ville et devra être reportée soit à l'amont, soit à l'aval. La règle qui vient d'être donnée : I = environ 0,30J ne fournit qu'une première indication qui doit être rectifiée en tenant compte de ces diverses considérations.

114. Emploi des formules et usage des tables. — Je vais montrer, par quelques exemples numériques, comment on peut employer les formules qui ont été données plus haut en se servant des tables numériques placées à la fin du volume.

1° *Calculer le débit d'un canal de section transversale et de pente données.*

Ce problème, le plus simple de tous, se résout immédiatement de la manière suivante. La section transversale est généralement en forme de trapèze et on en définit la forme en donnant l'inclinaison des talus m, la largeur au plafond l et la profondeur d'eau h. On peut donc calculer immédiatement le rapport $\frac{l}{h}$. En cherchant ce rapport dans la première colonne de la table XII, on trouvera, sur la ligne correspondante et dans la colonne applicable à la valeur donnée de m les deux valeurs $\frac{\omega}{h^2}$ et $\frac{R}{h}$ qui feront connaître immédiatement ω et R. Si l'on ne veut pas se servir de cette table on pourra calculer ω et R par leurs expressions :

$$\omega = h\,(l + mh) \quad , \quad R = \frac{h\,(l + mh)}{l + 2h\sqrt{1 + m^2}} .$$

Ces deux quantités étant ainsi obtenues, on cherchera, soit dans la table IX de M. Bazin, soit dans celle XI de Kutter, soit dans celle X de Robert Manning, la valeur du coefficient C correspondant à la nature des parois du canal, à sa pente donnée et à son rayon moyen R. Alors, la vitesse moyenne U se dé-

duira de la formule $U = C\sqrt{RI}$ dans laquelle tout est connu, et le débit cherché Q sera :

$$Q = \omega U = C\omega\sqrt{RI}.$$

Exemple. — Calculer le débit d'un canal dont les parois, en terre, sont inclinées à deux de base pour un de hauteur dont la largeur au plafond est de deux mètres, dans lequel la profondeur est de quatre-vingt centimètres et la pente de vingt centimètres par kilomètre.

On a alors :

$$l = 2^m{,}00\ ,\quad h = 0^m{,}80\ ,\quad m = 2\ ,\quad \frac{l}{h} = 2.50\ ,\quad I = 0{,}0002.$$

La table XII donne, pour $\frac{l}{h} = 2.50$ et pour $m = 2$:

$$\frac{\omega}{h^2} = 4.50, \qquad \frac{R}{h} = 0{,}65\,,$$

D'où, en mettant pour h sa valeur 0,80 et pour h^2, $\overline{0{,}80}^2 = 0{,}64$:

$$\omega = 4.50 \times 0.80^2 = 2.88 \quad , \quad R = 0.65 \times 0.80 = 0.52.$$

Pour $R = 0{,}52$ et des parois en terre, la table de M. Bazin (table IX) donne $C = 32$ environ et celle de M. Manning (table X) : $C = 36$. Pour les mêmes données et la pente de 0,0002, la table de Kutter (table n° XI) donne $C = 34$. On peut prendre, suivant que l'on veut appliquer l'une ou l'autre formule, l'un de ces trois chiffres ; ou bien un chiffre intermédiaire, comme $C = 33$.

Alors le débit cherché Q sera :

$$Q = C\omega\sqrt{RI} = 33 \times 2.88 \times \sqrt{0{,}52 \times 0{,}0002} = 0^m{,}96,$$

soit de 960 litres par seconde. La vitesse moyenne, qu'il peut être intéressant de connaître aussi, sera :

$$U = C\sqrt{RI} = 33 \times \sqrt{0{,}52 \times 0{,}0002} = 0^m{,}33.$$

On peut en déduire approximativement la vitesse maxi-

mum à la surface et la vitesse au fond, d'après les indications qui ont été développées plus haut. Le canal en question étant de dimensions restreintes, la vitesse maximum V devrait, d'après M. Bazin, être prise égale à $U + 14\sqrt{RI} = 0{,}33 + 0{,}14 = 0^m{,}47$, ce qui donnerait, pour le rapport $\frac{V}{U}$ le rapport peu vraisemblable : $\frac{V}{U} = 1.45$. Le rapport simple admis souvent comme approximation : $\frac{V}{U} = 1.25$, donnerait $V = 0^m{,}41$. Quant à la vitesse w au fond, elle serait sans doute voisine de $0{,}75U$ c'est-à-dire de $0^m{,}25$.

2° *Etant données la section transversale d'un canal et sa pente, calculer la profondeur d'eau correspondant à un débit donné.*

Ce problème est un peu plus compliqué que le précédent et si l'on tient compte, comme on doit le faire, de la variation du coefficient b ou C avec le rayon moyen, il ne peut se résoudre que par tâtonnements ou approximations successives. Pour le mettre en équation, adoptons la forme du coefficient b proposée par M. Bazin, $b = \alpha + \frac{\beta}{R}$, nous aurons, en mettant pour ω et R leurs valeurs dans la formule $RI = bU^2 = b\frac{Q^2}{\omega^2}$, l'équation :

$$\frac{h(l+mh)}{l + 2h\sqrt{1+m^2}}\, I = \left(\alpha + \beta\,\frac{l+2h\sqrt{1+m^2}}{h\,(l+mh)}\right)\frac{Q^2}{h^2\,(l+mh)^2},$$

dans laquelle il n'entre qu'une seule inconnue h, mais qui est de degré supérieur et ne peut être résolue autrement que par approximations successives. Il sera évidemment plus simple de se servir des tables et de conserver les trois inconnues h, ω et R dont les deux dernières dépendent de h. La manière d'opérer se montrera clairement par un exemple numérique.

Exemple. — Une rigole d'un mètre de largeur au plafond,

avec des talus en terre à trois de base pour deux de hauteur et une pente de $0^m,15$ par kilomètre doit débiter 300 litres par seconde, quelle devra y être la profondeur de l'eau?

Eu égard au chiffre peu élevé du débit, on voit tout de suite que la profondeur n'atteindra sans doute pas et en tout cas ne dépassera pas beaucoup un mètre ; le rayon moyen sera donc probablement inférieur à 1^m. Alors le coefficient C sera inférieur à 40 et la vitesse moyenne $U = C\sqrt{RI}$ inférieure à $0^m,30$; ce chiffre conduirait, pour la section transversale ω à la valeur $\omega = \frac{Q}{U} = \frac{0,300}{0,30} = 1$ mètre carré laquelle est probablement trop faible.

La profondeur $h = 0^m,80$, qui correspond au rapport $\frac{l}{h} = 1,25$ donne, d'après la table XII, $\omega = 2,75h^2 = 2,75 \times 0,64 = 1^{mq}.76$ valeur qui sera sans doute trop forte, mais prenons-la néanmoins comme première approximation. La même table donne $R = 0,56h = 0,56 \times 0,8 = 0,45$. A ce rayon moyen et aux parois en terre correspond une valeur du coefficient C qui est, d'après la table de Bazin, voisine de 30 et d'après celle de Kutter, de 32. Prenons la valeur moyenne 31. Alors, la formule $\frac{Q}{\omega} = C\sqrt{RI}$ donnera :

$$\omega = \frac{Q}{C\sqrt{RI}} = \frac{0,300}{31\sqrt{0,45 \times 0,00015}} = 1.17;$$

valeur très différente de celle 1,76, admise plus haut. Celle-ci est donc trop forte et la valeur de ω devra être prise intermédiaire entre 1,17 et 1,76, mais bien plus près de la première.

Prenons alors $\omega = 1^{mq},30$ ce qui correspond à $h = 0^m,66$ environ, ou $\frac{l}{h} = 1,50$. On a alors $R = 0,59h = 0^m,39$. La valeur du coefficient C n'est plus guère que de 30 d'après Kutter et 29 d'après Bazin ; soit $C = 29$. Alors :

$$\omega = \frac{Q}{C\sqrt{RI}} = \frac{0,300}{29\sqrt{0,39 \times 0,00015}} = 1,30,$$

ce qui vérifie cette seconde hypothèse. La profondeur cherchée sera donc $0^m,66$.

3° *Etant donnés le débit d'un canal et la vitesse moyenne de l'eau, déterminer les dimensions de la section transversale, ainsi que la pente du canal.*

Ce problème est celui qui se pose lorsqu'il s'agit d'ouvrir un canal pour une destination donnée. La vitesse moyenne est limitée par la condition de ne pas produire d'affouillement, ni de dépôts, et le débit correspond à l'utilisation qui doit être faite des eaux. Il s'agit de calculer les dimensions que l'on donnera au profil transversal. L'inclinaison des talus de la cunette doit être considérée également comme donnée, elle est une conséquence de la nature des terrains dans lesquels doit être ouvert le canal.

Alors, si aucune autre considération ne s'y oppose, on devra adopter, pour le profil, celui qui a le plus petit périmètre ou le plus grand rayon moyen, d'après ce qui a été dit au n° 111. Le débit Q et la vitesse moyenne U étant donnés, l'aire ω de la section transversale, $\omega = \frac{Q}{U}$, sera connue. La profondeur h se calculera par la formule (14) :

$$h = \sqrt{\frac{\omega}{2\sqrt{1+m^2}-m}},$$

et la largeur au plafond sera :

$$l = 2h\left(\sqrt{1+m^2}-m\right) = \frac{2h}{\sqrt{1+m^2}+m}.$$

On déterminera la pente I par l'équation $U = C\sqrt{RI}$, que l'on mettra sous la forme $I = \frac{bU^2}{R}$ et dans laquelle on fera $R = \frac{h}{2}$.

Exemple. — Un canal doit porter 800 litres avec une vitesse moyenne de $0^m,50$ par seconde dans des terrains où les talus peuvent être inclinés à 45 degrés. Quelles doivent être sa largeur au plafond, sa profondeur et sa pente ?

Nous avons $Q = 0{,}800$, $U = 0{,}50$, donc $\omega = \frac{Q}{U} = 1^{mq},6$.

$$h = \sqrt{\frac{1.60}{2\sqrt{2}-1}} = 0^{m},935\ ;\ l = 2h\,(\sqrt{2}-1) = 0^{m},77.$$

$$R = \frac{h}{2} = 0^{m},47.$$

La valeur 0,47 de R correspond, dans les parois assez rugueuses ou peu unies, comme celles que l'on peut maintenir sous des inclinaisons de 45 degrés, à une valeur de $C = 53$ environ d'après Bazin. Cette valeur $C = 53$ donne, d'après la table VIII, $b = 0{,}00036$. Alors $I = \frac{0{,}00036 \times \overline{0{,}50}^2}{0{,}47} = 0{,}00019$ soit $0^{m},19$ par kilomètre. La table de Kutter, pour cette valeur de I, donnerait $C = 51$, d'où $b = 0{,}00039$, ce qui correspondrait à $I = 0{,}00021$. On pourra prendre la valeur moyenne $I = 0{,}0002$ ou $0^{m},20$ par kilomètre.

Si, par suite de circonstances spéciales, on ne peut adopter le profil transversal qui donne le plus grand rayon moyen, ces circonstances se traduisent par une relation entre la profondeur et la largeur du canal au plafond. Et cette relation, avec l'équation $\omega = h\,(l + mh)$ permet de calculer ces deux dimensions, puisque ω est supposé connu.

Par exemple, dans le problème numérique précédent, supposons que la largeur au plafond ne puisse, pour des raisons spéciales, descendre au-dessous de $2^{m},00$. La valeur $l = 2^{m},00$, jointe à celle $\omega = 1{,}60$ donne pour h, d'après l'équation $1{,}60 = h\,(2 + h)$ la valeur $h = 0{,}61$. Il en résulte $\frac{l}{h} = 3{,}3$ et, d'après la table XII, $R = 0{,}70h = 0{,}43$. La valeur correspondante de C, d'après Bazin, pour des parois peu unies, est $C = 51$ environ ce qui donne $b = 0{,}00039$ et par suite $I = \frac{0{,}00039 \times \overline{0{,}50}^2}{0{,}43} = 0{,}00020$. La table de Kutter donnerait $C = 49$, ou $b = 0{,}00042$, et par suite $I = \frac{0{,}00042 \times \overline{0{,}50}^2}{0{,}43} =$ 0,00024.

La différence des résultats donnés par les deux tables est ici assez grande. On adoptera l'un ou l'autre, ou la moyenne des deux. Si le chiffre que l'on aura choisi est trop fort, la vitesse moyenne sera un peu supérieure à la donnée 0,50 et la profondeur sera un peu plus faible que celle que l'on a calculée. Le contraire se produira si l'on adopte un chiffre trop faible pour la pente; mais les différences seront, en général, sans importance au point de vue pratique.

4° *Etant donnés le débit d'un canal et sa pente, trouver les dimensions de son profil transversal et la vitesse moyenne de l'eau.*

Ce problème, comme le précédent, se pose lorsque l'on doit ouvrir un canal de dérivation. Il doit également être considéré à deux points de vue suivant que l'on peut adopter pour le profil transversal la section la plus économique, ou bien que des circonstances spéciales s'y opposent.

Lorsque l'on peut adopter la section à rayon moyen maximum, on a la relation :

$$h = 2R = \sqrt{\frac{\omega}{2\sqrt{1+m^2}-m}},$$

qui, jointe à :

$$RI = b\,\frac{Q^2}{\omega^2},$$

permet de calculer les deux inconnues ω et R, en adoptant pour le coefficient b une valeur provisoire que l'on rectifiera dans une nouvelle approximation d'après la valeur trouvée pour R. On voit que, pour une valeur donnée de b, l'équation à résoudre sera du cinquième degré en ω ou en R et pourra être résolue par l'extraction d'une racine cinquième, c'est-à-dire par logarithmes.

Exemple. — Un canal doit porter dix mètres cubes d'eau par seconde, avec une pente de dix centimètres par kilomètre. Quel doit être son profil transversal dans la terre avec des talus inclinés à deux de base pour un de hauteur ?

On a $I = 0{,}0001$, $Q = 10$, $m = 2$.

On en déduit : $2\sqrt{1+m^2} - m = 2\sqrt{5} - 2 = 2{,}47$ et par suite les équations à résoudre seront, en prenant pour b la valeur provisoire 0,0004 :

$$4R^2 = \frac{\omega}{2.47}, \quad R \times 0{,}0001 = 0{,}0004 \times \frac{10^2}{\omega^2} \cdot$$

soit $\omega = 9{,}88R^2$, $\omega^2 R = 400$; ou bien, en éliminant ω,

$$R^5 = \frac{400}{9.88^2},$$

et par suite $R = 1^m{,}32$.

La valeur $R = 1^m{,}32$ pour les parois en terre correspond, d'après les tables de Bazin et de Kutter à $C = 42$, soit $b = 0{,}00057$. Adoptant cette nouvelle valeur les équations à résoudre deviendront :

$$\omega = 9.88\ R^2, \quad R \times 0{,}0001 = 0{,}00057\ \frac{10^2}{\omega^2},$$

qui donnent $R^5 = \dfrac{570}{9{,}88^2}$ ou $R = 1^m{,}425$.

La valeur de C n'est pas sensiblement modifiée par le petit changement de valeur de R, on peut donc adopter cette dernière valeur comme définitive. Alors, si $R = 1^m{,}425$; $h = 2R = 2^m{,}85$; $\omega = 9{,}88R^2 = 19{,}97$, soit 20 mètres carrés et la vitesse moyenne $U = \frac{Q}{\omega} = \frac{10}{20} = 0^m{,}50$. La largeur au plafond $l = 2h(\sqrt{1+m^2} - m) = 2 \times 2.85 \times (\sqrt{5} - 2) = 1^m{,}34$. Le problème se trouve donc entièrement résolu.

Si l'on ne peut adopter le profil le plus économique, on aura, entre la largeur l et la profondeur, une certaine relation donnée par les circonstances et qui, jointe à celle $\omega = h(l + mh)$ et à celle $RI = b\,\frac{Q^2}{\omega^2}$, dans laquelle R sera exprimée en fonction de l et de h, permettra de trouver par tâtonnements les trois inconnues l, h et ω.

Si, par exemple, pour prendre une circonstance qui peut se rencontrer en pratique, on veut que le canal puisse être facilement nettoyé des corps étrangers qui pourraient y séjourner et que, par suite, la profondeur ne soit pas supérieure à $1^m,50$, on prendra $h = 1.50$ et les équations à résoudre seront, entre les deux inconnues l et ω :

$$\omega = 150\,(l + 2 \times 1.50)\,;\ 0,0001\ \mathrm{R} = b\,\frac{\overline{10}^2}{\omega^2}.$$

L'élimination de ω donne lieu à une équation du 3ᵉ degré en l qui ne peut être facilement résolue, même en mettant pour b un nombre arbitraire. On opérera donc de la manière suivante :

La profondeur étant de 1 m. 50, le rayon moyen, égal à une fraction de cette profondeur, aura une valeur voisine de 1 m., et alors le coefficient C, d'après les tables, sera voisin de 40, et par suite b, voisin de 0,000625. Prenons ces valeurs comme première approximation. Avec $\mathrm{R} = 1.00$ et $b = 0,000625$, la seconde équation devient $\omega^2 = \dfrac{0,000625 \times 100}{0,0001 \times 1.00} = 625$, ou $\omega = 25$ Alors, la première équation, $\omega = 1.50\,(l + 3)$, donne $l = \dfrac{25}{1.50} - 3 = 13.67$. Cette valeur de l conduit, avec celle $h = 1,50$, à un rayon moyen $\mathrm{R} = \dfrac{25}{13.67 + 2 \times 1,50\sqrt{5}} = 1^m,24$.

On obtiendra une nouvelle approximation en partant de cette nouvelle valeur de R qui donnera successivement $\omega^2 = \dfrac{0.00057 \times 100}{0,0001 \times 1.24} = 457$ ou $\omega = 21,4$; puis $l = \dfrac{21.4}{1.50} - 3 = 11^m,30$, et par suite $\mathrm{R} = \dfrac{21.4}{11.30 + 2 \times 1.50 \times \sqrt{5}} = 1^m,19$.

En opérant de la même manière, l'approximation suivante fournira : $\omega^2 = \dfrac{0.00057 \times 100}{0,0001 \times 1.19} = 477$ ou $\omega = 21.8$; puis, $l = \dfrac{21.8}{1.50} - 3 = 11^m,53$ et $\mathrm{R} = \dfrac{21.8}{11.53 + 2 \times 1.50\sqrt{5}} = 1^m,19$; valeur égale à la précédente, à moins d'un centimètre près. On

adoptera ainsi pour largeur au plafond : $l = 11^{m},53$, ce qui donnera $\omega = 21^{mq},8$ et par suite la vitesse moyenne

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{10}{21,8} = 0^{m},46.$$

En comparant cette section transversale à celle qui a le plus grand rayon moyen, et que nous avons trouvée plus haut égale à 20 mètres carrés, on voit que l'augmentation est de près d'un dixième. Si l'on considère que le profil à ouvrir doit comporter une certaine revanche au-dessus du plan d'eau, on verra que la différence est en réalité bien plus grande entre les surfaces totales des deux profils, car la largeur à la ligne d'eau du profil le plus économique est notablement inférieure à celle de l'autre.

Si, au lieu de se limiter la profondeur *h*, on avait imposé une limite à la largeur au plafond, cette condition aurait eu pour effet de déterminer la forme du profil transversal, et le problème aurait consisté à trouver la profondeur d'eau nécessaire pour débiter le volume donné, problème qui a été résolu plus haut.

Je me bornerai à ces quatre problèmes, non pas qu'ils présentent tous les cas que l'on peut rencontrer dans la pratique, mais ils suffiront pour montrer comment on peut résoudre les questions auxquelles donne lieu l'établissement des canaux découverts. Les lecteurs trouveront facilement, dans chaque cas particulier, la meilleure manière de conduire les calculs, en s'inspirant des exemples qui précèdent.

§ 4.

MOUVEMENT VARIÉ

115. Mouvement varié. Équation générale. — Nous avons établi plus haut l'équation générale du mouvement per-

manent varié d'un courant liquide (page 51, équation 17) :

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \frac{\chi}{\omega}\varphi(U) + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right);$$

et nous avons vu que pour appliquer cette équation à un canal découvert, l'on pouvait prendre pour axe des s la ligne tracée sur la surface libre dans le sens du courant et perpendiculairement à la section transversale, ce qui rend p_0 constant, égal à la pression atmosphérique, et annule la dérivée $\frac{dp_0}{ds}$. La formule applicable aux canaux découverts est ainsi :

$$\sin I = \frac{\chi}{\omega}\varphi(U) + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

On n'a que des données assez incertaines sur ce que peuvent être les valeurs de la fonction $\varphi(U)$ et du coefficient α'. Dans un mémoire étendu, inséré aux *Annales des ponts et chaussées* (1887, 1er semestre, page 148), de St-Venant a montré que l'on pouvait prendre, pour $\varphi(U)$, la même expression bU^2 que dans le mouvement uniforme, à la condition d'augmenter un peu le coefficient α'. Avec cette augmentation, les valeurs de ce coefficient semblent devoir rester comprises entre 1,085 et 1,138, le premier nombre s'appliquant aux sections rectangulaires très larges et le second aux sections demi-circulaires. On peut donc toujours, pour des sections d'une forme quelconque, comprises entre ces deux extrêmes, adopter pour α' la valeur moyenne 1, 111 ou $\frac{10}{9}$. Nous supprimerons donc l'accent de ce coéfficient et nous le désignerons par la même lettre α qui nous a déjà servi précédemment à représenter ce même nombre $\frac{10}{9}$ que l'on retrouve avec des origines diverses dans un grand nombre de questions. Nous prendrons aussi, pour la fonction $\varphi(U)$, la forme bU^2 avec le même coefficient b que celui du mouvement uniforme et remarquant que la pente I du cours d'eau peut se

confondre avec son sinus, nous écrirons définitivement l'équation du mouvement varié :

$$I = \frac{\chi}{\omega} b U^2 + \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

Dans cette équation, I représente l'inclinaison, sous l'horizon, des trajectoires superficielles. Il est plus commode d'y faire figurer explicitement l'abaissement superficiel que nous appellerons dz, en désignant par z la hauteur du niveau de la surface libre au-dessus d'un plan horizontal passant par l'origine du cours d'eau, en amont, au point où $s = 0$. On écrira ainsi :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\chi}{\omega} b U^2 + \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

ou bien, en multipliant par ds et effectuant la différentiation indiquée au dernier terme :

$$(16) \qquad dz = \frac{\alpha U dU}{g} + \frac{\chi}{\omega} b U^2 ds.$$

La pente superficielle I ou l'abaissement superficiel dz sont généralement plus difficiles à mesurer que la pente du lit que nous appellerons i, ou la variation dh de la profondeur h du cours d'eau. Si l'on considère une longueur infiniment petite du cours d'eau entre les sections AC et BD, la ligne AB étant le fond, CD la surface libre, et si l'on mène, par le point C, une horizontale CF et une parallèle CE à AB, on voit que FD = FE — DE, c'est-à-dire, ds étant la longueur AB :

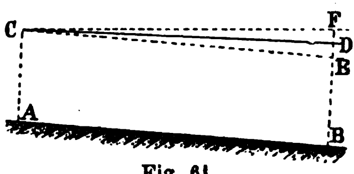


Fig. 61.

$$dz = i ds - dh.$$

Et par conséquent, nous pourrons encore donner à l'équation générale la forme :

$$(17) \qquad i ds - dh = \frac{\alpha U dU}{g} + \frac{\chi}{\omega} b U^2 ds.$$

116. Application à un canal rectangulaire très large. — Nous l'appliquerons d'abord au cas d'un canal rectangulaire très large, dont les dimensions transversales soient suffisantes, par rapport à la profondeur, pour que l'on puisse, sans erreur sensible, substituer au rayon moyen $\frac{\omega}{\chi}$ la profondeur h, et nous admettrons que lesl ois de l'écoulement sont les mêmes sur toute la largeur d'une même section transversale. Alors, le débit total Q se répartit également sur toute la largeur l à raison de $q = \frac{Q}{l}$ par unité de largeur; la vitesse moyenne U dans toute la section est la même que la vitesse moyenne u sur une verticale, et entre ces quantités existe la relation :

$$q = hU,$$

qui, différentiée par rapport à s, donne, puisque le débit est le même dans toutes les sections :

$$hdU + Udh = 0.$$

Nous pouvons, au moyen de ces deux équations, éliminer U et dU de la précédente qui devient :

$$ids - dh = -\frac{\alpha}{g}\frac{q^2dh}{h^3} + b\frac{q^2}{h}ds.$$

Appelons, avec Dupuit, à qui nous empruntons en grande partie cette analyse, H la profondeur qui correspondrait au régime uniforme, c'est-à-dire une profondeur déterminée par cette condition que le produit Hi de cette profondeur par la pente i soit égal au produit de b par le carré de la vitesse moyenne, laquelle serait alors $\frac{H}{q}$, nous aurons, pour déterminer cette profondeur H, l'équation :

$$(18) \qquad Hi = b\frac{q^2}{H^2} \quad \text{ou} \quad H^3 = \frac{bq^2}{i}.$$

Nous pouvons alors remplacer, dans l'équation précédente,

q^2 par sa valeur en fonction cette quantité nouvelle H, et l'écrire :

$$(19) \qquad ids - dh = -\frac{\alpha i}{bg}\frac{H^3}{h^3}dh + i\frac{H^3}{h^3}ds.$$

117. Division des cours d'eau en deux catégories. — Nous diviserons la discussion de cette équation en deux parties, correspondant aux valeurs du coefficient $\frac{\alpha i}{bg}$ et suivant que ce coefficient sera plus petit ou plus grand que l'unité.

En mettant pour b les valeurs moyennes qui conviennent à diverses natures de parois, M. Bazin a trouvé les valeurs suivantes de la pente du fond i pour lesquelles ce coefficient est égal à l'unité :

Nature des parois	Pentes pour lesquelles le coefficient $\frac{\alpha i}{bg}$ est égal à l'unité	Observations
Parois très unies (ciment).	0,00147	Le coefficient b dépend en même temps du rayon moyen Les pentes limites indiquées ci-contre ne peuvent donc être considérées que comme des moyennes. Pour chaque nature de parois la pente limite s'abaisse à mesure que le rayon moyen grandit.
Parois unies (pierres de taille, briques).......	0,00186	
Parois peu unies (moellons)................	0,00235	
Parois en terre..........	0,00275	

Nous appellerons cours d'eau à faible pente ceux pour lesquels la pente sera inférieure au chiffre de ce tableau, les autres étant des cours d'eau à forte pente.

Nous avons vu plus haut (n° 68) que le ressaut superficiel ne pouvait s'observer que dans les cours d'eau dans lesquels la quantité $\frac{\alpha U^2}{g \cos i}.\frac{l}{\omega}$ est supérieure à l'unité, et que nous avons appelés cours d'eau torrentueux ou torrents. Si l'on remarque que cos i est sensiblement égal à l'unité, que dans un canal

rectangulaire $\frac{\omega}{l}$ est égal à la profondeur h et que le carré de la vitesse moyenne U^2 est égal, dans le mouvement uniforme, à $\frac{hi}{b}$, on constate que cette quantité $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \frac{l}{\omega}$ est précisément égale à $\frac{\alpha i}{bg}$. C'est pourquoi l'on appelle souvent *torrents* les cours d'eau à forte pente et *rivières* ceux à faible pente. Mais ces dénominations supposent que la vitesse moyenne U est liée à la pente i par la relation du régime uniforme $hi = bU^2$, ce qui est souvent inexact. En réalité, comme nous le verrons, il peut se trouver et il se trouve souvent, dans les cours d'eau à *faible* pente, des ressauts superficiels. Il suffit pour cela que la condition générale de la production de ce phénomène soit satisfaite, c'est-à-dire que la vitesse moyenne soit assez grande pour que $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \frac{l}{\omega}$ soit supérieure à l'unité, ou plus simplement que αU^2 soit plus grand que gh. Cela arrive, quelle que soit la pente, lorsque la vitesse moyenne est grande et la profondeur faible.

§ 5.

REMOUS

118. Remous d'exhaussement ou d'abaissement. — Quelle que soit la valeur du coefficient $\frac{\alpha i}{bg}$, désignons par une seule lettre H' le produit :

$$H' = H \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}}.$$

La profondeur H', que nous appellerons profondeur *critique*, sera plus grande que celle H correspondant au régime uniforme dans les cours d'eau à forte pente ; elle sera infé-

rieure dans ceux à faible pente. Avec cette nouvelle notation, l'équation (19), résolue par rapport à ds, se met sous la forme :

$$(20) \qquad ids = \frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}\, dh.$$

Lorsque h différera peu de H, le dénominateur de la fraction étant très petit, dh sera très petit par rapport à ids ; la profondeur ne variera donc que d'une manière insensible sur de grandes longueurs, lorsqu'elle sera voisine de celle qui correspond au régime uniforme. On pourra, en général, dans ces parties du cours d'eau, considérer le régime comme uniforme avec une approximation suffisante. Ce régime uniforme, ou sensiblement uniforme, existant sur de grandes longueurs, se trouvera modifié, soit vers l'amont, soit vers l'aval, dans des parties où h différant de H de quantités appréciables, la surface libre présentera une forme courbe définie par l'équation précédente et que l'on appelle la courbe des remous ; le remous sera dit d'exhaussement ou d'abaissement suivant que la courbe du remous se trouvera au-dessus ou au-dessous de la droite correspondant au régime uniforme. D'autre part, suivant que la courbe de remous se trouvera en amont ou en aval de la partie où elle se raccorde asymptotiquement avec la droite du régime uniforme, le régime varié du cours d'eau sera sous l'influence de son extrémité d'amont ou de son extrémité d'aval où se produiront les causes qui ont pour conséquence la transformation du régime uniforme en mouvement varié.

Suivant que les deux termes de la fraction seront de même signe ou de signe contraire, il en sera de même pour dh et ds, la profondeur ira en croissant ou en décroissant à mesure que s augmentera, c'est-à-dire que l'on ira de l'amont vers l'aval. Le dénominateur ne peut changer de signe que pour $h = H$, ce qui correspond au régime uniforme, et d'après ce qui vient d'être dit, à des valeurs infinies de s. Mais le numérateur change de signe en s'annulant lorsque h devient égal

à la profondeur critique $H' = H\sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}}$. Pour cette valeur, le rapport $\frac{dh}{ds}$ est infini, la courbe représentant la surface libre a sa tangente perpendiculaire à la direction du fond du lit du cours d'eau, ce qui est incompatible avec l'hypothèse fondamentale que nous avons faite pour établir nos équations et qui consiste à admettre le parallélisme au moins approximatif des filets fluides. Il y a donc, pour la profondeur $h = H'$ une discontinuité dans le régime permanent que nous étudions et les formules n'y sont pas applicables. Elles ne le sont même pas à une petite distance au-dessus et au dessous de cette profondeur critique, dans les parties où la direction de la courbe superficielle fait des angles trop prononcés avec celle du fond. D'après M. Boussinesq, l'équation (20) cesserait d'être applicable lorsque le rapport $\frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}$ serait inférieur, en valeur absolue, à 0,03. Aux environs de la profondeur critique, c'est généralement un ressaut soit d'abaissement, soit d'exhaussement qui se produit, et la profondeur h passe brusquement d'un côté à l'autre de cette profondeur critique H', dont la dénomination se trouve ainsi justifiée.

119. Cours d'eau à faible pente. — Remous d'exhaussement. — Étudions d'abord le premier cas, $\frac{\alpha i}{bg} < 1$ ou $H' < H$, celui d'un cours d'eau à faible pente, ou dans lequel la profondeur critique H' est plus petite que celle H du régime uniforme, et supposons en premier lieu que la profondeur h soit, en un certain point, plus grande que H. Alors h est, à plus forte raison, plus grand que H', les deux termes de la fraction sont positifs, dh a le même signe que ds et la profondeur h va constamment en augmentant à mesure que s augmente ou que l'on descend le cours d'eau ; il y a remous d'exhaussement. Lorsque h devient très grand, la fraction tend vers l'unité et dh

tend à devenir égal à ids : la surface libre tend vers l'horizontale : la courbe superficielle présente, vers l'aval, une branche infinie, asymptote à une horizontale. Si l'on remonte, au contraire, vers l'amont, en faisant décroître s, la profondeur h diminue en se rapprochant de H, et lorsqu'elle vient à en différer peu, la diminution de profondeur, dh, devient très petite par rapport à ids, la profondeur tend à devenir constante et égale à H. La courbe superficielle est asymptote, vers l'amont, à la ligne correspondant au régime uniforme. Le régime du cours d'eau est sous l'influence de son extrémité d'aval.

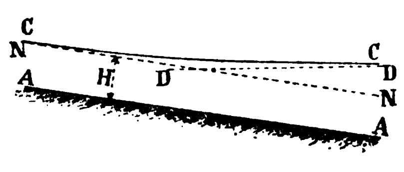


Fig. 62.

L'intégration de l'équation différentielle peut s'effectuer ; il suffit de l'écrire :

$$(21)\qquad ids = \left(1 + \frac{H^3 - \frac{\alpha i}{bg} H^3}{h^3 - H^3}\right) dh = \left[1 + \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{\frac{h^3}{H^3} - 1}\right] dh,$$

et d'effectuer le développement en série du quotient :

$$\frac{1}{\frac{h^3}{H^3} - 1} = \frac{H^3}{h^3} + \frac{H^6}{h^6} + \frac{H^9}{h^9} + \ldots\ldots,$$

série convergente, puisque h est plus grand que H. En faisant l'intégration depuis un profil défini par son abscisse s_0 et dans lequel la profondeur est h_0 jusqu'à un profil quelconque, on obtient, après avoir tout divisé par H :

$$\frac{i(s - s_0)}{H} = \frac{h - h_0}{H} + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{H^2}{h_0^2} - \frac{H^2}{h^2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{H^5}{h_0^5} - \frac{H^5}{h^5}\right) + \ldots\ldots\right]$$

Au lieu de développer en série le quotient $\frac{1}{\frac{h^3}{H^3} - 1}$, on peut, comme Bresse l'a fait, le décomposer en fractions simples en

appliquant la méthode générale de la décomposition des fractions rationnelles. On a, en effet, en appelant pour abréger h' le rapport $\frac{h}{H}$:

$$\frac{1}{h'^3-1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{h'-1} - \frac{h'+2}{h'^2+h'+1}\right],$$

puis, en multipliant par dh' et intégrant, il vient, après réductions :

$$\int \frac{dh'}{h'^3-1} = \frac{1}{6}\,\text{Log.}\,\frac{(h'-1)^2}{h'^2+h'+1} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc cot.}\,\frac{2h'+1}{\sqrt{3}} + \text{const.}$$

Bresse a calculé et donné, dans son volume d'hydraulique, une table des valeurs de la fonction :

$$\psi(x) = \frac{1}{6}\,\text{Log}\,\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc cot}\,\frac{2x+1}{3},$$

laquelle est le second membre changé de signe. On a ainsi :

$$\int \frac{dh'}{h'^3-1} = c^{te} - \psi(h').$$

D'ailleurs l'équation différentielle (19) peut s'écrire :

$$ids = dh + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)\frac{dh}{\frac{h^3}{H^3}-1} = dh + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)\frac{Hdh'}{h'^3-1}$$

Et par suite, en intégrant, mettant pour l'intégrale du dernier terme la valeur qui vient d'être écrite, et limitant l'intégration à deux profils d'abscisses s_0 et s, la constante disparaît et il vient :

$$\frac{i(s_0-s)}{H} = \frac{h_0-h}{H} + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)\left[\psi\left(\frac{h}{H}\right) - \psi\left(\frac{h_0}{H}\right)\right].$$

Le problème se trouve ainsi résolu de la manière la plus générale.

Pour se servir de cette équation, ou pour déterminer le

profil longitudinal de la surface libre d'un cours d'eau dont on connaît la pente de fond, i, et le débit q par unité de largeur, à partir d'un profil d'origine où l'on a constaté une profondeur h_0, on commencera par calculer H au moyen de l'équation (18) donnant :

$$H = \sqrt[3]{\frac{bq^2}{i}};$$

puis, prenant une profondeur arbitraire h, différente de h_0, on la mettra, ainsi que les autres quantités, dans la formule précédente qui donnera alors la distance s à laquelle se rencontrera cette profondeur h. Les valeurs de la fonction $\psi\left(\frac{h}{H}\right)$ seront prises dans la table de Bresse, ou bien dans la table n° XIII à la fin du présent volume qui en est extraite.

Soit par exemple $q = 5$ mc. 66 ou $q^2 = 32,0$; et $i = 0^m0002$ ou 0^m20 par kilomètre. Si l'on peut prendre pour b la valeur moyenne $b = 0,0004$, on aura $\frac{bq^2}{i} = 64$ et par suite $H = 4^m00$; avec $\alpha = \frac{10}{9}$, on a aussi $\frac{\alpha i}{bg} = 0,056$. Supposons qu'en un point donné la hauteur h_0 soit égale à 6^m00, le rapport $\frac{h_0}{H}$ sera $\frac{6}{4} =$ 1,50 ; cherchons à quelle distance en amont la profondeur sera réduite à 5 mètres : $h = 5^m$ ou $\frac{h}{H} = 1,25$. La table XIII donne $\psi\left(\frac{h_0}{H}\right) = 0,257$, $\psi\left(\frac{h}{H}\right) = 0,420$ et la formule précédente devient, en y mettant ces valeurs :

$$\frac{0,0002\ (s_0 - s)}{4} = \frac{1}{4} + 0,944\ (0,420 - 0,257),$$

d'où

$$s_0 - s = \frac{1,616}{0,0002} = 8.080 \text{ mètres}.$$

C'est à cette distance, en amont du point où la profondeur est de 6^m00, que l'on rencontrera celle de 5 mètres. On trouvera

de même les abscisses de profondeurs intermédiaires aussi rapprochées qu'on le voudra. Il suffira, en général, pour avoir une idée suffisante de l'allure de la courbe, d'en calculer deux ou trois points ; on voit combien ce calcul sera facile.

120. Cas où la pente est très faible. — Il arrive fréquemment, lorsque la pente est faible, que l'on peut négliger le terme $\frac{\alpha i}{bg}$ devant l'unité. Ainsi dans l'exemple qui précède ce rapport ne vaut que 0,056, pour une pente de 0^m20 par kilomètre. On ne commettrait, même dans ce cas, qu'une erreur de $\frac{1}{18}$ de la valeur du dernier terme en le laissant de côté. La solution générale peut alors se simplifier.

En y effaçant le terme en $\frac{\alpha i}{bg}$, l'équation différentielle (19) devient :

$$ids = \left(1 + \frac{H^3}{h^3 - H^3}\right) dh.$$

Appelons y la hauteur du remous ou la quantité dont la profondeur réelle h dépasse celle du régime uniforme H, ou posons :

$$h = H + y,$$

et remplaçons h par cette valeur, nous obtenons :

$$ids = \left(1 + \frac{H^3}{(H+y)^3 - H^3}\right) dy = \left(1 + \frac{H^3}{3H^2y + 3Hy^2 + y^3}\right) dy,$$

ou bien, en faisant la division :

$$ids = H\left(\frac{1}{3y} + \frac{2}{3H} + \frac{2y}{9H^2} - \frac{y^2}{9H^3} + \ldots\ldots\right) dy,$$

puis, en intégrant et divisant par H :

$$\frac{i(s - s_0)}{H} = \frac{1}{3}\,\text{Log.}\left(\frac{y}{y_0}\right) + \frac{2(y - y_0)}{3H} + \frac{y^2 - y_0^2}{9H^2} - \frac{y^3 - y_0^3}{27H^3} + \ldots$$

Dans les circonstances dont il s'agit, les hauteurs du remous,

y et y_0, sont généralement assez petites par rapport à H pour que l'on puisse négliger le carré du rapport $\frac{y}{3H}$, réduire le second membre à ses deux premiers termes et écrire :

$$(22) \qquad i(s - s_0) = \frac{H}{3} \text{Log}\left(\frac{y}{y_0}\right) + \frac{2}{3}(y - y_0).$$

Le logarithme qui figure dans cette formule est le logarithme népérien. Elle n'est applicable, il convient de le rappeler, qu'à des cours d'eau de largeur indéfinie et de pente très faible. Mais, dans ces cas particuliers, elle peut être employée utilement pour étudier les variations de hauteur des remous.

Appliquée à l'exemple numérique qui précède, c'est-à-dire en y faisant $i = 0{,}0002$, $H = 4$, $y = 1$, $y_0 = 2$, elle donne, en changeant les signes :

$$0{,}0002\,(s_0 - s) = \frac{4}{3}\text{Log.}2 + \frac{2}{3}(2 - 1) = \frac{4}{3} \times 0{,}693 + \frac{2}{3} = 1{,}590\,;$$

d'où $\qquad s_0 - s = 7950$ mètres au lieu de 8080.

Lorsque y diffère peu de y_0 et que l'on peut négliger les puissances supérieures de $\frac{y - y_0}{y_0}$, on a, à ce degré d'approximation :

$$\text{Log}\frac{y}{y_0} = \frac{y}{y_0} - 1 = \frac{y - y_0}{y_0},$$

ce qui permet d'écrire l'équation précédente :

$$i(s - s_0) = \frac{H + 2y_0}{3} \text{Log}\frac{y}{y_0}.$$

$H + y_0$ est la profondeur du cours d'eau en amont, au point où elle est le plus faible, $H + 2y_0$ peut être regardé comme différant peu de la profondeur moyenne, dans l'étendue du remous, que nous appellerons h_m, et alors :

$$(23) \qquad i(s - s_0) = \frac{h_m}{3} \text{Log.}\frac{y}{y_0}.$$

Cette formule du remous n'est, bien entendu, qu'approximative et son emploi, bien qu'il ait été proposé par Dupuit, pourrait conduire, dans certains cas, à des résultats numériques assez éloignés de la vérité ; mais elle n'en est pas moins précieuse, en ce qu'elle exprime, d'une manière simple, la loi du remous et qu'elle permet, bien mieux que les formules exactes plus compliquées, d'en apprécier toutes les particularités. Elle permet d'établir les propriétés suivantes de la courbe de remous, qu'il faut regarder non comme absolument rigoureuses, mais comme approchées :

1° La distance entre deux hauteurs de remous déterminées est en raison inverse de la pente du cours d'eau ;

2° La diminution du remous entre deux points est due non pas à leur distance, mais à leur différence de niveau ;

3° La distance entre deux hauteurs de remous est proportionnelle à la profondeur du courant, pour des pentes égales ;

4° La distance entre deux hauteurs de remous est proportionnelle au carré de la profondeur du courant pour des vitesses égales ; — ou en raison inverse du carré de la vitesse pour des profondeurs égales ;

5° La distance entre deux hauteurs de remous est proportionnelle au carré de la vitesse, pour des pentes égales ; — ou en raison inverse du carré de la pente pour des vitesses égales [1] ;

6° En général, ce qui augmente la longueur du remous, c'est la profondeur ; ce qui la diminue, c'est la pente du courant.

1. Ces deux dernières propriétés, 4° et 5°, se déduisent de la formule précédente en remarquant que i est sensiblement proportionnel à $\frac{U^2}{h_m}$, ce qui établit la proportionnalité entre le produit $U^2 (s - s_0)$ et $h_m^2 \operatorname{Log}\left(\frac{y}{y_0}\right)$; ou bien que h_m est proportionnel à $\frac{U^2}{i}$ ce qui établit de même une proportionnalité entre $i^2 (s - s_0)$ et $U^2 \operatorname{Log}\left(\frac{y}{y_0}\right)$.

Il en résulte qu'un remous produit dans un cours d'eau par une cause déterminée et qui, à l'étiage, cesse d'être sensible à une certaine distance en amont, peut, en temps de grandes eaux, ou lorsque la profondeur est augmentée, se faire sentir d'une façon appréciable à une bien plus grande distance.

La formule approximative (23) est commode pour obtenir une donnée rapide de l'étendue de la courbe du remous. Elle peut servir, par exemple, à donner une réponse approchée à la question suivante : A quelle distance, dans un canal de pente et de profondeur moyenne données, un remous se réduit-il à la moitié de sa hauteur? Il suffit d'y faire $\frac{y}{y_0} = 2$ et de calculer la valeur correspondante de $s - s_0$. Si, pour continuer le même exemple numérique que plus haut, on prend $i = 0,0002$ et $h_m = 5^m50$ profondeur moyenne entre le point où elle atteint 6 mètres et celui où elle sera réduite à 5, le remous étant alors diminué de moitié, on trouve $i(s - s_0) = \frac{5,50}{3}$ Log. $2 = 1,270$ et par suite $s - s_0 = 6350$ mètres au lieu de 8080 que nous avait donnés la formule exacte et de 7950 qu'avait fournis la formule approchée (22).

On voit donc avec quelle réserve il faut accepter les résultats de cette formule (23) qui doit plutôt servir à étudier sommairement les lois du remous qu'à en calculer les valeurs exactes.

121. Canal rectangulaire de faible largeur. — On peut, avec un peu plus de complications dans les calculs, établir des formules analogues aux précédentes pour le cas d'un canal rectangulaire de largeur finie.

Soit l cette largeur, h étant toujours la profondeur variable d'une section à l'autre. Le rayon moyen $\frac{\omega}{\chi}$ vaudra alors $\frac{lh}{l + 2h}$; et en opérant sur la formule (17) de la même manière que nous l'avons fait, n° 116, pour trouver celle (19), et en remarquant que le débit total $Q = hlU$, nous obtiendrons :

(24) $$ids - dh = -\frac{\alpha}{g}\frac{Q^2}{l^2h^3}dh + b\frac{(l+2h)Q^2}{l^3h^3}ds.$$

En appelant encore H la profondeur correspondant au régime uniforme, pour lequel le rayon moyen serait $\frac{lH}{l+2H}$ et la vitesse moyenne $\frac{Q}{lH}$, on a pour déterminer H la relation

$$\frac{lH}{l+2H}i = b\frac{Q^2}{l^2H^2}$$

qui permet d'éliminer Q^2 de l'équation précédente; et l'on trouve :

$$ids - dh = -\frac{\alpha i}{bg}\cdot\frac{l}{l+2H}\cdot\frac{H^3}{h^3}dh + i\frac{l+2h}{l+2H}\cdot\frac{H^3}{h^3}ds.$$

Posons pour simplifier :

$$1 - \frac{\alpha i}{bg}\cdot\frac{l}{l+2H} = m\,;$$

si nous nous bornons à considérer des cours d'eau tranquilles à faible pente, m sera un nombre inférieur à l'unité mais assez voisin de 1. Remplaçons, comme plus haut, h par $H + y$ en appelant encore y la hauteur du remous au-dessus de la ligne de régime uniforme, cette équation deviendra :

$$ids = \frac{(H+y)^3 - (1-m)H^3}{(H+y)^3 - \left(1 + \frac{2y}{l+2H}\right)H^3}dy.$$

ou bien, en développant :

$$ids = \frac{mH^3 + y^3 + 3Hy^2 + 3H^2y}{y\left[\left(y + \frac{3H}{2}\right)^2 + H^2\left(\frac{3l-2H}{4(l+3H)}\right)\right]}dy.$$

Appelons encore :

$$n = \frac{3l+4H}{l+2H},$$

et remarquons que le nombre ainsi désigné par n sera toujours compris entre 2 et 3, car l et H sont des quantités positives, et l'on a $\frac{l}{l+2H}=n-2$, et $\frac{2H}{l+2H}=3-n$. Alors l'équation devient :

$$ids = \frac{mH^3 + y^3 + 3Hy^2 + 3H^2y}{y\left[\left(y+\frac{3H}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{9}{4}\right)H^2\right]} \cdot dy$$

$$= \left\{ 1 + \frac{mH}{ny} + \frac{H^2(3n - 3m - n^2) - mHy}{n\left[\left(y+\frac{3H}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{9}{4}\right)H^2\right]} \right\} dy.$$

L'intégration conduite à la manière ordinaire donne :

$$is + c^{te} = y + \frac{mH}{n}\left[\text{Log}\frac{y}{\sqrt{\left(y+\frac{3H}{2}\right)^2\left(+n-\frac{9}{4}\right)H^2}} - \frac{n^2+\frac{3}{2}m-3n}{m\sqrt{n-\frac{9}{4}}}\text{arc tang}\frac{y+\frac{3H}{2}}{H\sqrt{n-\frac{9}{4}}}\right]$$

Pour tirer quelque chose de cette équation compliquée, remarquons que, le dernier terme étant ordinairement petit, une petite erreur sur le coefficient qui l'affecte n'a pas grande importance et que l'on peut alors y faire approximativement $m = 1$, et $n = \frac{10}{4}$ puisque n doit être compris entre 2 et 3. Pour simplifier le premier terme, affecté du logarithme il faut, sous le radical, négliger $\left(n-\frac{9}{4}\right)H^2$, ou faire $n=\frac{9}{4}$, ce qui est encore dans les limites de la variation possible de cette quantité et ne s'éloigne pas beaucoup, en tout cas, de sa valeur réelle, comprise entre 2 et 3. Il reste alors :

$$is + \text{const.} = y + \frac{mH}{n}\left[\text{Log}\frac{y}{y+\frac{3H}{2}} - \frac{1}{2}\text{ arc tang } 3\left(1 + \frac{2y}{3H}\right)\right]$$

ce qui, en développant l'arc tangente, négligeant les puissances supérieures de $\frac{2y}{3H}$ et déterminant la constante, donne :

$$i(s-s_0)=y-y_0+\frac{mH}{n}\left[\text{Log}\,\frac{y(3H+2y_0)}{y_0(3H+2y)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3H}(y-y_0)\right]$$

$$=(y-y_0)\left(1-\frac{m}{9n}\right)+\frac{mH}{n}\left[\text{Log}\,\frac{y}{y_0}\cdot\frac{\left(H+\frac{2}{3}y_0\right)}{\left(H+\frac{2}{3}y\right)}\right].$$

Dupuit arrive à une formule analogue dans laquelle le terme négatif, d'ailleurs très petit, $\frac{m}{9n}$ n'existe pas, et où, au dernier terme se trouve, au numérateur et au dénominateur, la fraction $\frac{3}{4}$ au lieu de celle $\frac{2}{3}$ donnée ici.

On peut encore, lorsque y et y_0 sont petits par rapport à H, remplacer $\text{Log}\,\frac{H+\frac{2}{3}y}{H+\frac{2}{3}y} = \text{Log}\,\frac{1+\frac{2y_0}{3H}}{1+\frac{2y}{3H}}$ par $\frac{2}{3}\,\frac{y_0-y}{H}$, et la formule prend la forme plus simple :

$$(25)\qquad i(s-s_0)=(y-y_0)\left(1-\frac{7m}{9n}\right)+\frac{mH}{n}\,\text{Log}\,\frac{y}{y_0},$$

analogue à l'équation (22) que nous avons trouvée plus haut pour les canaux de largeur indéfinie. Elle contient, en plus, le rapport :

$$\frac{m}{n}=\frac{1-\frac{\alpha i}{bg}\cdot\frac{l}{l+2H}}{\frac{3l+4H}{l+2H}}=\frac{l\left(1-\frac{\alpha i}{bg}\right)+2H}{3l+4H}.$$

Si, par exemple, $\frac{m}{n}=\frac{2}{5}$, ce qui a lieu à peu près pour $l=2H$, elle s'écrit :

$$(26)\qquad i(s-s_0)=\frac{31}{45}(y-y_0)+\frac{2}{5}H\,\text{Log}\,\frac{y}{y_0}.$$

Le coefficient $\frac{31}{45}$ remplace $\frac{30}{45}$ ou $\frac{2}{3}$ et le coefficient $\frac{2}{5}$ est à la

place de $\frac{1}{3}$, comparativement à la formule des canaux très larges. Toutes choses égales, le remous s'étend donc plus loin dans un canal de faible largeur que dans un cours d'eau de largeur indéfinie.

122. Construction de la courbe du remous. — Il n'est pas inutile de faire remarquer que la courbe du remous, dont nous avons donné l'équation en série pour les canaux très larges et sous une forme approximative pour les autres, est déterminée, pour un cours d'eau donné, lorsque l'on en connaît le débit, qui permet de calculer la profondeur H répondant au régime uniforme. Si donc on a construit un gabarit représentant cette courbe avec une ligne droite figurant le fond du lit, il suffira de connaître un point de cette courbe pour, en faisant glisser le gabarit sur cette droite et en amenant un point du gabarit en coïncidence avec le point donné, tracer immédiatement la courbe du remous dans toute son étendue.

Si, par exemple, en un point A d'un cours d'eau à pente régulière (fig. 63) et de débit supposé constant Q, on établit un barrage transversal formant déversoir, on peut se proposer de chercher la modification qui sera produite par cet ouvrage dans le niveau de la surface libre en amont. Cette surface libre était

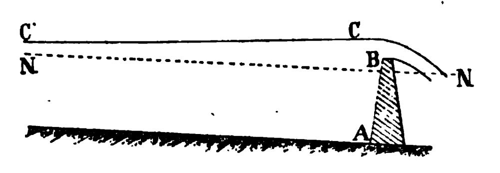


Fig. 63.

primitivement une droite NN parallèle au fond du lit et à une profondeur H correspondant au régime uniforme. On calculera d'abord au moyen de la formule des déversoirs la charge h' qu'il sera nécessaire d'avoir, sur la crête du déversoir, pour débiter le volume Q : cette charge h' donnera la hauteur du

niveau au-dessus de la crête, en amont du déversoir, c'est-à-dire l'ordonnée du point C, si la hauteur BA est également connue. Le point C étant ainsi déterminé, le reste de la courbe du remous se tracera comme il vient d'être dit.

D'ailleurs, comme cette courbe est asymptote à la ligne NN' on peut, sans changer sensiblement les ordonnées de ses divers points, la déplacer longitudinalement dans un sens parallèle au fond du lit. Il importe donc peu de savoir exactement à quelle distance, en amont du déversoir, doit être placé le point C; on peut le supposer soit verticalement au-dessus de la crête, soit, ce qui vaut mieux, à une distance, vers l'amont, égale à cinq ou six fois au moins l'épaisseur de la lame déversante.

Il est rare que, dans la pratique, on ait besoin de calculer exactement la courbe du remous. Une pareille exactitude ne pourrait d'ailleurs avoir d'application que dans un canal parfaitement régulier comme le supposent les équations du mouvement. Le plus ordinairement, cette régularité parfaite n'existe pas et les inégalités du lit rendent la formule simplement approximative. On peut alors, puisque l'on doit nécessairement se contenter d'une approximation, en choisir une autre, peut-être un peu plus éloignée de la réalité, mais qui a l'avantage d'être beaucoup plus simple, et remplacer la courbe du remous soit par un arc de cercle, facile à tracer s'il s'agit d'une construction graphique, soit par un arc de parabole dont les ordonnées se calculent immédiatement. La position du point C (fig. 64) par où passe la courbe du remous étant déterminée comme il vient d'être dit, on suppose qu'en ce point la tangente est horizontale et que, par suite, la courbe du remous est tangente à la ligne CD, menée horizontalement par le point C. De plus, au lieu de la supposer asymptote à la ligne AB représentant le niveau du régime uniforme, on la suppose tangente à cette ligne. Si l'on adopte, pour la courbe du remous,

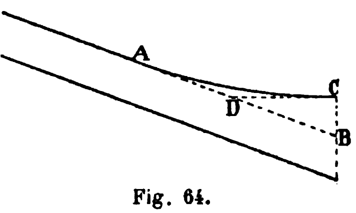


Fig. 64.

un arc de cercle, cet arc sera entièrement déterminé par la condition d'être tangent au point C à la ligne CD et d'être également tangent à la ligne AB. Il en résultera que le point de contact de l'arc de cercle avec cette ligne se trouvera à une distance DA = DC du point D. Si l'on prend, pour courbe du remous, un arc de parabole dont le sommet soit en C, cet arc sera également déterminé par la condition d'être tangent à la ligne AB; mais alors la distance DA du point de contact A, au point D, sera égale à DB, c'est-à-dire à très peu près la même que dans le cas de l'arc de cercle.

Toutes les observations faites sur des cours d'eau à pente modérée s'accordent pour reconnaître que le remous cesse d'être appréciable au-delà d'une distance double de celle qu'atteindrait le niveau tenu horizontalement c'est-à-dire que, pratiquement, BA est double de BD, comme nous venons de le supposer.

Dans la seconde hypothèse, si l'on appelle y_0 la surélévation CB du point C au-dessus de la ligne du régime uniforme et y la surélévation du niveau en un point quelconque situé à une distance s, comptée en remontant en amont du point C, on aura :

$$y = y_0 - is\left(1 - \frac{is}{4y_0}\right). \tag{27}$$

Cette formule approximative peut, bien souvent, être suffisante en pratique; cependant, elle ne tient aucun compte de la profondeur H du régime uniforme : elle donne par conséquent la même forme pour la courbe du remous d'un cours d'eau de pente donnée, quelque soit son débit, ce qui est manifestement inexact. Je ne l'indique, par conséquent, qu'en raison de la facilité qu'elle donne pour le calcul de la surélévation y en amont d'un barrage qui a produit la surélévation y_0; mais il ne faut en accepter les résultats que sous réserves, c'est-à-dire pour une première approximation. Si l'on ne veut pas recourir à la formule exacte qui, lorsque l'on n'a pas sous la main les

tables de Bresse, donne lieu à des calculs extrêmement laborieux, il serait peut-être préférable de prendre la formule de Dupuit (22) pour les canaux très larges, ou la formule (25) pour les canaux rectangulaires de largeur modérée dans lesquelles on remplacerait le logarithme népérien Log $\frac{y}{y_0}$ par $\frac{y-y_0}{y_0}$. Par exemple, en mettant dans cette dernière formule (25), pour $\frac{m}{n}$ la valeur moyenne $\frac{2}{5}$ on aurait, en définitive, et en adoptant pour y, y_0 et s les significations qui viennent de leur être données :

$$(28) \quad is = (y_0 - y)\left(\frac{2H}{5y} + \frac{31}{45}\right) = \frac{y_0 - y}{5}\left(\frac{2H}{y} + 3,444...\right),$$

équation un peu plus compliquée que la précédente, mais qui serait sans doute plus approchée.

123. Cours d'eau à faible pente. Remous d'abaissement. — Reprenons la discussion générale de l'équation différentielle (19), et considérons le cas où, $\frac{\alpha i}{bg}$ étant toujours plus petit que l'unité, c'est-à-dire le cours d'eau étant à faible pente, on aurait $h < H$: c'est-à-dire une profondeur d'eau inférieure à celle du régime uniforme. L'équation (19) s'applique d'ailleurs à un cours d'eau de largeur indéfinie.

Si nous supposons que h soit très peu inférieur à H, il pourra être en même temps supérieur à la profondeur critique H', et alors le numérateur de l'expression (20) sera positif, le dénominateur négatif; dh sera de signe contraire à ds, la profondeur décroîtra lorsque l'on marchera dans le sens du courant, de l'amont vers l'aval. En remontant, h augmentera et s'approchera indéfiniment de H. La courbe du remous est encore asymptote, vers l'amont, à la ligne du régime uniforme, mais elle est au-dessous de cette ligne : il y a remous d'abaissement. La profondeur h, continuant à décroître à mesure que l'on descend, s'approchera de la profondeur critique H' et finira par l'atteindre.

Le régime varié du cours d'eau est alors sous l'influence de son extrémité d'aval et l'on peut se représenter les circonstances qui doivent se produire à cette extrémité pour y obtenir un abaissement rapide ou brusque assimilable à la discontinuité que signalent les équations. Cela arrive, par exemple, lorsqu'il se trouve, dans le fond du lit, une solution de continuité par laquelle le liquide s'écoule et peut prendre une vitesse se rapprochant de la verticale, et en particulier lorsqu'un canal à pente régulière débouche dans un réservoir plus profond, dans lequel le niveau de l'eau est plus bas que le fond du lit du canal alimentaire (fig. 65). La surface libre, dans

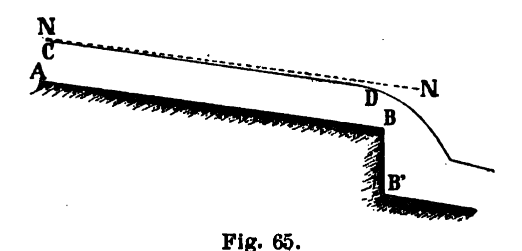


Fig. 65.

ce canal, se tient alors au-dessous de la ligne correspondant au régime uniforme et s'en rapproche indéfiniment à mesure que l'on remonte le courant. La courbe du remous peut donc la représenter depuis l'infini, en amont, jusqu'aux abords du point où commence le déversement.

L'intégration de l'équation différentielle peut se conduire de la même manière que précédemment. Nous pouvons d'abord lui donner la forme (21), ou bien, en changeant le signe du dernier terme pour mettre en évidence celui du dénominateur :

$$ids = \left[1 - \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{1 - \frac{h^3}{H^3}} \right] dh.$$

Le développement en série du facteur $\frac{1}{1 - \frac{h^3}{H^3}}$ donne :

$$\frac{1}{1-\frac{h^3}{H^3}}=1+\frac{h^3}{H^3}+\frac{h^6}{H^6}+\frac{h^9}{H^9}+\ldots\ldots,$$

série convergente puisque h est inférieur à H. En faisant l'intégration entre deux profils d'abscisses s et s_0, on obtient :

$$\frac{i(s-s_0)}{H}=\frac{h-h_0}{H}\left(1-\frac{\alpha i}{bg}\right)\left[\frac{h-h_0}{H}+\frac{1}{4}\left(\frac{h^4}{H^4}-\frac{h_0^4}{H^4}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{h^7}{H^7}-\frac{h_0^7}{H^7}\right)+\ldots\right]$$

ou bien en réduisant :

$$\frac{i(s-s_0)}{H}=\frac{\alpha i}{bg}\cdot\frac{h-h_0}{H}+\left(1-\frac{\alpha i}{bg}\right)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h_0^4}{H^4}-\frac{h^4}{H^4}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{h_0^7}{H^7}-\frac{h^7}{H^7}\right)+\ldots\ldots\right]$$

L'intégration peut d'ailleurs se faire sous forme finie, comme dans le cas précédent, au moyen de la fonction de Bresse $\psi(x)$ définie plus haut. Le résultat trouvé alors et exprimé par l'équation :

$$\frac{i(s-s_0)}{H}=\frac{h-h_0}{H}+\left(1-\frac{\alpha i}{by}\right)\left[\psi\left(\frac{h_0}{H}\right)-\psi\left(\frac{h}{H}\right)\right]$$

est général et s'applique aussi bien au remous d'abaissement. La table de Bresse donne en effet la valeur de la fonction $\psi(x)$ pour les valeurs de son argument x inférieures à l'unité comme pour les valeurs supérieures.

On pourrait répéter ici ce qui a été dit sur la manière de se servir de la courbe du remous. Si l'on en a construit un gabarit en indiquant la ligne du fond, la connaissance d'un seul point de la courbe suffira pour la déterminer complètement.

Il est d'ailleurs évident, aussi bien pour le remous d'exhaussement que pour celui d'abaissement, que la forme de la courbe du remous dépend du débit. On peut donc imaginer que, pour un cours d'eau donné, l'on ait construit les gabarits des courbes de remous correspondant à un certain nombre de débits, et alors il suffira de connaître deux points de la surface libre pour trouver le débit correspondant en cherchant, parmi tou-

tes les courbes de remous, celle qui peut passer par les deux points donnés.

Le même problème peut se résoudre aussi par la méthode analytique, au moyen d'une série de tâtonnements.

121. Cours d'eau à faible pente. Ressaut. — Au lieu de supposer h légèrement plus petit que H et plus grand que $H' = \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}}\, H$, supposons-le maintenant plus petit que cette profondeur critique. Les deux termes de la fraction $\frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}$ de l'équation (20) seront négatifs, et dh sera de même signe que ds. La profondeur h croîtra à mesure que l'on descendra le courant et atteindra bientôt la profondeur critique pour laquelle $\frac{dh}{ds}$ devient infini et le régime permanent impossible dans les conditions où il est supposé. D'autre part, si, à partir de ce point, on remonte le courant, h étant assez notablement différent de H, le dénominateur de la fraction précédente ne sera pas très petit, dh aura une valeur comparable à celle de ds, la profondeur h ira en décroissant rapidement et il arriverait même que la courbe représentant la surface libre viendrait rencontrer le fond du lit, c'est-à-dire que h s'annulerait. Il se produira donc, dans ces circonstances spéciales, à la suite d'une profondeur h assez petite ou très petite, un relèvement assez rapide de la surface libre, qui précèdera une discontinuité dans le mouvement permanent exprimé par l'équation (20) c'est-à-dire un véritable ressaut après lequel h sera devenu plus grand que la profondeur critique H', ou peut être même que la profondeur de régime uniforme H. La portion de cours d'eau en amont de ce ressaut sera sous l'influence de son extrémité d'amont. Après le ressaut, le régime deviendra uniforme ou s'établira suivant l'influence de l'extrémité d'aval, d'après l'une ou l'autre des deux hypothèses que nous venons d'examiner.

125. Canal rectangulaire à plafond horizontal. — On pourrait, comme on vient de le faire pour le remous d'exhaussement, chercher comment se modifie la formule générale lorsqu'au lieu de l'appliquer à un canal de largeur indéfinie, on veut considérer un cours d'eau de dimensions restreintes. Nous ne ferons cette étude, qui donne lieu à des calculs compliqués, mais non difficiles, que dans une hypothèse qui leur apporte une certaine simplification et qui correspond à un cas assez fréquent dans la pratique : celui où la pente du fond est rigoureusement nulle : $i = 0$; c'est ce qui arrive, par exemple, dans un canal de navigation dont le plafond est horizontal et qui sert néanmoins à l'écoulement d'un certain volume d'eau.

Supposons aussi, pour simplifier les calculs, que les parois latérales soient verticales, ou le lit rectangulaire ; nous indiquerons, à la fin, comment devront être modifiées les formules définitives pour le cas, plus ordinaire, d'une section en forme de trapèze. Faisons $i = 0$ dans l'équation (24) et résolvons-la par rapport à ds, nous obtiendrons :

$$ds = \frac{\alpha}{bg} \cdot \frac{l}{l+2h} dh - \frac{l^2h^3}{bQ^2(l+2h)} dh.$$

En général, le premier terme du second membre de cette équation sera négligeable par rapport aux autres ; en effet avec les valeurs moyennes des coefficients α et b, le quotient $\frac{\alpha}{bg}$ est inférieur à 300, le facteur $\frac{l}{l+2h}$ est inférieur à l'unité ; ce premier terme est donc notablement inférieur à $300\,dh$. Or, dans un pareil cours d'eau, où la pente du fond est nulle, la pente superficielle dépasse rarement 0 m. 20 ou 0 m. 30 par kilomètre ; en la supposant de 0 m. 33, on a $ds = 3000\,dh$ en valeur absolue, le premier terme est donc toujours beaucoup plus petit que le dixième des deux autres et l'on peut le négliger, si l'on se contente d'une approximation. Il reste alors :

$$ds = -\frac{l^2h^3dh}{bQ^2(l+2h)}.$$

Cela montre, tout d'abord, que dh et ds sont de signes contraires, ce qui caractérise le remous d'abaissement. En intégrant entre deux profils d'abscisses s_1 et s_0, on obtient[1] :

$$s_1 - s_0 = \frac{l^3}{bQ^2} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l + 2h}.$$

On peut tirer de là l'expression du débit Q en fonction des différences de profondeurs dans les profils donnés :

$$\text{(30)} \qquad Q^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l+2h}.$$

Supposons alors que dans les deux profils définis par les abscisses s_0 et s_1 et distants par conséquent de la quantité donnée $(s_1 - s_0)$, on ait constaté, par une première observation, les profondeurs h_0 dans celui d'amont et h_1 dans celui d'aval; puis, par une seconde observation,

h_0 en amont, h_2 en aval ;

enfin, par une troisième,

h_1 en amont, h_2 en aval.

Désignons les débits correspondants par $Q_{0,1}$, $Q_{0,2}$ et $Q_{1,2}$ les valeurs de ces débits seront données par les équations :

$$Q_{0,1}^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l+2h},$$

$$Q_{0,2}^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_2}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l+2h},$$

$$Q_{1,2}^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_2}^{h_1} \frac{h^3 dh}{l+2h};$$

d'où résulte l'équation remarquable :

1. L'intégration n'a rien de difficile, et donne pour résultat :

$$s - s_0 = \frac{l^6}{8bQ^2} \left[\frac{3}{4} \frac{h_0^3 - h_1^3}{l^3} - \frac{h_0 - h_1}{l} \left(\frac{h_0 + h_1}{l} - 1 \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{l + 2h_0}{l + 2h_1} \right].$$

$$(31)\qquad Q_{0,2}^2 = Q_{0,1}^2 + Q_{1,2}^2.\quad (^1)$$

Supposons que, pour un cours d'eau de section transversale donnée, ou pour des valeurs déterminées de l et de h, on ait calculé les valeurs du débit Q en admettant que la profondeur dans une section d'amont soit constante et égale à h_0, cette profondeur étant la plus grande de celles que l'on est exposé à voir se réaliser dans la pratique, et que, dans une autre section, située en aval de la première à une distance donnée $s - s_0$, la profondeur ait eu successivement les valeurs h_1, h_2, h_3..... inférieures à h_0 (la distance $s - s_0$ pourra être, par exemple, celle de deux ouvrages sur lesquels se trouve une échelle graduée), on obtiendra ainsi un certain nombre de valeurs $Q_{0,1}$, $Q_{0,2}$, $Q_{0,3}$... pour le débit du cours d'eau dans ces diverses hypothèses. Ce calcul, étant fait une fois pour toutes, pourra servir à déterminer immédiatement le débit lorsque les profondeurs, dans les deux sections considérées, auront des valeurs quelconques h_n, h_p. En effet, l'équation précédente donnera :

$$Q_{n,p}^2 = Q_{0,p}^2 - Q_{0,n}^2\,;$$

le débit cherché sera le troisième côté d'un triangle rectangle dont les deux autres seront les débits déjà calculés.

Remarquons d'ailleurs que pour des sections transversales semblables ou pour une même valeur du rapport $\frac{h}{l}$, les débits sont en raison du cube de la largeur l des cours d'eau ; la formule générale (30) peut en effet s'écrire

$$Q^2 = \frac{l^6}{b\,(s - s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{\frac{h^3}{l^3}\, d\,.\,\frac{h}{l}}{1 + 2\,\frac{h}{l}}\,;$$

et par conséquent il suffira, après avoir calculé le débit pour

1. Cette équation a été donnée par M. Cosserat, dans un rapport sur les conditions d'écoulement dans les canaux d'assèchement des Wateringues du Nord et du Pas-de-Calais.

un cours d'eau donné de largeur l, de le multiplier par le rapport $\frac{l'^3}{l^3}$ des cubes des largeurs pour avoir celui d'un cours d'eau d'une autre largeur l'. De même, les calculs faits pour une certaine longueur $s - s_0$ pourront s'appliquer à une autre longueur $s' - s_0$ en remarquant que les débits sont en raison inverse de la racine carrée de la longueur aux extrémités de laquelle les profondeurs ont été mesurées.

126. Canal à section trapèze et à fond horizontal. — Tout ce qui précède s'applique aussi au cas où le canal à fond horizontal a une section transversale en forme de trapèze au lieu d'une section rectangulaire. Si l est toujours la largeur au plafond, h la profondeur et m l'inclinaison des talus, la largeur à la surface étant alors $l + 2\,mh$, le périmètre mouillé est $l + 2h\sqrt{1+m^2} = l + 2\,ph$, en posant pour abréger $p = \sqrt{1+m^2}$. Alors la formule générale (30) doit être écrite :

$$Q^2 = \frac{1}{b(s-s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3(l+mh)^3}{l+2ph}\, dh\,;$$

et son intégration conduit à l'expression compliquée [1]

$$(32)\quad Q^2 = \frac{l^6}{b(s-s_0)}\left[\frac{m^3}{12\,p}\left(\frac{h_0{}^6 - h_1{}^6}{l^6}\right) + \frac{m^2}{10\,p}\left(3 - \frac{m}{2\,p}\right)\left(\frac{h_0{}^5 - h_1{}^5}{l^5}\right)\right.$$
$$+ \frac{m}{8\,p}\left(3 - \frac{3\,m}{2\,p} + \frac{m^2}{4\,p^2}\right)\left(\frac{h_0{}^4 - h_1{}^4}{l^4}\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{2\,p}\left(1 - \frac{m}{2\,p}\right)^3\left(\frac{h_0{}^3 - h_1{}^3}{3\,l^3} - \frac{h_0{}^2 - h_1{}^2}{4\,pl^2} + \frac{h_0 - h_1}{4\,p^2 l} - \frac{1}{8\,p^3}\,\mathrm{Log}\,\frac{l+2\,ph_0}{l+2\,ph_1}\right)\right]$$

dont le dernier terme affecté d'un logarithme est évidemment négligeable par rapport aux autres, mais qui malgré cela donne lieu à des calculs laborieux.

Si, pour abréger l'écriture, on pose

1. Cette expression se réduit à celle qui est donnée plus haut, en note, pour le lit rectangulaire lorsque l'on y fait $m = 0$, $p = 1$.

$$\varphi\left(\frac{h}{l}\right)=\frac{m^3}{12p}\cdot\frac{h^6}{l^6}+\frac{m^2}{10p}\left(3-\frac{m}{2p}\right)\frac{h^5}{l^5}+\frac{m}{8p}\left(3-\frac{3m}{2p}+\frac{m^2}{4p^2}\right)\frac{h^4}{l^4}+$$
$$+\frac{1}{2p}\left(1-\frac{m}{2p}\right)^3\left[\frac{h^3}{3l^3}-\frac{h^2}{4pl^2}+\frac{h}{4p^2l}-\frac{1}{8p^3}\cdot \text{Log}\left(1+2p\frac{h}{l}\right)\right],$$

et si l'on met à la place de $\frac{1}{\sqrt{b}}$ le coefficient C, cette expression (32) s'écrit :

$$Q=\frac{Cl^3}{\sqrt{s-s_0}}\sqrt{\varphi\left(\frac{h_0}{l}\right)-\varphi\left(\frac{h_1}{l}\right)}.$$

Voici un petit tableau qui donne quelques-unes des valeurs de la fonction $\varphi\left(\frac{h}{l}\right)$ et qui permettra, sinon de calculer exactement le débit, au moins de se faire une première idée de son importance.

Valeurs de $\frac{h}{l}$	Parois verticales — $m=0$	Talus inclinés à : 1 de base pour 2 de hauteur — $m=0.50$	1 de base pour 1 de hauteur — $m=1.00$	3 de base pour 2 de hauteur — $m=1.50$	2 de base pour 1 de hauteur — $m=2.00$	3 de base pour 1 de hauteur — $m=3.00$
0.20	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
0.30	0.0014	0.0019	0.0023	0.0027	0.0031	0.0041
0.40	0.0039	0.0058	0.0077	0.0097	0.0116	0.0160
0.50	0.0088	0.0143	0.0202	0.0263	0.0328	0.0476
0.60	0.0167	0.030	0.045	0.061	0.078	0.118
0.70	0.029	0.056	0.089	0.125	0.165	0.258
0.80	0.046	0.098	0.161	0.235	0.318	0.512
0.90	0.068	0.159	0.276	0.414	0.57	0.95
1.00	0.098	0.247	0.45	0.69	0.97	1.65

Soit, par exemple, à déterminer le débit d'un cours d'eau à plafond horizontal ayant 5 m. 00 de largeur au plafond, des talus en terre à 3 de base pour 2 de hauteur, et dont la pro-

fondeur, égale à trois mètres dans un profil d'amont, se trouve réduite à 2 m. 50 dans un profil situé à trente kilomètres en aval du premier.

On a alors : $s - s_0 = 30.000$, $m = 1{,}50$, $\frac{h_0}{l} = 0{,}60$, $\frac{h_1}{l} = 0{,}50$ La table XII donne d'abord, pour la valeur moyenne de $\frac{h}{l} = 0.55$, le rayon moyen $R = 0.61\ h = 0.61 \times 2.75 = 1$ m. 68. Puis, la table IX, pour cette valeur du rayon moyen et des parois en terre, fournit la valeur du coefficient $C = 45$ environ. Le tableau précédent donne, pour $\frac{h}{l} = 0.60$, $\varphi\left(\frac{h}{l}\right) = 0.061$ et pour $\frac{h}{l} = 0.50$, $\varphi\left(\frac{h}{l}\right) = 0{,}026$; par conséquent :

$$Q = \frac{(5.00)^2 \times 45}{\sqrt{30.000}} \sqrt{0{,}061 - 0{,}026} = 6 \text{mc. } 07\,;$$

soit, en chiffre rond, six mètres cubes par seconde.

On aurait pu, d'une façon moins rigoureuse, se rendre compte du débit en prenant la pente superficielle moyenne $I = \frac{0.50}{30000}$ et calculant la vitesse moyenne par la formule du mouvement uniforme : $U = C\sqrt{RI} = 45\sqrt{1.68 \times \frac{0.50}{30000}}$, qui aurait donné $U = 0$ m. 234. La section transversale ayant, en moyenne, une superficie de 25 mq. 09, on aurait trouvé, pour le débit, le chiffre $Q = 0{,}234 \times 25{,}09 = 5$ mc 87, sensiblement le même que le précédent. Dans bien des cas, ce calcul rapide ne donnerait pas un résultat aussi approché.

127. Cours d'eau à forte pente. — Occupons-nous maintenant des cours d'eau à forte pente, pour lesquels $\frac{\alpha i}{bg}$ est plus grand que l'unité. L'équation générale, applicable au cas d'un cours d'eau rectangulaire très large peut toujours se mettre sous la forme (20) :

$$ids = \frac{h^3 - \frac{\alpha i}{bg}}{h^3 - H^3}\,dh = \frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}\,dh.$$

Supposons d'abord que h soit légèrement supérieur à H, mais inférieur à la profondeur critique H′. Le numérateur de la fraction est négatif, le dénominateur positif, et dh est de signe contraire à ds. La profondeur h va en décroissant à mesure que l'on descend et s'approche indéfiniment de la profondeur H correspondant au régime uniforme. En remontant, h croît, s'approche de H′ et finit par atteindre cette profondeur critique. Le régime varié fait suite à un abaissement brusque qui peut être un ressaut d'abaissement et il est sous l'influence de l'extrémité d'amont où se produit cet abaissement brusque. Au delà, en descendant, la forme de la courbe est donnée par les mêmes équations que plus haut, dans lesquelles $1 - \frac{\alpha i}{bg}$ est négatif au lieu d'être positif.

Si h, supérieur à H, est en même temps supérieur à $H' = H\sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}}$, les deux termes de la fraction sont de même signe et dh est de même signe que ds. La profondeur va en croissant à mesure que l'on descend. La courbe de la surface libre est asymptote à une horizontale au-dessous de laquelle elle reste et dont elle s'approche indéfiniment. Cette courbe succède à un ressaut d'exhaussement qui se produit vers son origine et en vertu duquel la profondeur h, précédemment inférieure à $H\sqrt{\frac{\alpha i}{bg}}$ ou même à H, devient brusquement supérieure à la première de ces deux quantités. Le régime s'éloigne de plus en plus de l'uniformité et le niveau tend vers l'horizontale comme dans le premier cas que nous avons examiné. L'écoulement se fait sous l'influence de l'extrémité aval du cours d'eau, où se trouve la cause qui maintient ainsi le niveau à peu près horizontal (fig. 66).

Enfin, supposons h inférieur à H et par conséquent à

$H' = H\sqrt{\frac{\alpha i}{bg}}$; les deux termes de la fraction sont négatifs, h va en augmentant à mesure que l'on descend et s'approche indéfiniment de H. Vers l'amont, h décroissant lorsqu'on re-

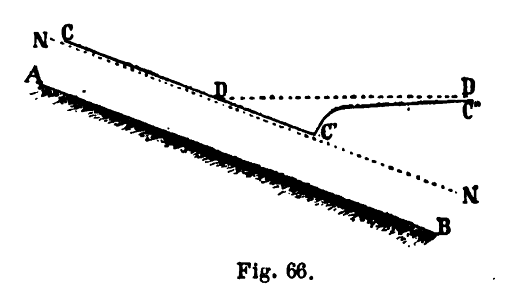


Fig. 66.

monte, finirait par s'annuler et la courbe de la surface libre rencontrerait le fond du lit. La courbe dont il s'agit fait donc suite à une portion où la profondeur peut être très faible ; mais cette profondeur s'accroît régulièrement et sans ressaut, contrairement à ce qui se passe, dans les mêmes circonstances, lorsque le cours d'eau est à faible pente.

128. Résumé de la discussion. — De toute cette discussion, il résulte que, dans un canal découvert de section rectangulaire et de pente constante, il y a une profondeur critique H′ définie par l'équation :

$$H' = \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}}\,H = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}},$$

dans laquelle q est le débit par unité de largeur du cours d'eau. Si la profondeur réelle h en un point donné est supérieure à cette profondeur critique, l'écoulement est tranquille, et le cours d'eau, quelle que soit sa pente, se comporte à la façon des rivières, le ressaut superficiel y est impossible et le régime se trouve sous l'influence de l'extrémité d'aval dont les conditions déterminent celles de l'écoulement.

Si, au contraire, la profondeur réelle h, en un point donné,

est inférieure à la profondeur critique H', l'écoulement est torrentueux; le régime est sous la dépendance de l'extrémité d'amont, quelle que soit la pente du cours d'eau.

Dans les canaux à faible pente, le régime uniforme se produit en amont des points où la profondeur réelle dépasse la profondeur critique; dans ceux à forte pente, le régime uniforme se produit en aval des points où la profondeur réelle est inférieure à la profondeur critique.

Dans tous, lorsque la profondeur est voisine de la profondeur critique, l'écoulement est irrégulier et il se produit ordinairement un ressaut superficiel.

On peut encore donner une autre forme à ce qui précède. Si l'on considère, dans un cours d'eau à faible pente, la partie où le régime est uniforme ou sensiblement uniforme, dans laquelle la courbe du remous est voisine de son asymptote et si l'on marche vers l'aval, le régime, s'il devient varié, ira en s'écartant graduellement du régime uniforme. Si au contraire on marche vers l'amont, le régime uniforme, s'il cesse d'exister, sera détruit brusquement ou trop rapidement pour que l'équation ordinaire puisse s'y appliquer.

Dans un cours d'eau à forte pente, les circonstances inverses se produisent: le régime uniforme succède asymptotiquement à la courbe de remous. Il ne s'établit donc que graduellement; mais en revanche il se détruit brusquement ou rapidement à l'aval des points où il existe et où des causes locales produisent soit une surélévation soit un abaissement du niveau; ces effets locaux ne se propagent pas vers l'amont où le régime continue à être uniforme jusque tout près de ces points exceptionnels.

§ 6

ÉTRANGLEMENT OU ÉLARGISSEMENT DU LIT

129. Effet d'un long étranglement. — Ce n'est pas à la résolution de ces problèmes généraux que l'on peut borner les indications de la théorie sur les conditions de l'écoulement dans les canaux découverts. D'autres problèmes, un peu plus particuliers ou spéciaux, peuvent aussi recevoir une solution approximative. Nous traiterons d'abord celui de l'effet produit sur un canal découvert par un rétrécissement de la section assez long pour que le mouvement y devienne uniforme.

Nous supposerons toujours, pour simplifier, une section transversale rectangulaire, ce qui constitue, quelle que soit l'inclinaison des rives, une approximation suffisante pour les cours d'eau très larges par rapport à leur profondeur.

Considérons donc un canal découvert de pente constante i, de largeur l et de profondeur H, dans lequel le régime uniforme est établi. En appelant toujours U la vitesse moyenne, nous aurons, entre ces quantités, la relation :

$$Hi = bU^2.$$

Supposons qu'à partir d'un certain point, et sans changer la pente du cours d'eau, on diminue sa largeur qui deviendra l', sur une longueur indéfinie vers l'aval.

A une certaine distance en aval du point où commence la largeur l', un nouveau régime uniforme s'établira, défini par l'équation :

$$H'i = bU'^2;$$

et comme le débit est resté le même, on aura aussi :

$$HlU = H'l'U'.$$

On en déduit, si l'on admet que b ait la même valeur dans les deux cas, ce qui n'est pas absolument exact puisque ce coefficient dépend de H :

$$\frac{H'}{H} = \frac{U'^2}{U^2} = \frac{H^2 l^2}{H'^2 l'^2} = \sqrt[3]{\frac{l^2}{l'^2}}.$$

Et, par suite, l'exhaussement du niveau $y = H' - H$ sera :

$$(33) \qquad y = H' - H = H\left[\sqrt[3]{\frac{l^2}{l'^2}} - 1\right].$$

Les deux niveaux, à des profondeurs H et H' dans la partie large et dans la partie étroite, se raccorderont par une courbe de remous formée d'une partie CC' asymptote à la ligne de profondeur H et située au-dessus de cette ligne (fig. 67), comme dans le premier cas considéré plus haut (n° 119).

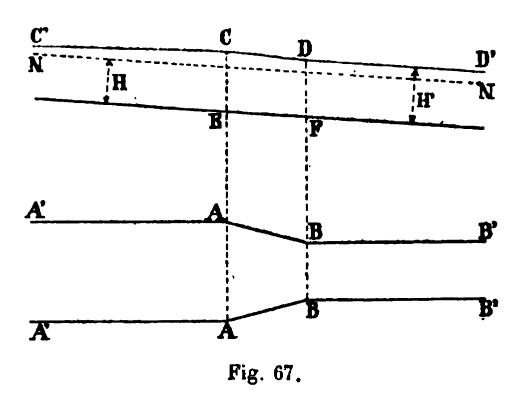


Fig. 67.

Pour raccorder cette ligne à la profondeur H' on doit remarquer que, entre les deux profils A et B, la vitesse passant de la valeur U à la valeur plus grande U', il faut qu'il existe une pente superficielle égale en totalité à $\frac{U'^2 - U^2}{2g}$. La profondeur DF du profil B étant égale à H', celle CE du profil A est égale à H' augmentée de cette quantité. Cela donne le point C par lequel devra passer la courbe de remous CC' que l'on tracera comme dans le cas d'un barrage transversal (n° 122).

La formule précédente montre que le remous produit par un long étranglement est proportionnel à la profondeur du cours d'eau [1]. On doit donc procéder avec d'autant plus de circonspection aux travaux d'endiguement qui rétrécissent le lit d'une rivière, qu'elle présente des crues plus élevées. Pour $l' = \frac{1}{2} l$, on aurait à peu près $y = 0{,}60H$; pour $l' = \frac{4}{5} l$ ce qui représente un empiètement d'un *cinquième*, on a $y = 0{,}164$ soit environ $\frac{1}{6}$ H : les crues seraient exhaussées de $\frac{1}{6}$ de leur hauteur.

Si les rétrécissements par endiguements continus peuvent être désastreux pendant les crues (lorsque H est grand), en relevant leur niveau, on voit, par contre, qu'ils n'ont d'influence appréciable sur les basses eaux (lorsque H est petit), que s'ils atteignent une proportion considérable. En resserrant une rivière qui n'aurait que $0^m{,}50$ de profondeur, au moyen de digues qui lui enlèveraient la moitié de sa largeur, on n'augmenterait la profondeur que des soixante centièmes de sa valeur primitive soit de $0{,}60 \times 0{,}50 = 0^m{,}30$; on n'obtiendrait donc qu'une profondeur totale de $0^m{,}80$; et encore il faudrait pour cela que l'endiguement eût lieu sur une grande longueur.

Ces résultats doivent, comme il a été dit, être considérés comme approximatifs.

180. Étranglement de longueur restreinte. — Lorsque l'étranglement n'est pas assez long pour que le mouvement uniforme puisse s'établir dans la portion rétrécie, la surélévation produite à l'amont est employée à accroître la vitesse de l'écoulement dans cette partie étranglée et le mouvement y reste varié. La forme de la surface libre y est alors celle du remous d'abaissement étudiée au n° 123. Cette surface libre s'abaisse au point D' (fig. 68) au-dessous de la profondeur H correspondant au régime uniforme ; dans la partie large et au

1. Dupuit.

point où l'étranglement cesse, elle remonte brusquement de D' en C' pour retrouver cette profondeur H qui se continue ensuite indéfiniment vers l'aval. Le relèvement, entre D' et C', est dû à la différence de charge correspondant à la différence des vitesses. Si l'on appelle H, l et U la profondeur, la largeur

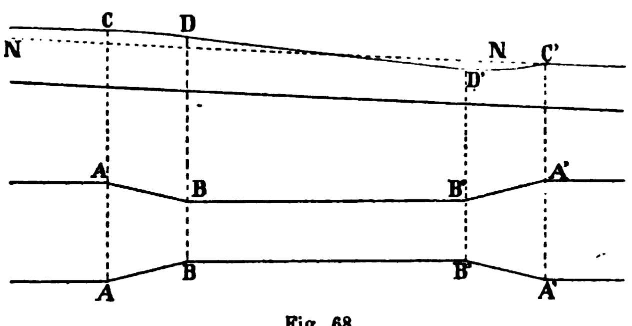


Fig. 68.

et la vitesse moyenne en A'C', et z la différence de profondeur en D' et en C', la profondeur en D' étant $H - z$ et la largeur l', la section sera $l'(H - z)$ et la vitesse $U' = U \frac{lH}{l'(H-z)}$. La différence de charge z, due à la diminution de vitesse, sera [1] :

$$(34) \qquad z = \alpha \frac{U'^2 - U^2}{2g} = \alpha \frac{U^2}{2g}\left(\frac{l^2 H^2}{l'^2 (H-z)^2} - 1\right),$$

ou, en développant après avoir multiplié par $(H - z)^2$:

$$H^2 z - 2Hz^2 + z^3 = \alpha \frac{U^2}{2g}\left(\frac{l^2 H^2}{l'^2} - H^2 + 2Hz - z^2\right),$$

équation du troisième degré en z qui aura toujours une racine positive et souvent trois racines positives réelles.

Deux de ces racines, au moins, correspondent à des états d'équilibre possibles pour la surface libre. M. Vauthier, in-

1. C'est l'application de la formule générale du mouvement permanent varié. On peut, en particulier, déduire cette équation de celle (16) établie au n° 115, page 233, en l'intégrant et en négligeant le dernier terme qui représente le frottement sur l'étendue comprise entre les deux profils considérés.

génieur des ponts et chaussées, a fait à Roanne une série d'expériences dans lesquelles il a réalisé ces deux positions d'équilibre, et il a constaté que la supérieure seule était stable [1].

La profondeur dans la section B′ étant calculée d'après la valeur de z, la surface libre affecte, à l'amont, de D′ en D, la forme de la courbe du remous d'abaissement étudiée au n°123. Si l'étranglement est assez long, cette courbe se rapproche de l'asymptote située à une profondeur H′ et correspondant au mouvement uniforme dans la partie rétrécie. C'est ce que nous avons admis tout à l'heure.

131. Effet d'un élargissement du lit. — Si, au lieu de présenter un rétrécissement, le lit présente un élargissement d'une grande longueur ou bien d'une longueur modérée, il se produira des phénomènes analogues susceptibles d'être calculés par les mêmes équations.

Lorsque l'élargissement pourra être considéré comme ayant une longueur indéfinie, de telle sorte que le régime uniforme y soit établi, il se produira, au passage de la partie plus étroite à la plus large, un abaissement du niveau qui sera mesuré par l'équation (33), dans laquelle on fera l' plus grand que l. Le niveau de l'eau, dans la partie élargie, se relèvera successivement en approchant de l'extrémité de l'étranglement, la surface libre aura la forme de la courbe du remous d'exhaussement et se raccordera, comme il est dit au n° 129, à la profondeur plus grande correspondant à la partie rétrécie qui y fait suite. Si l'élargissement est court, il pourra arriver que l'étendue du remous soit notablement plus longue que lui et que la surface libre se trouve encore relevée à l'origine de l'élargissement; il se produira alors, en ce point, un relèvement brusque analogue à celui qui vient d'être étudié et dont

1. *Indication sommaire des résultats d'expériences faites à Roanne pour l'étude de quelques conséquences du mouvement permanent.* — Annales des ponts et chaussées, 1848, 1er semestre, page 129.

le calcul donnera lieu à la résolution d'une équation du 3e degré. Dans ce dernier cas, d'un élargissement relativement court, le profil longitudinal des eaux présente la forme indiquée dans la figure 69.

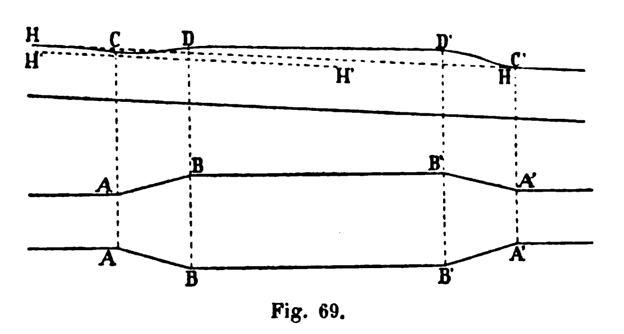


Fig. 69.

La ligne HH est celle du régime uniforme qui correspond à la section rétrécie et qui existe en aval de la section A′ et asymptotiquement en amont de la section A. De D′ en C′, il se produit une différence de niveau $\alpha \frac{U'^2 - U^2}{2g}$ et cette différence correspond à une profondeur plus grande en D′, puisqu'il y a accroissement de vitesse entre les deux sections. A partir de D′, en remontant, commence la courbe de remous d'exhaussement qui serait asymptote à la ligne H′H′ du régime uniforme dans la portion élargie si cette portion était assez longue. Mais si en D, à l'origine de l'élargissement, elle est encore au-dessus de la ligne HH ou du niveau dans la portion rétrécie d'amont, le niveau s'abaissera en C, de telle manière qu'entre C et D, se produise la différence de niveau z donnée par l'équation du 3e degré ; puis en amont du point C la surface libre aura la forme d'un remous d'abaissement et se raccordera asymptotiquement à la ligne HH du régime uniforme.

Ce dernier exemple met en évidence une conséquence intéressante au point de vue pratique : un élargissement de longueur modérée pratiqué sur un cours d'eau peut être accompagné d'une surélévation du niveau. Cela résulte en effet de la comparaison du niveau HCDD′C′H que prend la surface libre

dans le cours d'eau lorsqu'il existe un élargissement, avec le niveau rectiligne HH correspondant au régime uniforme qu'il prendrait si la section restait partout la même ou si le lit, au lieu d'être limité par les rives ABB'A', l'était simplement par les rives rectilignes AA'. Cette surélévation, dont le maximum au point D' est $\alpha \frac{U^2 - U'^2}{2g}$, peut être assez grande. Si, par exemple, comme l'indique Dupuit, l'on a $U = 5^m,00$, ce qui n'a rien de trop excessif en temps de crue pour certains cours d'eau, et si $U' = 2^m,50$, ce qui ne correspond qu'à un doublement de la section transversale, on a $\frac{U^2 - U'^2}{2g} = \frac{25.00 - 6.25}{2 \times 9,8} = 1$ mètre environ.

Des approfondissements ou des relèvements partiels du fond conduiraient à des résultats semblables que l'on calculerait de la manière suivante. A chaque changement de section, la formule $z = \frac{U^2 - U'^2}{2g}$ donne la différence de niveau. Si, ensuite, sur une certaine étendue en amont, le canal conserve sa section, la surface libre prend la forme d'une courbe de remous d'exhaussement ou d'abaissement suivant que le point de départ se trouve au-dessus ou au-dessous de la ligne du régime uniforme.

182. Effet d'un étranglement graduel, mais peu long. — Dupuit a calculé aussi l'effet produit sur un cours d'eau par un étranglement, dans lequel les sections transversales varieraient graduellement et diminueraient proportionnellement à leur distance à l'origine, puis augmenteraient ensuite suivant une loi analogue.

Désignons par ω_0, ω_1, ω_2, U_0, U_1, U_2 les sections transversales et les vitesses moyennes dans les trois sections A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 (fig. 70), situées respectivement en amont de l'étranglement, dans la partie la plus étranglée, et en aval de l'étranglement, où la section a repris sa dimension normale. Soient aussi L_1, L_2 les distances mutuelles de ces trois sections et L la

longueur totale de l'étranglement : $L = L_1 + L_2$. Si ω est l'aire d'une section transversale située à une distance s en aval de la section étranglée, nous supposons que $\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{L_2} s$, et celle d'une section située à une distance s en amont de la même section étranglée ω_1 serait $\omega = \omega_1 + \frac{\omega_0 - \omega_1}{L_1} s$. Le débit

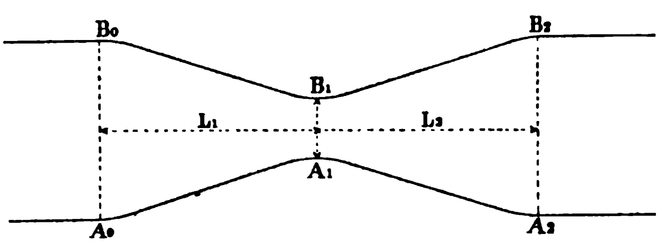


Fig. 70.

est constant et la vitesse moyenne U dans la section quelconque ω est liée aux autres quantités par la relation :

$$\omega U = \omega_0 U_0 = \omega_1 U_1 = \omega_2 U_2 \,.$$

Étudions d'abord ce qui se passe dans la partie aval de l'étranglement, entre les sections A_1B_1 et A_2B_2 et supposons que dans cette section A_2B_2 le régime soit uniforme ; nous pourrons d'abord écrire, en appelant i la pente constante du canal et R le rayon moyen de cette section :

$$Ri = bU_2^2.$$

Appliquons l'équation générale du mouvement varié sous la forme (17) ci-dessus, que nous écrirons :

$$dh = -\alpha \frac{UdU}{g} + \left(i - \frac{\chi}{\omega} b\, U^2\right) ds\,,$$

et intégrons-la entre les deux sections considérées ou sur la longueur L_2. Appelons y_2 la différence de niveau entre la surface libre dans l'une et l'autre de ces deux sections, ou bien faisons $y_2 = \int_0^{L_2} (-dh)$, nous obtiendrons :

$$y_2 = \alpha \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \int_0^{L_2} \left(\frac{\chi}{\omega} bU^2 - i\right) ds.$$

Le rapport $\frac{\chi}{\omega}$ sera, en général, comme ω elle-même, une fonction de s et l'on devra l'exprimer ainsi pour effectuer l'intégration. Pour simplifier, et dans l'impossibilité de laisser la question indéterminée, on doit faire uue hypothèse simple sur la loi de cette variation ; on peut supposer, ou bien χ constant, ou bien $\frac{\chi}{\omega}$ constant ; ces deux suppositions conduisent à des résultats différents. Prenons la seconde, $\frac{\chi}{\omega}$ constant, et égal, par conséquent, à l'inverse $\frac{1}{R}$ du rayon moyen de la section A_2B_2. Remplaçons $\frac{\chi}{\omega}$ par $\frac{1}{R}$, puis U^2 par $\frac{U_2^2 \omega_2^2}{\omega^2}$, et enfin $\frac{bU_2^2}{R}$ par i ; l'équation deviendra :

$$y_2 = \alpha \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \int_0^{L_2} i \left(\frac{\omega_2^2}{\omega^2} - 1\right) ds.$$

Mettons pour ω sa valeur en s et faisons l'intégration, nous obtiendrons, toutes réductions faites :

$$y_2 = \alpha \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + i L_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right).$$

Exprimons maintenant U_1 en fonction de U_2 et de $\frac{Ri}{b}$, ainsi que des sections ω_1, ω_2, il viendra définitivement :

$$y_2 = i \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right) \left[L_2 - \frac{\alpha}{2gb} R \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right].$$

Le coefficient $\frac{\alpha}{2gb}$ a les valeurs suivantes pour les diverses natures de parois :

Parois très unies . . .	$\frac{\alpha}{2gb} = 340$,
Parois unies	270,
Parois peu unies . . .	210,
Parois en terre	180.

Tant que L_2 est plus petit que $\frac{\alpha}{2gb} R \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, y_2 est négatif, il y a dépression dans la section rétrécie et cette dépression est d'autant plus considérable pour un étranglement donné $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ que le rayon moyen de la section transversale d'aval est plus grand et que la pente du cours d'eau est plus forte. Lorsque L_2 est précisément égal à cette quantité, il n'y a, dans la section rétrécie, ni dépression, ni exhaussement. Lorsque, au contraire, L_2 est plus grand, il y a exhaussement.

Appliquons la même équation et le même calcul à la portion de l'étranglement de longueur L_1, comprise entre les sections A_0B_0 et A_1B_1; nous obtiendrons, en appelant y_1 la différence de niveau dans ces sections et supposant toujours $\frac{\chi}{\omega} = \frac{1}{R}$:

$$y_1 = \alpha \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} + i L_1 \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_0 \omega_1} - 1\right);$$

par suite la différence de niveau totale due à l'étranglement et mesurée entre les deux sections extrêmes A_0B_0 et A_2B_2 sera, en la désignant par $y = y_2 + y_1$:

$$y = \alpha \frac{U_2^2 - U_0^2}{2g} + i \left[L_1 \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_0 \omega_1} - 1\right) + L_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)\right].$$

Le premier terme peut encore prendre la forme $\frac{\alpha}{2gb} Ri\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}\right)$ ce qui ne laisse subsister, dans l'expression de y, que les sections transversales ω_0, ω_1, ω_2. Comme approximation, il est souvent suffisant de supposer $\omega_0 = \omega_2$, le premier terme se trouve alors annulé, et dans la parenthèse on peut mettre en facteur $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)$. L'expression de y devient alors, en remarquant que L représente la longueur totale $L_1 + L_2$:

$$y = iL\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right).$$

Sous cette forme approximative simple, on voit que le gonflement total produit par un étranglement graduel est toujours positif et représente une surélévation à l'amont. La pente du lit sur la longueur L considérée étant iL, le premier terme $iL\frac{\omega_2}{\omega_1}$ représente la différence d'altitude de la surface libre dans les deux sections extrêmes.

Il n'est pas inutile de faire observer que le calcul de ω_2 suppose connue la dénivellation désignée plus haut par y_2 dans l'expression de laquelle figure aussi la quantité ω_2, que l'on devrait y exprimer en fonction de y_2; l'équation ne pourrait être résolue que par la méthode de fausse position.

133. Effet d'un étranglement brusque. — Passage de l'eau sous un pont. — Si l'effet d'un étranglement graduel peut à la rigueur se calculer au moins d'une façon ap-

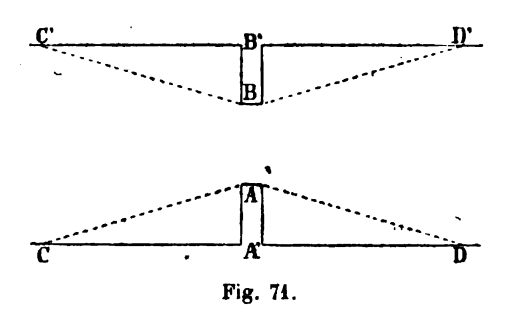


Fig. 71.

prochée, celui d'un étranglement brusque est beaucoup plus incertain ; la solution que l'on peut en donner n'est pas très satisfaisante. Peut-être pourrait-on se contenter d'admettre que, de part et d'autre de la section étranglée, la section vive dans laquelle se produit en réalité le courant, augmente progressivement, et assimiler l'étranglement brusque à un étranglement progressif en supposant que tout ce qui est hors de la section vive, rempli par du liquide à l'état de tourbillonnement, peut être assimilé à un solide. Même dans cette hypo-

thèse, il resterait une grande incertitude sur l'inclinaison, par rapport à la direction du courant, que l'on devrait admettre pour ces parties mortes de la section. D'après Bresse, on devrait prendre une inclinaison assez faible, 3 ou 4 degrés. Alors, en supposant que la section étranglée ω_1 ait sensiblement la même profondeur h que les sections d'amont et d'aval, et que, par suite, les largeurs superficielles soient proportionnelles aux aires de ces sections, chaque saillie, telle que AA' ou BB' (fig. 71), étant alors égale à $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2h}$, chacune des longueurs A'C, A'D serait à peu près de 20 fois la saillie et la longueur totale L de l'étranglement serait approximativement $\frac{20(\omega_2 - \omega_1)}{h}$. Le gonflement produit par un étranglement brusque serait ainsi exprimé par :

$$(35) \qquad y = 20i\,\frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{h\omega_1};$$

et il correspondrait, non pas seulement au passage rétréci, mais à la dénivellation produite entre les deux sections CC' et DD', prises assez loin en amont et en aval pour que les filets liquides y soient redevenus sensiblement parallèles.

Il faudrait de nombreuses observations pour justifier la forme de cette formule et le coefficient numérique 20 qui est pris à peu près au hasard.

On peut calculer le gonflement produit par un étranglement brusque au moyen de la formule (34) du n° 130 :

$$y = \alpha\,\frac{U'^2 - U^2}{2g},$$

en mettant pour U et U' les quotients du débit Q par les sections transversales. Si on appelle, comme plus haut, H la profondeur qui correspondrait au régime uniforme que l'on suppose exister à une certaine distance en aval de la section étranglée, et si l'on néglige le relèvement de la surface libre qui se produit nécessairement dans cette partie par suite de

la diminution de vitesse, H sera aussi la profondeur dans la section rétrécie. Si l' est sa largeur, l'aire de cette section sera l'H, mais on doit admettre qu'il se produit une contraction, de telle sorte que la section réelle, servant à l'écoulement, est égale au produit de l'H par un coefficient μ plus petit que l'unité. En amont de la section étranglée, la profondeur H est devenue $H+y$, et la largeur étant l, la section est $l(H+y)$. On a alors l'équation :

$$(36) \qquad y = \alpha \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{\mu^2 l'^2 H^2} - \frac{1}{l^2 (H+y)^2}\right],$$

qui est tout à fait analogue à celle (33) que nous avons trouvée plus haut. Elle est du 3[e] degré en y et pourra servir à déterminer cette inconnue si l'on est fixé sur la valeur à donner au coefficient de contraction μ. D'après Eytelwein, pour appliquer cette formule au passage de l'eau sous un pont, il faudrait prendre $\mu = 0{,}85$ quand les piles présentent carrément leur face antérieure au courant et $\mu = 0{,}95$ quand elles ont des avant-becs aigus. Mais il est vraisemblable, dit Bresse, que ce coefficient ne dépend pas uniquement de la forme des piles et qu'il varie avec le rapport $\frac{l'}{l}$, car si ce rapport atteignait l'unité, toute contraction disparaîtrait, de manière qu'on aurait alors $\mu = 1$.

Il ne faut pas croire que cette formule, malgré sa complication plus grande, procure une approximation supérieure à celle que l'on trouvera par la formule simple (35), et qui n'aurait besoin que d'avoir son coefficient numérique déterminé par quelques expériences pour donner des résultats à peu près suffisants. La dernière formule (36) néglige, en effet, comme on a dit, la contre-pente qui doit exister, dans tous les cas, en aval de la section rétrécie, bien que souvent l'agitation de l'eau et ses ondulations la rendent à peu près impossible à mesurer et même à constater. Il faut n'admettre les résultats du calcul qu'avec réserve et comme une première indication.

131. Affouillements qui en sont la conséquence. — La dénivellation dont on vient de donner le calcul approximatif n'est pas la seule conséquence du passage de l'eau dans une section rétrécie. Sous l'action de la vitesse plus grande qui s'y produit, les matières qui constituent le fond peuvent être entraînées et des affouillements peuvent compromettre la solidité des fondations de l'ouvrage qui rétrécit la section. C'est surtout autour des piles de pont que cet effet est à craindre.

Des expériences ont été faites sur ce sujet, sous la direction de Belgrand, par A. Durand-Claye. Voici comment il il en a résumé les résultats [1].

Les expériences ont porté sur trois formes de piles différentes (fig. 72): 1° piles à section horizontale entièrement rectangulaire ; 2° piles à section rectangulaire terminée par deux demi-circonférences ; 3° piles à section rectangulaire terminée par deux triangles.

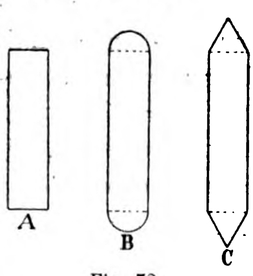


Fig. 72.

Dans les trois cas, les affouillements se sont manifestés à l'amont des piles et sur les côtés, les atterrissements à l'aval. La chute des ponts vers l'amont trouve ainsi une justification expérimentale ; il convient donc, comme l'avait déjà indiqué Minard dans un mémoire publié en 1856, de veiller spécialement à la solidité des fondations du côté de l'amont.

La forme rectangulaire est la moins convenable pour les piles ; elle donne un affouillement considérable à l'amont, des affouillements latéraux continus. La forme triangulaire, fendant le courant, annule à peu près l'affouillement d'amont suivant l'axe, mais le maintient, en l'exagérant, aux épaule-

1. *Hydraulique. Expériences sur les affouillements. Annales des ponts et chaussées*, 1873, 1er semestre, page 467.

ments d'amont où se manifeste ainsi l'inconvénient d'un changement brusque de direction dans la paroi solide de la pile. La pile ronde évite ce maximum par la continuité de sa forme et de son action, mais n'a pas l'avantage d'annuler l'effet d'affouillement sur l'axe ; elle produit à l'amont un affouillement sur tout son pourtour, mais moins large que ne l'est celui de la pile rectangulaire.

M. Durand-Claye pense qu'on réunirait à l'amont les avantages des deux formes triangulaire et ronde en adoptant pour la pile une section à double courbure (fig. 73) présentant la double propriété de faire diverger les molécules sur l'axe et de diriger progressivement le courant sous l'arche sans changement brusque de tracé. Il me semble qu'on arriverait plus simplement au même résultat en adoptant pour la pointe la forme d'un triangle rectiligne DCE. Les parties concaves du profil ne semblent d'aucune utilité, puisque le triangle rectiligne suffit à empêcher les affouillements à la pointe. Cette forme semble de nature à éviter tout affouillement exagéré à l'amont et par suite un développement excessif des radiers ou des massifs de fondation.

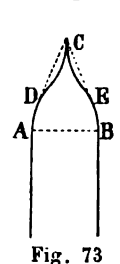
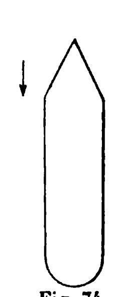


Fig. 73

A l'aval, la production constante des atterrissements ôte un intérêt bien majeur au choix d'une forme plutôt que d'une autre. La forme triangulaire présente un certain désavantage à cause de sa tendance à faire converger les courants latéraux vers l'axe avec production d'un sillon, lequel est avantageusement remplacé, dans le cas de la pile ronde, par un dos d'âne à pente douce. La combinaison d'un avant-bec triangulaire et d'un arrière bec rond, comme au pont Saint-Ange, à Rome (fig. 74), paraît une solution à la fois pratique et rationnelle.


Fig. 74

Elle le serait encore davantage, d'après ce qui vient d'être

dit, si le triangle d'amont était raccordé par un arc de cercle avec la partie rectangulaire, comme dans la figure 73.

Il serait à désirer que ces expériences fussent reprises et complétées, en les faisant porter sur des lits artificiels formés d'une épaisseur suffisante de matières meubles, épaisseur qui était un peu trop réduite dans les expériences de Durand-Claye.

CHAPITRE VI

COURS D'EAU NATURELS

§ 1. *Mobilité du lit.* — § 2. *Entraînement et suspension.* — § 3. *Influence de la forme des rives.* — § 4. *Ecoulement souterrain.* — § 5. *Jaugeages.*

§ 1

MOBILITÉ DU LIT.

185. Généralités. — Les considérations qui précèdent seraient applicables aux cours d'eau naturels présentant une section transversale régulière, une pente constante et un lit non affouillable et sensiblement rectiligne. Ces conditions sont, on le sait, très rarement réalisées, mais alors les résultats de l'étude qui vient d'être faite peuvent donner des indications utiles, souvent d'accord avec les faits, et d'autant plus exactes que les cours d'eau auxquels on les applique s'éloignent moins de cette régularité.

En particulier, ce que nous avons dit plus haut (nº 117) sur la distinction entre les cours d'eau à faible et à forte pente s'applique assez bien aux rivières et aux torrents naturels. Dans les rivières, un exhaussement ou un abaissement de la surface libre produit par une cause locale se propage indéfiniment, en s'atténuant, du côté de l'amont. Dans les torrents, au contraire, ces causes locales de la variation du niveau ne se font sentir qu'à

une très petite distance : les molécules fluides sont animées d'une force vive suffisante pour franchir ces obstacles sans modifier sensiblement leur mouvement ni la vitesse de celles qui les suivent, et les inégalités locales du fond se réflètent, pour ainsi dire, sur la surface libre, alors qu'elles disparaissent, dans les rivières, sous une masse épaisse animée d'une faible vitesse et dont la profondeur ne se règle que par les accidents généraux que le lit peut présenter.

Ainsi que nous l'avons constaté, un torrent peut, sur une petite étendue, se présenter à l'état d'un cours d'eau tranquille, et de même une rivière peut localement affecter l'état torrentueux. Cela arrive par exemple, pour un torrent, à l'amont d'un barrage, entre celui-ci et le ressaut qu'il produit, et pour une rivière à l'aval d'une vanne située à l'entrée d'un chenal.

136. Effets de la mobilité du lit. — Les cours d'eau naturels ont rarement un lit de forme invariable, et c'est là une des difficultés les plus grandes de leur étude. Ils se creusent un lit plus ou moins profond, dans la partie supérieure de leur cours, aux endroits où la pente est assez grande, suivant que le terrain qu'ils sillonnent est plus ou moins susceptible d'être délayé, entraîné ou emporté par les eaux. Le plus habituellement, au moins dans les grands cours d'eau, l'affouillement n'a lieu qu'autant que la vitesse des filets fluides contigus aux parois atteint une certaine valeur sensiblement constante pour une nature déterminée des matières qui composent ce fond, variable au contraire avec leur grosseur, leur densité, leur degré de tassement et leur mode d'insertion. Par conséquent, dans les régions sujettes aux affouillements, la vitesse au fond doit tendre, aux époques de crues où se produisent les grandes érosions, vers une limite sensiblement constante pour les cours d'eau qui coulent sur un sol mobile d'une nature déterminée. Il en est de même, par suite, de la vitesse moyenne U dans une section, et par suite aussi du produit Ri ou hi qui est sensiblement proportionnel au carré de U. Ainsi, le produit

de la pente du fond par la profondeur est, en moyenne, une quantité assez peu variable pour les cours d'eau dont le lit, constitué à peu près de la même manière, est parvenu à une stabilité relative après s'être suffisamment creusé ou comblé. Les torrents, caractérisés par de fortes pentes de fond, ne sont donc en général que de petits cours d'eau ou des cours d'eau moyens, et les rivières qui ont de faibles pentes peuvent être au contraire de grands cours d'eau.

Il arrive d'ailleurs presque toujours que la pente des cours d'eau diminue plus rapidement que la profondeur n'augmente, à mesure qu'on s'éloigne de leur source et que leur débit s'accroît de celui de leurs affluents, parce que les matériaux dont le lit est formé se composent de graviers de moins en moins gros (puisqu'ils ont pu être traînés plus loin), de sables et de limons de plus en plus fins pour lesquels la vitesse d'entraînement à laquelle est proportionnelle la vitesse moyenne U et le coefficient de résistance b sont de plus en plus faibles.

Tant qu'un cours d'eau n'est pas arrivé à sa pente d'équilibre, il opère toujours la réduction de sa trop grande pente en déployant la moindre action possible. Si le sol sur lequel il coule est moins résistant à sa partie supérieure qu'au fond, ce qui est fréquent, il arrive à la stabilité en allongeant son lit par des sinuosités, sans le creuser beaucoup ; dans le cas contraire, et en supposant que les berges ne s'écroulent pas sans cesse, c'est en creusant profondément son lit sans l'allonger.

Lorsqu'après ce travail le fond de la rivière est parvenu à acquérir la pente qui convient à sa stabilité, l'établissement du régime est encore bien souvent retardé par le défaut de résistance des rives. Le lit ne peut se fixer que lorsque sa forme, sensiblement prismatique, ne présente transversalement que d'assez faibles pentes, ou encore quand le cours d'eau est contenu entre deux berges fortement résistantes en tous les points où elles reçoivent le choc des courants.

Lorsqu'une rivière se jette contre une de ses rives, elle creuse au pied de cette rive un sillon qui se relève en contre-pente à mesure que le courant, s'écartant peu à peu de la digue qu'il vient de heurter, se dilate et se ralentit ; et le produit du creusement poussé en avant va se déposer sur le revers de la contre-pente et y former, en l'élevant couche par couche, une portion de cône du haut de laquelle la rivière se jette plus ou moins directement contre l'autre rive pour reproduire au-delà les mêmes phénomènes, et cela avec une variété infinie, suivant les accidents locaux, suivant la hauteur et le volume des eaux, etc. Il résulte de ces effets généralement observés qu'un cours d'eau est formé d'une suite alternative de parties où la pente du fond est moindre et où il se rencontre même fréquemment des contre-pentes et d'autres parties qui sont de véritables cônes de déjections plus ou moins tronqués où la pente est plus grande.

Cet état du cours d'eau s'établit, par exemple, sous l'action des eaux ordinaires. Si une crue survient, les conditions vont se trouver modifiées : quelques-unes de ces sinuosités du profil longitudinal disparaîtront ; certaines saillies seront écrêtées, quelques creux seront comblés ; les grandes eaux donneront à l'ensemble du lit un nouveau profil en rapport avec leur volume et avec leur vitesse, et ce profil sera, comme celui des eaux ordinaires, une succession de parties à faible pente ou à contre-pente précédant les cônes de déjections, et de parties plus déclives sur le talus même de ces cônes. Le profil ainsi formé à la suite d'une crue se trouvera lui-même modifié par l'action subséquente d'eaux moins abondantes qui vont, sur les cônes de déjections où la pente est forte, se creuser des lits peu profonds en entraînant des matériaux avec lesquels elles viendront combler en partie les creux précédant les contrepentes.

Dans cet état constamment variable de la forme du fond, on peut observer deux particularités distinctes. Ou bien, après

chaque crue ordinaire, le fond reprend à peu près la même forme qu'après la crue précédente ; les hauts fonds, sommets de cônes de déjection, se retrouvent à peu près aux mêmes emplacements, bien qu'ils ne soient pas formés des mêmes matériaux, ceux-ci ayant été plus ou moins charriés vers l'aval, mais remplacés par d'autres; ou bien encore la position des hauts fonds s'est déplacée elle-même de l'amont vers l'aval. Dans le premier cas, le cours d'eau est arrivé à une forme d'équilibre stable : on en a de nombreux exemples, et l'on peut dire que la plupart des cours d'eau rendent ainsi à leur lit, après chaque crue, la forme qu'il avait à la fin de la crue précédente et qui avait été modifiée pendant les eaux ordinaires, soit par l'action même de ces eaux, soit par la main de l'homme ; les bancs de gravier que l'on a dragués en basses eaux se retrouvent aux mêmes emplacements après les crues. Dans le second cas, l'équilibre est encore établi, mais dans des conditions un peu différentes : c'est un équilibre mobile dont les conditions se modifient un peu à chaque crue. Ainsi Baumgarten a observé plusieurs années de suite, sur la Garonne, un petit banc de gravier qui avançait pendant les crues de 20 à 30 mètres par an. M. Partiot et M. Sainjon ont observé sur la Loire un grand nombre de bancs de sable, appelés *grèves*, qui se trouvent entraînés insensiblement dès que la vitesse à la surface du courant dépasse environ 0 m. 30 à 0 m. 35. Ce n'est plus même ici une crue proprement dite qui est nécessaire pour déplacer ces bancs, qui avancent de quantités comparables à deux kilomètres par année.

187. Cours d'eau à l'état d'équilibre stable. — Mais considérons simplement le cas de l'équilibre stable. Le fond du lit ayant pris, en chaque point, la forme qui convient à cet équilibre, il faut que la résistance qu'opposent, à l'érosion, les matériaux qui le constituent soit égale en tous les points à la puissance érosive. Cette puissance est, probablement, proportionnelle au carré de la vitesse au fond. D'autre part, pour des

matériaux de même nature, l'érosion sera d'autant plus facile, toutes choses égales, qu'ils se trouveront sur une pente plus forte, parce qu'à la force qui tend à les entraîner s'ajoute la composante de leur poids suivant l'inclinaison du talus où ils sont placés et qui est proportionnelle à la pente i du fond en cet endroit. La force totale qui tend à faire avancer vers l'aval les matériaux du fond est donc proportionnelle, si w est la vitesse de l'eau au fond, à (mw^2+i) en appelant m un coefficient numérique dépendant de la grandeur et de la densité de ces matériaux. Si, par hypothèse, le fond s'est établi dans une position d'équilibre, c'est qu'en chaque point cette force (mw^2+i) est devenue égale à la résistance qu'opposent ces mêmes matériaux à leur déplacement et qui dépend, non seulement de leurs dimensions, mais de la manière dont ils sont rangés les uns par rapport aux autres. On peut donc admettre que pour chaque nature de matériaux constituant le fond du lit d'un cours d'eau en état d'équilibre, la quantité (mw^2+i) sera égale à une constante. Cette égalité est absolue pour tous les points où le fond a été modifié par la vitesse w. Partout ailleurs, c'est une inégalité qu'il faut écrire en considérant que la quantité mw^2+i est restée inférieure à la force qui aurait été nécessaire pour produire cette modification.

188. Effet d'un endiguement. — Le long d'une rivière ainsi arrivée à l'état d'équilibre, on construit, sur une certaine longueur, des digues parallèles très résistantes qui diminuent la section libre en la resserrant. La vitesse va croître à proportion du resserrement, la force érosive augmentera aussi, et si avant le resserrement elle était égale à la résistance du fond, elle la dépassera après. Les eaux creuseront donc le lit vers l'amont de l'endiguement et déposeront vers l'aval les matériaux entraînés, jusqu'à ce que l'inclinaison du fond soit assez amoindrie pour que l'équilibre se rétablisse. En d'autres termes, w^2 ayant été augmenté, i doit diminuer pour que la somme mw^2+i reste constante. L'*endiguement continu d'une*

rivière réduit sa pente et il a pour conséquence un abaissement plus ou moins considérable du plan d'eau en amont de la partie endiguée. On peut ainsi arriver à abaisser l'altitude des crues d'un cours d'eau en un point donné de son cours ; mais il faut, pour cela, prolonger le resserrement assez loin en aval et fonder les digues, vers l'amont, de manière qu'elles soient susceptibles de se maintenir malgré les affouillements.

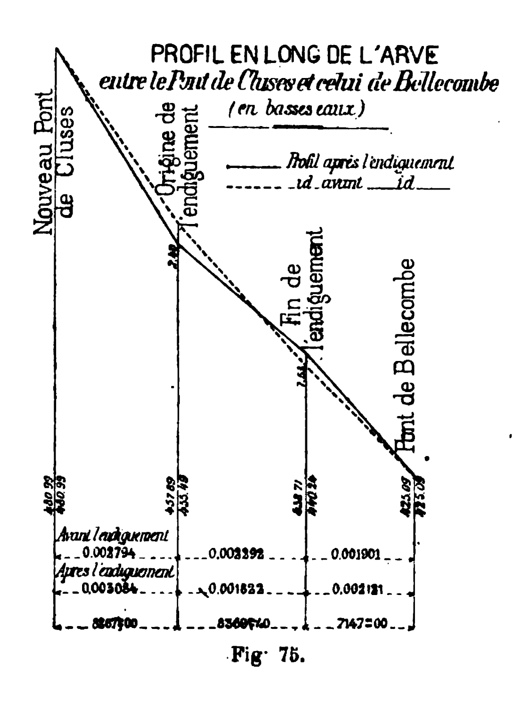


Fig. 75.

Comme exemple des effets de l'endiguement, je reproduirai ici, en abrégé (fig. 75), le profil en long de la rivière d'Arve, donné avec détails par Dausse dans ses *Études d'hydraulique pratique* à l'appui de la loi qui vient d'être énoncée et qu'il s'est attaché à mettre en lumière. On y voit que l'Arve, avant d'être endiguée, avait de l'amont vers l'aval des pentes moyennes décroissantes : 0,0028 ; 0,0023 ; 0,0019 ; et qu'après l'endiguement la pente, en amont de la partie endiguée, est devenue

0,0031, au lieu de 0,0028, et en aval, de 0,0021 au lieu de 0,0019, mais que, dans l'étendue de l'endiguement, elle a été réduite de 0,0023 à 0,0018 par suite d'un abaissement de 2 m. 40 en amont de la partie endiguée, accompagné d'un relèvement de 1 m. 53 à l'aval.

Cette loi générale, exprimée par $mw^2+i=$ constante, trouve encore sa confirmation expérimentale aux embouchures des grands fleuves qui, comme le Rhône ou le Pô, aboutissent à une mer dont le niveau est à peu près fixe. Dans les crues, le fleuve, s'élevant dans son lit, tandis que la mer ne s'élève pas sensiblement, prend, vers son embouchure, une pente superficielle et une vitesse considérables ; mw^2 dépasse alors la constante et i doit être négatif : le fond se dispose en conte-pente, car les mêmes matériaux dont le lit est formé ne sauraient, autrement, opposer au courant une résistance qui lui fasse équilibre.

Elle a été confirmée par l'observation, et je n'en citerai qu'une vérification, la plus récente qui ait été faite à ma connaissance ; elle se trouve dans une étude de M. Fargue, sur la Garonne[1], dont j'extrais les passages suivants :

« Le lit de la Garonne fluviale, entre la limite du département et Langoiran (49 kilomètres), est aujourd'hui limité partout par des rives artificielles auxquelles on a généralement donné un écartement à peu près uniforme, moindre que la largeur naturelle... Le premier effet des travaux de resserrement du lit a toujours été de relever brusquement le niveau de l'étiage. Cela tient à ce que les changements que les nouvelles formes de rives apportent dans la forme des profils en travers ne se produisent pas tant que les eaux restent basses ; il faut un débordement pour les déterminer. Aux premières hautes eaux, il s'opère dans les grèves et dans les bancs des remaniements qui se traduisent par un

1. *Étude sur la largeur du lit moyen de la Garonne. Annales des ponts et chaussées*, 1882, 2e semestre, page 303.

« premier abaissement de l'étiage. Ce travail se continuant à « chaque crue suivante, avec une intensité décroissante, et « jusqu'à ce qu'un nouvel équilibre se soit établi, l'étiage « continue lui-même à s'abaisser pendant un certain nombre « d'années, et s'arrête à un niveau déterminé, inférieur à son « niveau primitif..... Entre la limite du département et Por- « tets, l'étiage s'est abaissé, en moins de quarante ans, de « $1^m,30$ en moyenne. A Baric et à Caudrot, les eaux d'étiage « ont été, en 1870, à $1^m,85$ en contrebas du niveau auquel elles « coulaient en 1832. »

Cet abaissement de l'étiage est dû évidemment à un abaissement du fond du lit, occasionné par une réduction de la pente. En aval de la partie endiguée, jusqu'à Bordeaux, le fond s'est exhaussé. Il s'est donc passé quelque chose de comparable à ce que M. Dausse a constaté sur l'Arve et que représente la figure 75 ci-dessus.

La loi dont il s'agit n'avait pas échappé à l'esprit sagace des ingénieurs italiens, et déjà, en 1697, Guglielmini (cité par Dausse) avait, dans son grand traité *Della natura dè fiumi,* énoncé et développé les propositions suivantes :

« *Nè fiumi*, *quanto maggiore sarà la forza dell' acqua*, *tanto* « *le declività degli alvei saranno minori ;*

« *Quanto maggiore sarà la tenacita del terreno che compone* « *il fondo del fiume*, *tanto esso sarà più declive* ;

« *E quanto maggiore sarà l'acqua ordinaria del fiume*, *sarà* « *ancora tanto meno declive l'alveo.* »

Elle paraît pourtant avoir été méconnue depuis, car Dausse, dans ses *Études d'hydraulique pratique*, produit, pour l'établir, des arguments et des exemples si nombreux et si variés, qu'il semble aller au devant des objections, ce qu'il n'aurait certainement pas fait si elle avait été généralement admise.

On peut s'expliquer, dans une certaine mesure, les motifs qui auraient pu la faire oublier.

139. Comparaison avec l'effet d'un resserrement dans un canal à fond fixe. — Si l'on rapproche le résultat qui vient d'être trouvé, comme conséquence nécessaire de tout travail de resserrement du lit d'un cours d'eau à fond mobile, de celui que nous avons calculé plus haut (nº 129), comme conséquence d'un resserrement d'un canal découvert supposé de forme invariable, on reconnaît qu'ils sont opposés. Dans le cas d'un canal découvert à fond fixe, un étranglement continu sur une certaine longueur produit un relèvement du niveau en amont, une augmentation de la pente superficielle dans l'étendue de la partie rétrécie et un abaissement du niveau vers l'aval. Au contraire, dans une rivière à fond mobile, un endiguement continu diminuant la largeur de la section produit vers l'amont un abaissement du fond du lit qui a pour conséquence un abaissement un peu moindre de la surface libre. Vers l'aval, on constate un exhaussement du fond et de la surface libre et une diminution de la pente du fond dans la partie endiguée. Cette comparaison suffit à montrer avec quelle réserve il faut appliquer, aux cours d'eau naturels, les formules qui ont été trouvées dans le chapitre précédent pour les canaux découverts. La mobilité du fond, les variations de forme qu'il éprouve peuvent renverser complètement les résultats, et en tout cas les fausser au point de leur ôter toute probabilité.

§ 2.

ENTRAINEMENT ET SUSPENSION

140. Entraînement des matériaux du lit. — S'il n'est pas possible d'analyser exactement les efforts qui produisent l'entraînement des matériaux du fond, on peut cependant se rendre un compte sommaire des causes de leur mouvement,

ce qui nous amènera à parler du cas de l'équilibre mobile du lit ou de la marche des alluvions.

Tout le monde sait que les fluides en mouvement peuvent tenir en suspension et entraîner des matières solides beaucoup plus denses qu'eux-mêmes. Ces deux effets, peu différents, sont dus à la même cause, la vitesse relative du fluide et du solide. Nous consacrerons plus loin un dernier chapitre (chap. X) à l'étude de l'action mutuelle des liquides et des solides en mouvement relatif dans les cas les plus simples, les seuls où l'analyse puisse donner quelques résultats. Nous pouvons admettre ici, comme étant à peu près démontré, que cette action est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse relative. Cela étant, un corps solide en repos, frappé par un fluide en mouvement, sera poussé, dans le sens du mouvement, par un effort qui pourra être supérieur aux résistances qui s'opposent à son déplacement, et alors il sera entraîné. Par exemple, un corps sphérique A (fig. 76) appuyé en B, au-dessous de son centre, sur un autre corps en saillie, étant soumis, de l'autre côté, à l'action d'un fluide en mouvement dont la résultante F passera par son centre, sera soulevé et entraîné si le moment de la force F par rapport au point B est supérieur au moment, par rapport au même point, du poids du corps évalué dans le fluide, c'est-à-dire diminué de celui du fluide déplacé.

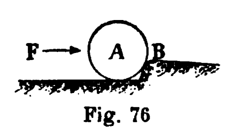


Fig. 76

Mais l'entraînement n'est pas le seul phénomène que l'on observe, le corps solide peut être soulevé comme s'il devenait plus léger que le fluide et y être tenu en *suspension* à une certaine hauteur. Cela ne peut se produire (abstraction faite du cas où la vitesse du fluide aurait une composante verticale dirigée de bas en haut) que si les divers filets fluides qui rencontrent le même solide sont animés de vitesses différentes et croissant de bas en haut. Dans cette hypothèse, on arrive à se rendre un compte suffisamment approché du phénomène de suspension.

D'abord, en ce qui concerne l'entraînement, il suffit, pour qu'il se produise, que l'effort dû à la vitesse moyenne du fluide soit comparable au poids du corps. Soit un corps sphérique de diamètre D et de poids spécifique Π_1. La section transversale qu'il oppose au fluide est $\pi \frac{D^2}{4}$ et l'effort correspondant à une vitesse moyenne U est, comme nous le verrons plus loin, $k \frac{\Pi}{g} \pi \frac{D^2}{4} \frac{U^2}{2}$, le coefficient numérique k ayant à peu près, pour les corps sphériques, la valeur 0,53, et Π représentant le poids spécifique du fluide. D'autre part, le poids du solide considéré, plongé dans le fluide, est réduit à $\frac{1}{6} \pi D^3 (\Pi_1 - \Pi)$, et, pour que le corps puisse commencer à être entraîné, il suffira que le rapport de ces deux forces soit égal ou supérieur à celui de leurs bras de levier par rapport aux points d'appui, tels que B, autour desquels il peut pivoter.

Appelons θ ce rapport des bras de levier qui dépendra de l'état d'enchevêtrement des matériaux, l'équation exprimant l'égalité dont il s'agit et déterminant la vitesse à laquelle commence l'entraînement, sera :

$$k \frac{\Pi}{g} \pi \frac{D^2}{4} \frac{U^2}{2} = \frac{1}{6} \pi D^3 (\Pi_1 - \Pi)\, \theta.$$

Si le corps n'est pas sphérique, l'équation sera la même, à la condition d'y mettre, au lieu de $\pi \frac{D^2}{4}$, la superficie A de la section transversale exposée au courant, et au lieu de $\frac{1}{6} \pi D^3$, le volume V du corps, et de donner une valeur différente aux coefficients k et θ ; elle devient ainsi :

$$k \frac{\Pi}{g} A \frac{U^2}{2} = V (\Pi_1 - \Pi)\, \theta\ ,$$

ce qui donne, pour le corps sphérique :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{2\theta}{3k} \cdot D \left(\frac{\Pi_1}{\Pi} - 1\right),$$

et pour un corps de forme quelconque :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{\theta}{k} \cdot \frac{V}{A} \left(\frac{\Pi_1}{\Pi} - 1 \right).$$

Le rapport $\frac{V}{A}$ du volume du corps à la surface de sa section transversale est très variable suivant la forme des matériaux. Égal aux deux tiers du diamètre lorsqu'ils sont sphériques, il est plus grand que le diamètre pour des formes très anguleuses ; on peut le prendre, en moyenne, égal au diamètre pour les formes ordinaires des pierres cassées, non arrondies. Quant au rapport $\frac{\theta}{k}$, il ne peut évidemment être donné que par l'observation. Le coefficient k, qui vaut un peu plus de 0,50 lorsque la surface du corps est sphérique, croît et s'approche de l'unité à mesure que l'irrégularité de la surface augmente ; le nombre θ, rapport du bras de levier de la force d'entraînement à celui du poids, doit être généralement inférieur à l'unité ; il est d'autant moindre que les matériaux sont plus complètement enchevêtrés les uns dans les autres, et il dépend probablement aussi de la grosseur des matériaux. M. Sainjon (cité par M. Partiot)[1], par la discussion de quelques faits d'observation, a cru pouvoir adopter, en moyenne, $k = 1$ et $\theta = 0,80$. Avec ces chiffres, la formule précédente qui, pour le rapport $\frac{\Pi_1}{\Pi} = 2,50$ correspondant à des matériaux pesant 2,500 kilog. par mètre cube, revient à peu près à $U^2 = 25D$, lui a donné les valeurs suivantes des vitesses capables d'entraîner les graviers suivant leurs grosseurs :

Grosseur des graviers	0,0025	0,01	0,04	0,10	0,17	0,38	0,67
Vitesses au fond	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00

Ces résultats sont d'accord avec l'observation. Les seules expériences que l'on ait à ce sujet sont celles de Du Buat et

1. *Mémoires sur les sables de la Loire*, par M. Partiot. *Annales des ponts et chaussées*, 1871, 1er semestre, pages 259 et suivantes.

de Telford. Du Buat a déterminé les vitesses-limites au-dessous desquelles les matières plongées cessent d'être entraînées et il a constaté les vitesses suivantes :

Indication des matières		Vitesses
Argile brune propre à la poterie		0m,081
Sable déposé par cette argile		0 ,162
Gros sable jaune anguleux		0 ,216
Graviers de la Seine	Gros comme un grain d'anis	0 ,108
	— un pois	0 ,189
	— une petite fève de marais	0 ,325
Galets de mer arrondis, d'un pouce au plus.		0 ,650
Pierre à fusil anguleuse, du volume d'un œuf de poule		0 ,975

Telford a observé au contraire les vitesses nécessaires pour corroder le fond d'un cours d'eau, et les résultats sont les suivants :

Nature du lit	Vitesses au fond
Terre détrempée	0m,076
Argile tendre	0 ,152
Sable	0 ,305
Gravier	0 ,609
Cailloux	0 ,914
Pierres cassées	1 ,220
Cailloux agglomérés, schiste tendre	1 ,520
Rocher en couches	1 ,830
Rocher dur	3 ,050

La grosseur des matériaux ni leur forme ne sont aussi bien définies dans ces dernières expériences que dans celles de Du Buat ; et bien qu'il y ait, entre les chiffres des deux tableaux, une assez grande analogie, on peut remarquer que ceux qui sont donnés par Telford paraissent un peu plus élevés que ceux de Du Buat : par exemple, argile, 0m,152 au lieu de

0,081 ; sable, 0,305 au lieu de 0,162 ou de 0,216 ; gravier, 0,609 au lieu de 0,325 au plus ; cette différence tient sans doute à ce que le fait observé n'a pas été le même, Du Buat a mesuré les vitesses au-dessous desquelles des matières, mises en suspension dans l'eau, cessent d'être entraînées, et il devait trouver, toutes choses égales, des chiffres inférieurs à ceux de Telford qui observait les vitesses capables d'affouiller un fond de nature donnée. Les matériaux observés par Du Buat n'étaient pas appuyés les uns sur les autres, ou bien ne l'étaient que dans des conditions moins complètes que s'ils avaient préalablement formé le lit d'un cours d'eau, ayant subi l'action de vitesses inférieures à celles d'entraînement mais capables néanmoins d'enchevêtrer les sables et les graviers.

L'état d'enchevêtrement des matériaux doit en effet avoir une grande influence sur la vitesse à laquelle ils peuvent résister avant d'être entraînés. Si l'on fait passer un courant d'eau, même assez rapide, sur du sable sec, le premier effet de l'arrivée de l'eau est de tasser le sable, d'en presser les grains les uns contre les autres et de lui donner une résistance bien supérieure à celle qu'il possédait auparavant. Ce fait est bien connu de tous ceux qui ont fréquenté des plages de sable. Quelque chose d'analogue se passe pour les graviers, galets et matériaux d'une grosseur quelconque, seulement l'effet est beaucoup plus lent. Un tas de graviers ou de galets fraîchement remués sera entraîné d'abord par un courant d'une vitesse donnée ; peu à peu, les matériaux qui le composent se tasseront, s'insèreront les uns entre les autres et constitueront un fond notablement plus résistant qui ne pourra être attaqué que par un courant beaucoup plus rapide.

Dans des expériences faites dans l'isthme de Panama, du 4 au 12 juillet 1890, il a été constaté que dans une conduite demi-circulaire de $0^{m}50$ de diamètre, en pente de 0,17, un courant d'eau de 0,23 de profondeur au milieu ayant une vitesse moyenne de $2^{m}40$ environ par seconde, ou un débit de 210

litres, entraînait, avec une vitesse supérieure à deux mètres, une pierre de 0,20 × 0,10 × 0,10. Mais lorsqu'on mettait dans ce même courant un certain nombre de pierres de dimensions inférieures à celles de la précédente, et même de la pierre cassée, ces pierres se coinçaient et n'étaient pas entraînées[1].

Tous ces phénomènes sont encore peu connus dans leurs détails, et les effets sont très différents, d'une rivière à une autre, suivant la forme et la densité des matériaux. Mais l'entraînement du fond se produit toujours à partir d'une certaine vitesse et c'est dans cet effet et dans la modification correspondante de la pente du lit qu'il faut chercher l'explication de ce fait que, nulle part, la vitesse des grands cours d'eau ne dépasse guère cinq à six mètres par seconde. Aucun fond ne résiste à des vitesses supérieures et s'il s'en produit exceptionnellement quelque part, par suite d'un accident, rupture de digue ou autre, cette grande vitesse a pour conséquence presque immédiate une diminution de la pente du cours d'eau, ce qui modère la vitesse.

141. Matières tenues en suspension. — Lorsque les matériaux entraînés par un courant sont assez légers et d'un volume assez petit, ils prennent la vitesse du courant et se mettent en suspension. Le phénomène de la suspension, qui est souvent la conséquence de l'entraînement, en diffère en ce que celui-ci est produit par le choc du courant contre des solides qui vont moins vite que lui, tandis que les matières en suspension ont à très peu près la même vitesse que le liquide lui-même. Elles sont, dans une certaine mesure, assimilables aux corps flottants à la surface qui participent à la vitesse du courant, qui sont, en fait, entraînés par lui, mais dans des conditions différentes de ceux qui roulent sur le fond, pour lesquels le courant doit vaincre avant de les mettre en mouvement une résistance extérieure spéciale qui n'existe pas dans les corps flottants.

1. Rapport de mission en Colombie, par M. Lucien N. B. Wyse, 1891.

142. Vitesse d'un flotteur sur un courant. — Beaucoup d'ingénieurs, en particulier Du Buat et Dupuit, ont remarqué qu'un corps flottant à la surface d'un courant prenait une vitesse plus grande que celle du liquide ; l'explication qu'ils ont donnée de ce fait peut se résumer dans les termes suivants employés par Dupuit :

« Considérons un corps flottant sur la surface d'un cours « d'eau... Il est clair qu'en vertu de la composante Pi suivant « l'inclinaison du courant, ce solide tend à prendre une vi- « tesse accélérée mais qui devient uniforme par suite de la « résistance que lui oppose le liquide. Cette vitesse sera plus « grande que la vitesse moyenne des filets qui entourent le « flotteur, car il faudra que le flotteur trouve en avant une « résistance capable de faire équilibre à la pression des filets « qui vont plus vite que lui et à la quantité Pi. »

Sous cette forme, l'explication est insuffisante, car si le poids P du corps flottant est le même que celui du liquide dont il tient la place, la pesanteur ne lui imprime pas une accélération plus grande. Aussi le fait a-t-il été nié par un certain nombre d'ingénieurs qui le considèrent comme une illusion. M. Bérard a même rendu compte [1], d'expériences dans lesquelles il a constaté qu'un flotteur marche avec une vitesse égale à la vitesse moyenne des filets fluides qu'il rencontre et que s'il paraît marcher plus vite que le courant, cela tient à ce que la vitesse maximum se trouve un peu au-dessous de la surface.

M. du Boys avait cependant, un peu auparavant [2], rectifié et complété dans une certaine mesure l'explication du phénomène. Si l'on considère le volume liquide dont le corps flottant tient la place, il est bien, comme ce dernier, soumis à la force accélératrice de la pesanteur due à son poids P qui est le même que celui du liquide, mais la résistance est différente. Alors que pour le solide elle est constituée simplement par le

1. *Annales des ponts et chaussées*, 1886, 2e semestre, page 830.
2. *Annales des ponts et chaussées*, 1886, 1er semestre, page 199.

frottement des parois de celui-ci sur le liquide qui l'entoure, elle comprend en outre, pour le liquide, l'agitation intérieure qui dépense une partie de l'énergie transmise par la force motrice. Il y aurait identité entre le solide flottant et le liquide déplacé si l'écoulement s'effectuait exactement par filets parallèles et s'il n'existait aucune composante verticale ou transversale de la vitesse des molécules liquides ; mais il est loin d'en être ainsi. Dans le volume liquide qui tiendrait la place du corps flottant, ces vitesses transversales ou verticales correspondent à une certaine force vive qui ne contribue pas à l'écoulement, elles donnent lieu à des frottements ou à une perte d'énergie plus grande que si les filets étaient rigoureusement parallèles. C'est la somme de toutes ces forces vives, de tous ces frottements, perdus pour l'écoulement, qui égale la force accélératrice de la pesanteur. Tout cela est remplacé, dans le cas du corps flottant, par le frottement superficiel et par une résistance supplémentaire due à ce que ce corps prend une vitesse plus grande et qu'il presse davantage sur le liquide qui se trouve devant lui. Il convient d'ajouter, ce me semble, qu'il n'est nullement démontré que le volume déplacé par un corps flottant à la surface d'un liquide en mouvement soit le même que celui qui est déplacé dans le même liquide en repos.

Bien que je ne connaisse aucune expérience sur ce sujet, il me paraît y avoir de fortes raisons de penser que le corps flottant plonge moins dans le liquide en mouvement, et d'autant moins que l'agitation est plus grande. Alors, la force qui lui donnerait une vitesse égale à celle du liquide est la composante d'un poids de liquide inférieur au sien. Il reste donc disponible une portion de son poids qui lui procure une accélération nouvelle, et une vitesse plus grande que celle du liquide. De l'explication qui précède résulte que la différence de vitesse, entre un corps flottant et le courant liquide, croît avec les dimensions du corps flottant et avec l'agitation du liquide. Il n'est donc pas surprenant que M. Bérard, opérant sur un courant très régulier, à vitesse relativement faible et avec un

flotteur de petite dimension, ait trouvé une concordance à peu près complète entre les deux vitesses ; mais il n'en aurait pas été de même si le fond du canal sur lequel il opérait avait été irrégulier et surtout si le flotteur avait eu des dimensions plus grandes.

M. du Boys a constaté qu'un bateau (dont il ne donne pas les dimensions) avait pris une vitesse moyenne de $4^{m}46$ dans un courant dont la vitesse superficielle n'était que de $2^{m}75$. Même en faisant une large part aux erreurs d'observations, on voit que la différence est loin d'être négligeable.

143. Effet de la différence de vitesse des filets liquides. — Une des premières conséquences de la différence de vitesse des divers filets liquides, c'est que si un corps flottant est placé à la surface d'un courant, il tendra toujours à venir se placer sur l'axe, ou sur la ligne où les vitesses superficielles sont les plus grandes. Si, en effet, on le suppose dans une position excentrique, il rencontrera une moindre résistance en se dirigeant obliquement vers les filets les plus rapides qu'en continuant à se mouvoir au milieu de ceux qui ont une vitesse moyenne inférieure à la sienne.

Ce fait de l'entraînement d'un corps flottant vers les filets qui ont la plus grande vitesse s'observe partout, et l'on peut l'expliquer en supposant, par exemple, le corps sphérique et placé dans un courant dont les filets AA, BB, CC ont des vitesses croissantes (fig. 77). Les filets les plus rapides CC exerceront sur le solide, du côté C, un frottement qui tendra à le faire tourner dans le sens de la flèche. De l'autre côté AA, les filets liquides, allant moins vite que le solide,

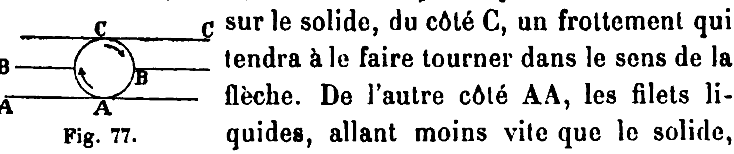


Fig. 77.

exerceront un frottement en sens inverse qui tendra à produire une rotation dans le même sens, et le solide étant, par rapport au liquide, en repos relatif au point B, ou plutôt étant pressé sur ce point par l'excès de vitesse qu'il tend à prendre, ne peut subir ce mouvement de rotation sans pivoter autour du

point B et rouler en se dirigeant du côté des vitesses les plus grandes.

On doit donc regarder comme démontré qu'un corps solide, lorsqu'il se trouve dans un fluide dont les filets ont des vitesses différentes, se trouve, par suite même de la différence de ces vitesses, entraîné du côté des filets les plus rapides. La vitesse, dans l'étendue d'une même section transversale d'un cours d'eau, ou sur une même verticale, allant en croissant à mesure que l'on s'élève, les corps solides arrachés du fond et d'abord entraînés par le courant peuvent s'élever, s'ils sont assez menus et assez légers, et être maintenus en suspension.

Il est d'ailleurs à remarquer que l'effort à exercer, pour maintenir un solide en suspension, se réduit à assez peu de chose lorsque ses dimensions sont faibles et que son poids spécifique ne dépasse pas beaucoup celui du liquide. Si l'on considère, comme plus haut, un corps sphérique de diamètre D et de poids spécifique Π_1, la force accélératrice qui tendra à le faire descendre dans un liquide sera, en appelant v sa vitesse verticale à un instant quelconque:

$$\frac{1}{6}\pi D^3 (\Pi_1 - \Pi) - k\frac{\Pi}{g}.\pi\frac{D^2}{4}.\frac{v^2}{2};$$

et si l'on met pour k la valeur 0,53, applicable aux corps sphériques, cette force accélératrice est nulle lorsque, Π_1 étant égal à 2700 kil. par mètre cube, on a $D = 0^m001$ et $v = 0^m17$. Si l'on appelle v_1 la vitesse que l'on pourrait appeler d'équilibre, pour laquelle l'expression précédente est nulle, ce qui revient à poser:

$$v_1 = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{2}{3k}D\left(\frac{\Pi_1}{\Pi} - 1\right)},$$

on pourra écrire de la manière suivante l'équation du mouvement vertical du corps solide tombant librement dans le liquide supposé immobile, en égalant simplement la force accélératrice,

dont la valeur vient d'être donnée, au produit de la masse du corps solide par son accélération égale alors à $\frac{dv}{dt}$:

$$\frac{1}{6}\pi D^3 (\Pi_1 - \Pi) - k\frac{\Pi}{g}\pi\frac{D^2}{4}\frac{v^2}{2} = \frac{\Pi}{g}\pi\frac{D^3}{6}\cdot\frac{dv}{dt}$$

ou bien en tenant compte de la signification attribuée à v_1 :

$$k(v_1^2 - v^2) = \frac{D}{3}\frac{dv}{dt}.$$

Cette équation donne d'abord en séparant les variables :

$$\frac{3\,kdt}{D} = \frac{dv}{v_1^2 - v^2}$$

et, en intégrant depuis $v = 0$, et $t = 0$:

$$v = v_1 \frac{e^{\frac{6kv_1t}{D}} - 1}{e^{\frac{6kv_1t}{D}} + 1} = v_1 \text{ tah.} \frac{3kv_1t}{D},$$

en désignant par *tah* la tangente hyperbolique.

Quant à l'espace parcouru pendant le temps t, si on le désigne par z, on obtient, en remarquant que $v = \frac{dz}{dt}$ et que $z = 0$ pour $t = 0$:

$$2e^{\frac{3k}{D}z} = e^{\frac{3k}{D}v_1t} + e^{-\frac{3k}{D}v_1t}.$$

La vitesse du corps qui tombe librement croît en s'approchant asymptotiquement de la vitesse-limite v_1, dont elle ne diffère plus sensiblement après un temps très court, une ou deux secondes au plus. Si le corps tombe dans un liquide en mouvement, dont tous les filets peuvent être considérés comme ayant la même vitesse moyenne U, sa trajectoire ne différera pas sensiblement d'une ligne droite inclinée à raison de U de base pour v_1 de hauteur. Il parcourra horizontalement, pour tomber d'une hauteur h, une distance $h\frac{U}{v_1}$ qui pourra

être grande si le rapport $\frac{U}{v_1}$ est grand ; et pour peu que, dans ce trajet, il rencontre des molécules dont la vitesse ait une composante verticale dirigée de bas en haut, il sera relevé et ramené vers les couches supérieures.

Mais c'est surtout, comme nous l'avons dit, la différence de vitesse des filets fluides qui produira, sur le corps solide, l'effort très petit nécessaire pour cela. Dans les cours d'eau naturels, en effet, comme dans les canaux découverts que nous avons étudiés, la vitesse va en augmentant depuis le fond jusque vers la surface, et cette augmentation proportionnelle, mesurée par le rapport $\frac{dv}{dz}$, est en raison de la profondeur ; elle diminue donc elle-même lorsque l'on s'approche de la surface libre.

Si l'on admet, ce qui semble assez naturel, la proportionnalité de l'effet à la cause, la force qui entraînera vers le haut les corps solides roulés par l'eau sera proportionnelle à $\frac{dv}{dz}$, c'est-à-dire d'autant plus grande que l'on sera plus près du fond. Si donc l'on imagine un courant d'une profondeur donnée et des solides d'une densité déterminée et de volumes croissant par degrés insensibles, ces solides se distribueront dans les couches de haut en bas, suivant l'ordre de leur volume ; les couches supérieures ne porteront que les matières les plus ténues, parce que les filets y ont des vitesses sensiblement égales et les couches inférieures porteront des solides de plus en plus gros [1].

1. Un phénomène analogue, dû à la même cause, peut s'observer lorsque l'on met en suspension, dans un liquide, des corps solides de petite dimension, plus lourds que lui, et que l'on imprime au liquide un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, comme par exemple lorsque l'on remue avec une cuillère un verre d'eau contenant des grains de sucre non encore dissous. Dans le mouvement giratoire imprimé au liquide, les vitesses les plus grandes sont au centre et c'est vers ce point que sont entraînés les petits corps solides en suspension.

144. Puissance de suspension d'un courant liquide. — Si, maintenant, au lieu d'un corps solide isolé, tenu en suspension dans un liquide, nous imaginons en avant et en arrière, à une petite distance de lui, un autre corps semblable, il pourra se faire que dans l'étendue du courant inférieur qui soutient le premier, il se produise, à une certaine distance autour de lui, une perturbation dans la répartition des vitesses qui ne permette pas à ce même courant, si le second corps est très rapproché du premier, de le soutenir dans les mêmes conditions; cela revient à dire qu'un corps solide, eu égard à sa distance aux corps voisins, peut se trouver en équilibre dans une couche inférieure à celle où il se tiendrait s'il y était isolé; ou bien encore que le corps montera ou descendra si les corps voisins s'éloignent ou se rapprochent.

De ce qui précède, Dupuit, à qui nous avons emprunté ce raisonnement, déduit les principes suivants :

L'eau courante peut tenir en suspension des solides beaucoup plus denses qu'elle ;

La puissance de suspension dépend de la vitesse relative des filets et elle est d'autant plus considérable que cette vitesse relative est plus grande. En général, elle est en rapport avec la quantité $\frac{dv}{dz}$, de sorte que les couches inférieures d'un courant peuvent porter des solides plus volumineux et plus nombreux ;

La puissance de suspension d'une couche est limitée, c'est-à-dire qu'un mètre carré de chaque couche ne peut contenir qu'un certain nombre de solides d'un volume déterminé. Mais il y a, pour chaque couche, un degré de saturation différent.

Il est probable que la puissance de suspension d'un cours d'eau ne dépend pas seulement de la vitesse relative $\frac{dv}{dz}$ des filets liquides, mais aussi de l'agitation tourbillonnaire en chaque point, laquelle est, comme nous l'avons vu, proportionnelle à la vitesse u_0 sur le fond et au rayon moyen ou à

la profondeur h du cours d'eau. La puissance de suspension serait ainsi proportionnelle au coefficient que nous avons appelé ε (n° 28, page 56) du frottement intérieur du liquide et cela semble assez plausible si l'on remarque que cette force est due probablement, pour la plus grande partie, au frottement du liquide sur le solide en suspension. Dans cette hypothèse, la puissance de suspension étant proportionnelle à $hu_0 \frac{dv}{dz}$ se trouvait, par suite, proportionnelle au produit zI (d'après l'équation 21, page 60), ou bien, si l'on suppose le régime uniforme, et si l'on appelle U la vitesse moyenne, à $\frac{z}{h}$ U². Elle serait ainsi en raison de la profondeur relative $\frac{z}{h}$, nulle en haut pour $z=0$, maximum vers le fond pour $z=h$, et, pour une même valeur de ce rapport $\frac{z}{h}$, en raison du carré de la vitesse moyenne. Les corps tenus en suspension à une même profondeur relative $\frac{z}{h}$, au milieu par exemple de la profondeur d'un cours d'eau, seraient d'autant plus gros que la vitesse moyenne du cours d'eau serait plus grande. Les solides tenus en suspension à la moitié de la profondeur, dans un cours d'eau animé d'une vitesse moyenne U, ne pourraient s'élever au-dessus du $\frac{1}{9}$ de la profondeur $\left(\frac{z}{h}=\frac{8}{9}\right)$ si la vitesse moyenne se trouvait réduite aux trois quarts de U. Cette conséquence de l'hypothèse qui vient d'être faite aurait besoin d'être vérifiée par l'expérience.

Quoiqu'il en soit de la véritable loi, encore inconnue, qui lie la puissance de suspension à $\frac{dv}{dz}$, à u_0 ou à U, et à la profondeur h, il semble acquis qu'elle augmente en même temps que chacune de ces quatre quantités, et cela peut suffire pour expliquer ce qui se passe dans le lit d'un grand cours d'eau à fond mobile.

145. Débit solide d'un cours d'eau. — Si le cours d'eau est saturé de matières solides en suspension et si son mouvement est uniforme, sa section et sa pente étant constantes, il ne déposera ni ne prendra rien sur sa route. Mais si la section varie, la répartition des vitesses et peut-être aussi la vitesse moyenne variera en même temps ; il en sera de même de la puissance de suspension, et il en résultera des dépôts ou des affouillements suivant qu'elle aura diminué ou augmenté. Si, dans une rivière, on considère deux sections transversales, une certaine quantité de matières solides, en suspension ou entraînées, traverse la section d'amont pendant un certain temps, et une autre quantité de ces mêmes matières traverse, pendant le même temps, la section d'aval. Si la quantité qui est entrée entre les deux sections est supérieure à celle qui en est sortie, le fond s'est exhaussé ; il s'est abaissé dans le cas contraire. Pour qu'il conserve la même forme et que le régime du cours d'eau soit réellement permanent, il faut que le volume total des matières solides transportées soit le même dans toutes les sections, ou, comme dit M. Fargue, que le *débit solide* soit constant dans toute l'étendue de la rivière [1].

Il est difficile d'arriver à mesurer, même grossièrement, le volume total de ces matières solides. Celui des limons tenus en suspension peut s'évaluer d'une façon assez exacte par l'analyse de l'eau : il suffit de prélever un volume d'eau déterminé, présentant les conditions moyennes et de laisser se déposer les matières tenues en suspension. C'est ainsi que Baumgarten (cité par M. Fargue) a établi que chaque année la Garonne charrie, à Marmande, cinq millions de mètres cubes de limons. La quantité de limon par mètre cube varie souvent dans des limites extrêmement étendues, pour un même cours

1. C'est M. Lechalas qui paraît avoir parlé le premier des *débits* de sable et de la comparaison des volumes passant aux divers profils en travers d'une section de rivière. Rapport joint à l'avant projet de transformation de la Loire maritime publié en 1869 ; brochure sur le même sujet imprimée et distribuée par la Chambre de commerce de Nantes en 1870 ; Annales des Ponts et Chaussées de 1871 ; etc.

d'eau, avec les saisons, l'abondance des eaux, etc. Ainsi, on a constaté que le poids de limon charrié par la Durance varie de zéro à quatre et même cinq pour cent, ce qui représente de 40 à 50 kilogrammes de matières solides par mètre cube d'eau. D'après des expériences faites par M. Duponchel sur l'écoulement dans un petit canal artificiel, « on peut poser comme un « fait certain, démontré par l'expérience, qu'une eau courante, « animée d'une vitesse moyenne de 1 m. 44 par seconde, peut « entraîner sans dépôt 9 0/0 de son poids de limon et comme, « d'ailleurs, le mélange de limons, loin d'avoir atténué la vi- « tesse du courant, paraît l'avoir plutôt augmentée, on peut « en conclure, avec une très grande probabilité, que cette « proportion de 9 0/0 est notablement inférieure au degré « de saturation que comporte une vitesse de 1 m. 44. »[1]

Il semble, en effet, résulter des mêmes expériences que toutes choses égales, la vitesse moyenne de l'eau chargée de limon est supérieure à celle de l'eau claire, « la plus grande « densité du liquide paraît compenser, et au-delà, sa moindre « fluidité. » Tandis que les vitesses des eaux claires étaient de 1 m. 41, 1 m. 97, 2 m. 71, celle des eaux troubles, dans les mêmes conditions, se sont trouvées de 1 m. 44, 2 m. 05, 2 m. 79. Il y aurait un certain intérêt à vérifier ce fait par de nouvelles expériences faites sur des canaux de dimensions plus grandes.

M. Duponchel a constaté aussi que le canal de Marseille charrie parfois jusqu'à 4 et 5 0/0 du volume de ses eaux en limons et en charrierait bien davantage si la Durance les lui fournissait. Ces limons se maintiennent constamment en suspension sur un parcours de près de cent kilomètres. Non seulement ils ne forment aucun atterrissement dans le lit du canal, mais ils accompagnent ses eaux dans les plus petites rigoles, suivant leurs sinuosités les plus irrégulières, remontant dans les conduites forcées de distribution sans jamais les obstruer,

1. *Hydraulique et géologie agricoles*, pages 638-639.

tant que l'écoulement des eaux se maintient avec une vitesse même très inférieure à celle du canal, qui atteint à peine 0 m. 75 par seconde.

Dans les mines de Californie, on effectue le transport des déblais au moyen de conduites en bois de forme rectangulaire de 1 m. 80 de largeur sur 0,91 de hauteur, dont le fond est garni de barres transversales destinées à retenir l'or contenu dans les terres transportées. La pente est très forte, soit d'environ 0,03. Le volume des déblais entraînés varie de $\frac{1}{28}$ à $\frac{1}{16}$ et même à $\frac{1}{11}$, il est moyennement de $\frac{1}{25}$ de celui de l'eau, soit de 4 pour cent [1].

Des faits analogues peuvent se constater sur tous les cours d'eau et le degré de saturation des matières en suspension dépend non seulement de la vitesse des eaux, mais aussi et surtout de la ténuité et du poids spécifique des matières ainsi emportées.

Mais, pour ce qui est du volume des matières charriées par entraînement sur le fond du lit, il est à peu près impossible de s'en faire une idée précise. Dans les crues et les grandes eaux les graviers et sables des fonds mobiles sont remués jusqu'à une grande profondeur et ce n'est probablement pas la couche superficielle seule qui s'avance de quantités appréciables. Dès lors, il semble bien difficile d'aborder par le calcul le problème de la détermination des changements de forme produits par l'action des eaux.

146. Etude du régime des rivières à fond de sable, par M. Lechalas.—M. Lechalas l'a cependant tenté [2], en bornant toutefois son étude à celle des rivières à fond de sable et surtout de la Loire, à laquelle se rapportent tous les chiffres

1. Rapport de mission en Colombie, par M. Lucien N. B. Wyse, 1891.
2. Note annexe du premier volume de l'ouvrage intitulé : *Navigation intérieure, rivières et canaux*, par M. Guillemain, dans l'*Encyclopédie des travaux publics*.

de son travail. Il établit d'abord que, pour une rivière déterminée, ayant son lit formé d'un sable homogène dont les grains sont d'une même grosseur dans toute son étendue et sur une profondeur supposée indéfinie, il y a une certaine vitesse de fond minimum, w_0, au-dessous de laquelle le sable n'est pas entraîné et il trouve que, pour la Loire, cette vitesse est d'environ 0 m. 25 par seconde. Lorsque la vitesse est un peu plus grande, le sable est roulé par le courant, mais n'entre pas encore en suspension ; pour que ce fait se produise, il faut que la vitesse de fond atteigne une certaine valeur w_1 qu'il suppose être de 0 m. 55 sur la Loire. Cela étant, le régime uniforme pourra se produire, avec les deux valeurs de la vitesse au fond w_0 ou w_1, et un même débit q par unité de largeur du fleuve supposé avoir une largeur indéfinie. La profondeur H, la pente i du cours d'eau, et la vitesse moyenne U se détermineront, dans les deux cas, par les trois équations[1] :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} Hi &= \left(\alpha + \frac{\beta}{H}\right) U^2, \\ q &= HU, \\ w &= U - 14\sqrt{Hi}, \end{aligned} \right.$$

en y mettant pour q la valeur du débit et pour w soit la valeur w_0, soit la valeur w_1. On aura ainsi deux systèmes de trois équations permettant, dans chaque cas, de calculer les trois inconnues H, U, i ; et l'on trouvera, correspondant à la vitesse la plus faible w_0, une valeur de H plus grande et une valeur de i plus petite que pour le cas de la plus grande vitesse w_1. Voici alors ce qu'en conclut M. Lechalas, pour un cours d'eau idéal, à débit constant, ne recevant de l'amont aucun apport solide et duquel le sable entraîné vers l'aval disparaît régu-

1. La première de ces équations est celle du mouvement uniforme, d'après Darcy ; la seconde résulte de la définition de la vitesse moyenne, et la troisième est celle que nous avons donnée plus haut, nos 104 et 105, pour les grands cours d'eau, d'après M. Bazin. M. Lechalas prend $w = U - 10\sqrt{Hi}$ qui correspond aux cours d'eau de dimension restreinte.

lièrement. Un lit rempli de sable qui ne se renouvelle pas, disposé suivant une inclinaison dépassant certaine limite, reçoit un débit d'eau q par seconde et par unité de largeur; au bout d'un temps plus ou moins long, suivant la pente et la longueur du canal, un état d'équilibre s'établit, correspondant à la vitesse de fond w_1, au-dessous de laquelle cesse le transport des sables en suspension. La profondeur est alors H_1 et la pente i_1. Mais cette vitesse w_1 entraîne encore du sable, l'équilibre réalisé est donc instable, le cours d'eau va s'approfondir et, au bout d'un temps considérable, se produira l'état d'équilibre définitif correspondant à la vitesse w_0 à laquelle cesse l'entraînement du sable. La profondeur est devenue H_0 plus grande que H_1 et la pente i_0 plus faible que i_1. La profondeur a augmenté par suite de l'entraînement du sable et la pente a diminué par suite de l'augmentation de profondeur et de la diminution de la vitesse moyenne [1]. Ces conclusions sont certaines; ce qui l'est peut-être moins, ce sont les résultats numériques déduits de l'application des trois équations (1) qui supposent applicables à une rivière à fond mobile, dont les eaux entraînent effectivement du sable, les coefficients numériques déduits d'expériences sur des canaux à fond fixe.

Pour passer de ce cours d'eau idéal à un autre qui se rapproche davantage de la réalité, M. Lechalas suppose que l'équilibre stable (w_0, H_0, i_0) étant établi, un apport de sable de p mètres cubes par jour, amené par exemple par un affluent, se produise vers l'amont. L'eau n'entraîne d'abord qu'une très faible portion de cet apport p; elle ne commence à en enlever que lorsque le bourrelet formé, ayant diminué la section, a accru la vitesse moyenne et a donné à la vitesse de fond une valeur supérieure à w_0.

A partir de ce moment, l'entraînement du sable se continue,

1. La résolutions des équations (1) donne, à peu près :

pour $w = w_0 = 0{,}25$,	pour $w = w_1 = 0{,}55$.
$H_0 = 9$ m. 00,	$H_1 = 4$ m. 00.
$i_0 = 0{,}0000038$,	$i_1 = 0{,}00005$.

le bourrelet s'étale vers l'aval, la profondeur diminue, la pente et la vitesse augmentent jusqu'à ce que la vitesse de fond, w, ait atteint une grandeur suffisante pour que, soit par entraînement, soit par suspension, le volume de sable charrié vers l'aval atteigne p mètres cubes par jour. Il se produit alors un nouvel état d'équilibre. Si, par exemple, AA (fig. 78) était le fond primitif, BB, la surface libre correspondante, le nouvel état d'équilibre sera représenté par une ligne de fond CC et une ligne superficielle DD, plus inclinées que les premières et qui les couperont respectivement en deux points E, F. En amont du point E, le fond se sera remblayé par suite de l'apport de sable, en aval, il se sera creusé. Le niveau de l'eau aura été relevé en amont du point F et abaissé en aval ; mais ce raisonnement ne permet d'établir aucune corrélation entre la position de ces points E, F et celle du point M où l'apport de sable est supposé se produire. Si l'on reste dans l'hypothèse d'un cours d'eau

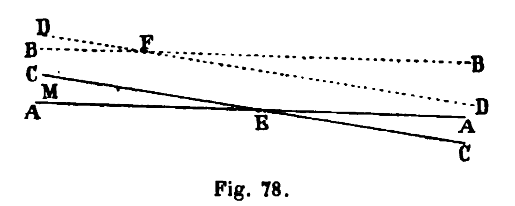


Fig. 78.

indéfini dans les deux sens, rien ne peut indiquer à quel moment le nouvel équilibre s'établira. Il faut donc supposer ou bien que le fond présente en E un point fixe, en amont duquel se réglera la pente nouvelle, ou bien que c'est le niveau de l'eau qui sera maintenu fixe en un certain point tel que celui que nous avons marqué F. Alors, d'après la distance à ces points du point M où arrive le sable on pourra calculer le temps nécessaire au remplissage du prisme triangulaire CEAM. En adoptant des chiffres applicables à la Loire, M. Lechalas trouve, pour un cas particulier, une durée de 70 ans. Ce résultat montre de combien peu d'utilité peut être un calcul numérique de ce genre, puisque, dans une aussi longue période, il se

produira certainement des crues plus ou moins grandes qui modifieront le lit, lui donneront une forme d'équilibre toute différente que les eaux ordinaires viendront ensuite peu à peu transformer jusqu'à ce qu'une nouvelle crue vienne encore une fois tout bouleverser, et ainsi de suite. Car ce n'est pas tant l'action des eaux d'étiage qu'il faut étudier pour se rendre compte de la forme du lit d'un cours d'eau que celle des crues ordinaires. Les grandes crues extraordinaires sont très rares ; mais les grandes eaux annuelles établissent une forme du lit, à peu près constante, si elles sont sensiblement de même importance : présentant au contraire des différences, d'une année à l'autre, si elles ont été plus ou moins abondantes. Sur ce relief viennent les eaux ordinaires et les basses eaux qui n'y apportent souvent que des modifications peu sensibles. Dans l'étude du lit d'un cours d'eau de largeur même assez grande pour que son rayon moyen ne diffère pas de sa profondeur, il est nécessaire aussi de tenir compte de la courbure des rives dont l'effet est souvent prépondérant.

§ 3

INFLUENCE DE LA FORME DES RIVES

147. Étude de l'influence de la forme des rives, par M. Fargue. — Cette étude de l'influence de la forme des rives a été faite par plusieurs ingénieurs, mais c'est M. Fargue qui l'a poussée le plus loin [1]. Les résultats qu'il a obtenus sur la Garonne, en appliquant les principes qu'il en a déduits ont été absolument conformes à ses prévisions et ont transformé cette rivière de la façon la plus heureuse.

1. Étude sur la corrélation entre la configuration du lit et la profondeur d'eau dans les rivières à fond mobile, *Annales des ponts et chaussées*, 1868, 1er semestre, page 34.

M. Fargue a étudié le cours de la Garonne entre Gironde et Barsac, sur 22 kilomètres de longueur. La rivière présente dans cette partie une largeur moyenne de 180 mètres et un débit moyen de 687 mètres par seconde. Le fond, mobile, est formé de gravier dont les grains ont de 5 à 6 centimètres de grosseur, mélangé d'environ 35 à 50 pour cent de sable. En prenant le milieu, ou à peu près, des principaux alignements droits, il a décomposé l'axe de la rivière en portions auxquelles il a donné le nom spécial de *courbes*. Lorsque deux courbes successives sont de sens contraire, le point qui les sépare est dit point d'*inflexion*, il s'appelle point de *surflexion* lorsque les deux courbes consécutives sont de même sens. Le nombre des courbes dans la portion étudiée était de 17, séparées par 14 points d'inflexion et 3 points de surflexion ; leur longueur moyenne était par conséquent de 1330 mètres. On a mesuré, dans un très grand nombre de profils, la profondeur la plus grande et la comparaison des résultats a montré que cette profondeur suivait une loi générale de périodicité : elle croît à partir d'un point où elle est minima, ce point est le *maigre* ; elle atteint une valeur maxima à un autre point qui est la *mouille* ; elle décroît ensuite jusqu'à un second maigre pour croître de nouveau jusqu'à une autre mouille et ainsi de suite. Prenant pour points de divisions les principaux maigres, M. Fargue a partagé la longueur de la rivière en 17 portions qu'il a appelées biefs. En comparant ces biefs aux courbes il a reconnu une corrélation entre les deux : le maigre correspond au point d'inflexion ou de surflexion, mais il se trouve reporté un peu en aval de ce point, en moyenne à 253 mètres, soit un cinquième environ de la longueur du bief ou de la courbe. De même la mouille correspond au sommet de la courbe, et elle est reportée vers l'aval d'une quantité un peu plus grande que le maigre, 307 mètres en moyenne, ou un quart de la longueur du bief. Enfin la mouille est d'autant plus profonde que la courbure du sommet est plus prononcée. En appelant c la courbure kilométrique au sommet de chaque courbe, c'est-à-

dire en posant $c = \frac{1}{R}$, le rayon de courbure R de la courbe étant exprimé en kilomètres, la relation suivante a été trouvée entre la profondeur de la mouille H exprimée en mètres et la courbure c :

$$c = 0{,}03\,H^3 - 0{,}23\,H^2 + 0{,}78\,H - 0{,}76. \tag{2}$$

Cette relation doit être considérée comme un cas particulier d'une autre, plus générale, dans laquelle figurerait explicitement la longueur de chaque courbe.

Une loi analogue relative au maigre est à chercher, mais elle ne peut dépendre de la courbure locale au point correspondant puisque cette courbure locale est uniformément nulle. Elle résulte alors des courbures qui précèdent le maigre. Si l'on appelle h la profondeur en chaque point, h_1 la profondeur moyenne d'un bief de longueur l, on a $h_1 = \frac{1}{l}\int_0^l h\,ds$; de même, c étant la courbure en chaque point, c_1 la courbure moyenne, $c_1 = \frac{1}{l}\int_0^l c\,ds = \frac{\alpha}{l}$ en appelant α l'angle que font entre elles les tangentes aux extrémités de la courbe que l'on considère ; on a approximativement la relation :

$$h_1 = 1{,}50 \times \left(1 + \sqrt{c_1^2 + 1{,}711 \times c_1}\right).$$

A longueur égale, la profondeur d'eau moyenne d'un bief est d'autant plus grande que les deux tangentes extrêmes de la courbe forment un angle extérieur plus ouvert.

Les accroissements de la profondeur et ceux de la courbure sont en corrélation. Si l'on appelle q la variation par kilomètre de la courbure kilométrique et p la variation de profondeur également par kilomètre :

$$q = 10^6 \frac{\Delta c}{\Delta s}, \qquad p = 10^3 \frac{\Delta h}{\Delta s},$$

on a la relation :

$$q = 0{,}1553\,p + 0{,}0114\,p^3 ;$$

ou bien en prenant les limites des rapports :

$$(3) \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{155,3}{10^6}\left(\frac{dh}{ds}\right) + 11,4\left(\frac{dh}{ds}\right)^2.$$

Si l'on a construit une courbe ayant pour abscisses les longueurs s et pour ordonnées les courbures c en chaque point, cette courbe est appelée courbe des courbures et l'on peut dire alors que : La pente du fond du thalweg est déterminée par l'inclinaison de la tangente à la courbe des courbures. C'est la *loi de la pente du fond.*

148. Lois générales applicables aux rivières à fond mobile. — L'expression numérique donnée à chacune des lois précédentes ne s'applique bien entendu qu'au cas particulier considéré par M. Fargue ; mais il est extrêmement probable que ces mêmes lois existent d'une manière générale pour toutes les rivières à fond mobile. Les voici résumées avec quelques autres qui résultent également des observations de M. Fargue :

1° La mouille et le maigre sont reportés en aval du sommet de la courbe et du point d'inflexion ou de surflexion ;

2° La courbure du sommet détermine la profondeur de la mouille ;

3° Dans l'intérêt de la profondeur, tant maxima que moyenne, la courbe ne doit être ni trop courte ni trop développée ;

4° L'angle extérieur des tangentes extrêmes de la courbe, divisé par la longueur, détermine la profondeur moyenne du bief ;

5° Le profil en long du thalweg ne présente de régularité qu'autant que la courbure varie d'une manière graduelle et successive. Tout changement brusque de courbure occasionne une modification brusque de la profondeur ;

6° Si la courbure varie d'une manière continue, l'inclinaison de la tangente à la courbe des courbures détermine la pente du fond du thalweg.

149. Forme à donner au lit pour obtenir un profil en long déterminé. — Les réciproques des propositions 2, 4 et 6 sont également vraies; on peut donc chercher à tracer le lit de manière à donner au thalweg un profil en long déterminé.

Se donner le profil, c'est se donner h en fonction de s et par suite $\frac{dh}{ds}$. Puisque, d'après la réciproque de la proposition 6, la valeur de $\frac{dh}{ds}$ détermine celle de $\frac{dc}{ds}$, on a, en somme, une équation de la forme :

$$\frac{dc}{ds} = \varphi(s) \quad , \quad \text{d'où} \qquad c = c_0 + \int_0^s \varphi(s)\, ds.$$

On connaîtra donc la courbure de l'axe en chaque point si l'on a, à l'origine par exemple, une profondeur donnée H correspondant à une mouille, qui fera connaître, d'après la proposition 2, la courbure maxima en ce point qui sera c_0. La courbure en chaque point donnera, par son inverse, le rayon de courbure, et il sera facile de construire la courbe par arcs de cercle successifs.

Par exemple, si l'on veut que le profil du fond soit rectiligne, depuis la mouille jusqu'au maigre, il faudra faire $\frac{dh}{ds}$ constant ; par suite $\frac{dc}{ds}$ est aussi constant et la courbure a pour expression :

$$c = c_0 + \gamma s,$$

γ étant un coefficient numérique. La courbe des courbures est alors une ligne droite, et l'on peut donner à son équation la forme

$$c - c_0 = \gamma(s - s_0),$$

en appelant s_0 l'abscisse du point où la courbure est c_0. La tangente à la courbe cherchée en un point quelconque s, fait avec la tangente, à la même courbe au point s_0, un angle $\alpha = \int_0^s c\,ds$, et, si l'on veut avoir l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, on écrira :

$$dx = ds \cos\alpha, \quad dy = ds \sin\alpha.$$

Si, pour simplifier, on prend pour origine de la courbe le point d'inflexion où la courbure est nulle, on aura, pour $s_0 = 0$, $c_0 = 0$, $\alpha = 0$, et les équations précédentes deviennent :

$$c = \gamma s, \qquad \alpha = \gamma \frac{s^2}{2}.$$

On en déduit alors, en développant sin α et cos α suivant les puissances croissantes de α et après avoir intégré :

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{13}\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots\right]$$

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\left[\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{7}\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{1}{11}\cdot\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{15}\frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\right]$$

La courbe ainsi définie a été appelée, par M. Fargue, une spirale-volute. Elle se compose de deux branches symétriques par rapport à l'origine (fig. 79) et s'enroulant asymptotiquement autour du point dont les coordonnées sont :

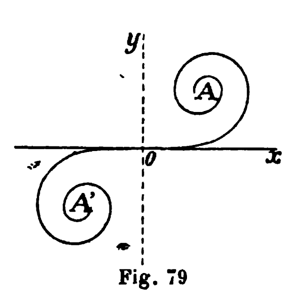


Fig. 79

$$x = y = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

La forme de l'équation montre d'ailleurs que toutes les spirales volutes sont semblables entre elles et que leurs grandeurs sont proportionnelles à la quantité $\sqrt{\frac{2}{\gamma}}$ qui en est le paramètre. La grandeur de ce paramètre étant connue suffit pour définir entièrement une spirale-volute. Or, γ n'est autre chose que la dérivée $\frac{dc}{ds}$ de la courbure par rapport à la longueur, c'est la quantité désignée plus haut par q, mais divisée par 10^6. Si donc l'on se donne la pente du fond, $\frac{dh}{ds}$ ou $\frac{p}{10^3}$, on en déduira facilement

le paramètre de la spirale volute applicable à un cas particulier donné, et si l'on a construit à l'avance un certain nombre de spirales-volutes deparamètres divers (M. Fargue en a construit 17 pour des valeurs du paramètre comprises entre 0,10 et 1,00), on n'aura qu'à prendre celle qui correspond à la pente de fond que l'on se sera donnée. Les gabarits ainsi construits à l'avance doivent être complétés par l'indication de la direction de la normale et de la grandeur du rayon de courbure en chaque point.

Supposons maintenant que le fond du thalweg soit profilé suivant une courbe quelconque ; on peut toujours, avec une approximation qui, théoriquement, n'a pas de limites, décomposer cette courbe en éléments rectilignes, et constituer le tracé de l'axe du cours d'eau par des arcs successifs de spirale volute, facilement tracés au moyen des gabarits, qui seront non seulement tangents entre eux, mais osculateurs, c'est-à-dire qu'ils auront à leurs points de raccordement des contacts de second ordre, puisqu'ils auront, en ces points, mêmes courbures. Les courbes ainsi constituées pourront affecter des formes très diverses, mais elles auront toutes une propriété commune et essentielle, la *continuité de la variation de la courbure.*

Si l'axe du cours d'eau présentait simplement des alignements droits raccordés entre eux par des arcs de cercle, la courbe des courbures se composerait de droites horizontales situées à diverses hauteurs. Elle présenterait donc une discontinuité aussi grande que possible. Si, au lieu de droites et d'arcs de cercle, l'axe du cours d'eau est formé, comme nous venons de le dire, d'arcs successifs de spirales-volutes, raccordés entre eux par osculation, la courbure variant, dans chacun de ces arcs, proportionnellement à la longueur s, la courbe des courbures se présentera sous la forme d'un polygone formé de lignes droites plus ou moins inclinées. La discontinuité sera moindre que dans le premier cas. Et l'on comprend qu'elle serait encore moindre, ou que l'on arriverait à

une loi de continuité plus parfaite si, au lieu de ce polygone pour la courbe des courbures, on avait une courbe dont la courbure elle-même varierait avec continuité. Dans cet ordre d'idées, M. Fargue a étudié l'axe du cours d'eau qui correspondrait à une courbe des courbures ayant la forme d'une sinusoïde, c'est-à-dire qu'il a posé :

$$c = c_0 \cos \frac{\pi}{2} \frac{s}{s_0},$$

et il a trouvé pour la courbe correspondante une ligne qu'il a appelée *bisinusoïde*, définie par les équations :

$$x = \int \cos \left(c_0 \frac{2 s_0}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2 s_0} \right) ds + c^{te},$$

$$y = \int \sin \left(c_0 \frac{2 s_0}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2 s_0} \right) ds + c^{te}.$$

Il a tracé, suivant la forme de cette courbe, les rives de la Garonne au passage de Barsac. Les résultats ont été entièrement conformes aux prévisions ; les mouilles et les maigres se sont creusés et distribués comme il les avait projetés.

Je renverrai au mémoire de M. Fargue pour ce qui est du choix du tracé et de la détermination du profil du thalweg, et aussi pour ce qui concerne l'établissement des lignes de rive sur le terrain, questions d'un caractère trop pratique pour trouver utilement place ici. Mais je donnerai un résumé de sa théorie de l'écoulement dans un lit curviligne, qui peut apporter quelque lumière dans cette difficile question des rivières à fond mobile.

150. Écoulement dans un lit curviligne. — L'hypothèse ordinaire de l'écoulement de l'eau par filets parallèles est absolument inapplicable aux rivières. Si nous examinons ce qui se passe dans une courbe, le filet qui est en contact

avec la berge concave et qui a une vitesse dont la direction est tangente à celle de la berge en un point, la rencontre, au point suivant, suivant un angle infiniment petit $d\alpha$; sa direction doit être déviée de $d\alpha$. Le filet contigu n'est pas dans les mêmes conditions, ce n'est pas sur une surface solide qu'il vient se heurter, mais sur la surface liquide du premier filet ; le phénomène qui se passe est complexe et on peut se le représenter comme consistant dans une pénétration du premier filet par le second. L'écoulement étant plus rapide dans le second que dans le premier, celui-ci augmente à la fois de masse et de vitesse, c'est-à-dire de quantité de mouvement, aux dépens du second. Le second est à son tour pénétré par le troisième et sa quantité de mouvement augmente de ce qu'il reçoit du troisième et diminue de ce qu'il a cédé au premier. Et ainsi des autres. Mais cette action de la berge concave sur les divers filets n'est pas instantanée, et les modifications qui se produisent dans une section donnée sont dues à des causes existant, non pas dans cette section, mais dans la portion du lit située sur une certaine étendue à l'amont.

L'accroissement de masse et de vitesse ou de quantité de mouvement des filets situés près de la rive concave y produit un accroissement de hauteur et un approfondissement. C'est donc près de la rive concave que le thalweg tend à se fixer.

On peut encore dire, avec M. Boussinesq, que dans un courant courbe, la force centrifuge amène sans cesse, contre le bord extérieur ou concave, les couches supérieures de la masse fluide qui se trouvent animées de vitesses plus grandes. Après avoir été recouvertes par celles qui les suivent, ces couches doivent, sous l'impulsion de celles-ci, s'enfoncer d'abord, perdre en tourbillonnements une partie de leur force vive, puis revenir, en glissant sur le fond, et tout en continuant d'ailleurs à suivre le courant, vers le bord intérieur ou convexe, près duquel elles émergent lentement pour s'engager de nouveau dans un trajet pareil. Si la berge concave n'est pas très

résistante, elle sera sans cesse affouillée de haut en bas, de manière à devenir tout à la fois profonde et presque verticale, tandis que la berge convexe, sur laquelle viennent s'épanouir ou se détendre les filets après avoir subi une contraction sur la première, recevra la plus grande partie des débris arrachés à celle-ci et ne pourra conserver qu'une pente douce[1].

En second lieu, la forme d'un profil transversal du lit, et par suite la position et la profondeur du thalweg dans ce profil, dépendent d'un certain ensemble ou groupe des courbures précédentes. Si l'on passe au profil suivant, la modification de la forme et la pente du thalweg dépendent de la variation de ce groupe de courbures. Cette variation doit être graduelle et continue pour que la pente du thalweg soit régulière.

Enfin, si l'on considère la courbure maxima, c'est-à-dire la section dans laquelle l'action directrice du lit atteint sa plus grande valeur locale, on voit que le profil transversal en éprouvera un maximum d'effet, ce qui veut dire que le profil en long du thalweg présentera un point de profondeur maxima ; mais on voit aussi que ce n'est pas dans la section même du sommet que se produira ce dernier maximum, mais à une certaine distance à l'aval.

La pénétration des filets liquides qui se rencontrent ainsi sous de très petits angles, avec accroissement de la quantité de mouvement de ceux qui sont appuyés contre des obstacles solides, donne l'explication d'un certain nombre de faits que leur évidence ou leur simplicité a révélés depuis longtemps : la tendance du thalweg à s'établir contre la rive concave, la fixation du courant contre les rochers, les affouillements aux abords et *notamment à l'amont* des piles de ponts, etc.

151. Règles de M. Fargue pour la succession des courbes. — Le thalweg ainsi formé par suite d'une certaine

1. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, page 612.

configuration du lit correspond à un débit, à un état particulier des eaux. Si le débit change, les vitesses, les quantités de mouvement respectives des divers filets changent, leurs pénétrations réciproques et successives n'ont plus lieu de la même manière, le thalweg n'aura plus ni la même position, ni la même direction. Il a donc une tendance naturelle à *divaguer*, c'est-à-dire à se déplacer quand le débit se modifie. Cette tendance doit être combattue par tous les moyens possibles, car le remaniement perpétuel du fond est incompatible avec une bonne navigation. On conçoit que la longueur des courbes, leur distribution et l'écartement des rives soient réglés de telle sorte que les divers thalwegs, correspondant à tous les états des eaux autres que les crues débordées, soient pratiquement peu différents les uns des autres ; c'est ce que l'on appelle la permanence du thalweg, permanence impossible à réaliser d'une manière absolue, mais que l'on peut obtenir d'une façon suffisante pour la pratique. Il n'est pas nécessaire, en effet, que la ligne mathématique du thalweg soit permanente, mais la condition de la permanence sera suffisamment satisfaite s'il existe toujours une passe, c'est-à-dire une zone d'une certaine largeur, dans laquelle la rivière ne vient pas déposer de matières solides. Et l'on peut arriver à ce résultat par un tracé rationnel des digues, et en appliquant des règles pratiques ou principes d'amélioration de toute rivière navigable au moyen de rives artificielles, que M. Fargue formule ainsi [1] :

1° L'écartement des rives artificielles doit varier avec deux éléments, la distance et la courbure, savoir :

a) La largeur au point d'inflexion doit croître de l'amont vers l'aval ;

b) Entre deux points d'inflexion consécutifs, la largeur doit croître en même temps que la courbure croît elle-même et présenter vers le sommet un maximum qui est d'autant plus grand que la courbure du sommet est elle-même plus grande ;

1. Etude sur la largeur du lit moyen de la Garonne. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1882, 2e semestre, page 301.

2° Les rives convexes doivent avoir un développement notablement supérieur à celui des rives concaves.

Quant à la loi suivant laquelle doit se faire l'accroissement de la largeur, elle dépend du nombre, de la répartition et du régime des affluents; il est impossible de rien préciser à cet égard. Entre deux affluents, ou entre le dernier affluent et la mer, on pourrait être tenté de faire croître la largeur proportionnellement à la distance, et c'est ce qui a été admis, d'après M. Fargue, sur la Garonne maritime jusqu'en 1882. Il a montré alors que cette loi d'accroissement n'était pas d'accord avec les faits naturels. Cela aurait pu être prévu. S'il existe dans le cours d'eau une cause qui provoque l'augmentation de largeur et si l'on suppose cette cause constante, elle ne produira pas, au bout de chaque kilomètre, un même accroissement brut de largeur Δl, mais un même accroissement proportionnel $\frac{\Delta l}{l}$, c'est-à-dire que si, sur un kilomètre, la largeur s'est accrue, par exemple, de $\frac{1}{100}$ de sa largeur au commencement de ce kilomètre, elle s'accroîtra encore sur le kilomètre suivant de $\frac{1}{100}$ de sa largeur au commencement de ce second kilomètre [1]. C'est donc le rapport $\frac{\Delta l}{l}$ qu'il faut égaler à une constante λ, ce qui, en prenant une longueur infiniment petite ds, conduit à l'équation

$$\frac{dl}{l} = \lambda ds,$$

ou, en intégrant depuis une section définie par l'abscisse s_0 où la largeur était l_0 :

$$l = l_0 e^{\lambda(s - s_0)}.$$

1. On peut remarquer, en général, que si l'on considère une portion de cours d'eau dans laquelle le débit Q soit constant, h étant la profondeur moyenne, l la largeur et U la vitesse moyenne, on a

$$lhU = Q = \text{const.}$$

Le coefficient λ d'accroissement proportionnel de largeur doit avoir une valeur déterminée pour chaque cours d'eau ou chaque section de cours d'eau[1]. Il ne s'agit ici, bien entendu, que de la largeur minimum, mesurée aux points d'inflexion; partout ailleurs, dans les courbes, la largeur doit être plus grande, conformément au principe n° 1, *b*) ci-dessus, et l'on peut prévoir, et l'expérience confirme qu' « à la traversée d'une « rive à l'autre, le thalweg est profond et stable quand la par- « tie sensiblement rectiligne du lit est plus étroite que les par- « ties voisines présentant une courbure prononcée. » C'est, en effet, vers les points d'inflexion, où le thalweg doit passer d'une rive à l'autre, qu'il est le plus exposé à divaguer et qu'il y a utilité, en resserrant le lit, à s'opposer à cette tendance. D'un autre côté le thalweg, dans les parties courbes, se rapproche de la rive concave ; près de la rive convexe, au contraire, se déposent les matières en suspension ; si donc l'on veut qu'au point d'inflexion le thalweg, qui doit passer d'une rive à l'autre, se maintienne toujours vers le milieu du lit,

d'où l'on déduit, par la différentiation :

$$\frac{dl}{l}+\frac{dh}{h}+\frac{dU}{U}=0.$$

Si l'on suppose que la formule

$$hI = bU^2$$

du régime uniforme soit applicable, elle donne de même

$$\frac{dh}{h}+\frac{dI}{I}=2\frac{dU}{U};$$

d'où en éliminant U

$$\frac{dl}{l}+\frac{3}{2}\frac{dh}{h}+\frac{1}{2}\frac{dI}{I}=0;$$

La profondeur moyenne restera constante, ou dh sera égal à zéro si l'on a

$$\frac{dl}{l}=-\frac{1}{2}\frac{dI}{I},$$

ou si l'accroissement proportionnel de la largeur est égal à la moitié de la diminution proportionnelle de la pente moyenne.

1. C'est ce coefficient que M. l'Inspecteur général Mengin a appelé le module d'accroissement kilométrique (*Mémoire sur la puissance hydraulique des fleuves à marée.* Congrès des travaux maritimes de 1889).

sans s'approcher d'une des rives, il faudra que les deux rives présentent, toutes les deux, une convexité sensible et tournent l'une vers l'autre cette convexité. Il en résulte que les courbes convexes doivent avoir plus de développement que les courbes concaves qui leur sont opposées ; ces courbes devront être disposées comme le montre la figure 80. La différence, d'après M. Fargue, doit être de trois ou quatre fois la largeur minimum, mesurée au point d'inflexion de l'axe, intermédiaire entre les points d'inflexion des courbes des deux rives.

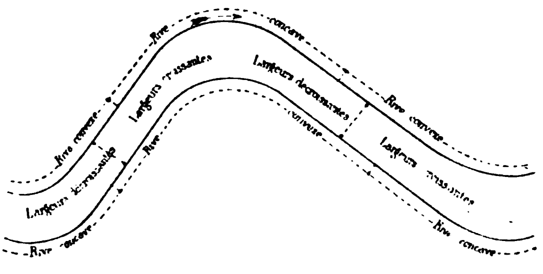


Fig. 80.

Je me bornerai à ces indications sommaires sur le régime des cours d'eau naturels. Les questions nombreuses et difficiles auxquelles donne lieu l'étude plus détaillée de ce régime et de ses conséquences sont étudiées dans des ouvrages spéciaux et en rapport avec l'objet que l'on a en vue. Je citerai notamment l'*Hydraulique fluviale*, de M. Lechalas, le *Traité de navigation intérieure*, de M. Guillemain, celui des *Ponts en maçonnerie*, de MM. Degrand et Resal, dans l'Encyclopédie des travaux publics, et j'y renverrai le lecteur pour tous les développements qui ne peuvent trouver place ici. J'ajouterai cependant quelques indications théoriques, dues à M. Boussinesq [1] et qui me paraissent de nature à fournir une première base à l'étude de la question si obscure de l'influence des courbes sur le régime des cours d'eau.

1. *Essai sur la théorie des eaux courantes*, nos 219 et suivants.

159. Essai théorique sur l'écoulement dans les courbes. — Nous avons dit plus haut (nº 44, page 89), que la perte de charge qui se produit au passage de l'eau dans un tuyau coudé avait été trouvée, par les expériences de Du Buat, pouvoir être représentée par une expression de la forme :

$$\tau_1 \frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}} \cdot U^2,$$

L étant la longueur du coude, r son rayon de courbure, D le diamètre du tuyau, U la vitesse moyenne de l'eau et τ_1 un coefficient numérique que nous avons dit être égal à 0,005 environ. Si l'on compare cette perte de charge, qui, par unité de longueur, est alors $\frac{\tau_1}{r}\sqrt{\frac{D}{r}} . U^2$, à celle qui se produirait dans la même longueur d'un tuyau droit est qui est $4b_1 \frac{U^2}{D}$, on voit que la perte de charge due à la courbure, comparée à celle du frottement, est une fraction de celle-ci exprimée par :

$$\frac{\tau_1}{4b_1}\left(\frac{D}{r}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou environ} \quad \frac{10}{3}\left(\frac{D}{r}\right)^{\frac{3}{2}},$$

en prenant pour b_1 une valeur moyenne de 0,00036.

De même, dans un canal courbe ayant une section rectangulaire très large, on arrive par des considérations de même ordre, à reconnaître que la perte de charge peut s'exprimer par une formule telle que :

$$\tau \frac{L}{h} \sqrt{\frac{l}{r}} \cdot U^2,$$

L étant toujours la longueur de la courbe, l la largeur du cours d'eau, h sa profondeur, r le rayon de courbure de son axe, et τ un autre coefficient numérique dont la valeur, beaucoup plus petite que dans le cas précédent, n'a été déterminée que d'une façon peu précise, mais semble pourtant être voisine de 0,0003 à 0,0005. La perte de charge par unité de longueur

due au frottement est dans ce cas $b\frac{U^2}{h}$, et le rapport des deux est simplement :

$$\frac{\tau}{b}\sqrt{\frac{l}{r}}, \qquad \text{ou environ} \qquad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{l}{r}},$$

en prenant pour b la valeur moyenne de 0,0004 et pour τ celle de 0,0003, qui paraît être un minimum.

Lorsque l'on écrira l'équation du mouvement varié dans un canal d'une largeur l beaucoup plus grande que la profondeur h et dont le thalweg présentera une courbure sensible $\frac{1}{r}$, on devra donc ajouter au second membre un terme $\frac{\tau}{h}\sqrt{\frac{l}{r}}\,U^2$. Et si l'on applique cette équation à un cours d'eau naturel dans lequel la vitesse moyenne U ait, partout, la valeur maxima sensiblement constante qu'elle ne peut dépasser sans produire des affouillements, de manière à ce que le terme $\frac{d}{ds}\left[\frac{U^2}{2g}\right]$ soit négligeable, cette équation deviendra simplement :

$$I = \frac{U^2}{h}\left(b + \tau\sqrt{\frac{l}{r}}\right).$$

Dans cette équation, I désigne la pente superficielle. En appelant h_0 la profondeur qui correspondrait au régime uniforme dans un lit de forme rectiligne, c'est-à-dire en posant $h_0 = \frac{bU^2}{I}$, on peut lui donner la forme :

$$h = h_0\left(1 + \frac{\tau}{b}\sqrt{\frac{l}{r}}\right).$$

La profondeur h devient h_0 quand le rayon de courbure r est infini, c'est-à-dire dans les parties rectilignes ou aux points d'inflexion. Si l'on considère le cours d'eau à l'époque d'une crue, la pente superficielle I devient à peu près constante sur d'assez grandes longueurs, et prend une valeur moyenne à peu près indépendante des ondulations du lit et réglée simple-

ment par la pente générale de la vallée, $\frac{bU^2}{I}$ ou h_0 est donc sensiblement constant; cela veut dire qu'alors, à tous les points d'inflexion, la profondeur du cours d'eau est à peu près la même; ou, en d'autres termes, que la pente superficielle moyenne dont il vient d'être parlé se règle d'après les parties saillantes, les maigres correspondant aux points d'inflexion.

L'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l}\left(\frac{b}{\tau}\right)^2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2$$

et elle établit alors une relation entre la courbure $\frac{1}{r}$ et la profondeur h. Cette relation est différente de celle (2) que M. Fargue a déduite de ses observations, n° 147, page 311, mais elle ne semble cependant pas inadmissible[1]. Différentiée par rapport à s, elle donnerait :

$$(4) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{lh_0}\left(\frac{b}{\tau}\right)^2\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)\frac{dh}{ds}$$

au lieu de la formule (3) de M. Fargue. Il serait intéressant, au moyen de données numériques, d'en comparer les résultats à ceux de l'observation. *A priori*, elle semble plus satisfaisante. Il paraît naturel d'admettre que la pente du lit $\frac{dh}{ds}$, correspondant à une variation déterminée $\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{r}\right]$ de la courbure, doit dépendre de la profondeur h; à une variation de courbure déterminée doit correspondre une pente d'autant plus faible que la profondeur est plus grande. Ce ne sont là, je me hâte de le dire, que de simples conjectures dont la vérification expérimentale devrait être faite avant d'en tirer des conclusions.

1. La formule ci-dessus donne des résultats qui s'accordent assez bien avec ceux de la formule de M. Fargue lorsque l'on y fait $h_0 = 2$ m. 80, $l = 170$ mètres et $\frac{\tau}{b} = \frac{7}{4}$ soit $\tau = 0{,}0007$ si $b = 0{,}0004$.

De cette vérification il résulterait, en particulier, que la forme de spirale-volute donnée en plan aux rives des cours d'eau aurait pour conséquence le règlement du fond, non pas suivant une ligne droite, mais suivant un arc de parabole concave vers le haut[1]. Il y aurait alors à chercher, par la méthode générale imaginée par M. Fargue, une courbe autre que la spirale-volute pour correspondre aux pentes uniformes du lit.

153. Effet de levées transversales dans une vallée submersible. — Ce n'est pas seulement au moyen de digues longitudinales que l'on peut arriver à modifier et à régulariser la forme du lit des cours d'eau ; on emploie souvent, pour cela, des digues transversales, ou épis, principalement lorsqu'il s'agit de fixer, dans une large vallée submersible, une rivière dont le régime n'est pas encore établi et qui est sujette à de continuels changements. Lorsque, dans une pareille vallée, on vient établir une digue insubmersible transversale, ou perpendiculaire à la direction générale de la rivière, et réservant, au lieu qu'occupe le courant, une ouverture pour le libre écoulement des eaux, on observe les effets suivants, d'après un rapport de Negretti (cité par Dausse) en date du 6 février 1847 :

1° En amont de ces deux digues, la rivière continue à changer de cours, à divaguer, arrivant toujours obliquement tantôt contre l'une, tantôt contre l'autre digue et formant au pied de leurs musoirs de profonds affouillements ; mais en aval le cours s'établit fixement et dans une direction normale à l'ouverture ;

2° La profondeur de l'affouillement diminue par degrés en aval de l'ouverture et cesse presque entièrement à une dis-

1. La spirale-volute est en effet caractérisée par $\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{r}\right]$ = constante, ce qui, en supposant approximativement l constant, et en appliquant l'équation précédente, donnerait

$$(h - h_0)\frac{dh}{ds} = \text{constante}.$$

équation différentielle d'une parabole à axe vertical.

tance à peu près égale à l'amplitude de cette ouverture, et là, la section de la rivière devient constante et régulière sur toute sa largeur;

3° L'incidence oblique du courant contre les digues a toujours une limite, et quand il l'a atteinte contre l'une de ces digues il se porte contre l'autre, sans pouvoir jamais se tenir au milieu; et, en défendant ces digues vers leurs musoirs, sur une certaine longueur du côté d'amont, on n'a pas à craindre qu'elles soient endommagées au-delà.

Ainsi un tel système, de deux digues transversales en regard l'une de l'autre, borne en amont les divagations de la rivière, parce qu'il l'assujettit à passer toujours par l'ouverture réservée; et en aval il lui fait prendre un cours régulier, invariable et normal à la dite ouverture.

Ces effets constatés il devient facile d'appliquer ce système de digues transversales à la régularisation ou à la correction d'une rivière. Il suffit de placer ces digues de distance en distance en des points judicieusement choisis. En particulier on peut les employer pour régulariser une rivière au passage d'un pont et faire en sorte que le courant se présente toujours dans une direction bien normale au pont sans produire d'affouillements. Voici les règles données dans ce but par Negretti :

1° Les deux digues transversales (qu'il appelle orthogonales) doivent être placées sur une même normale à la direction générale de la rivière et prolongées l'une et l'autre jusqu'au sol insubmersible ou jusqu'à une digue insubmersible, de manière à ne laisser d'autre issue aux eaux d'inondation que l'intervalle entre leurs musoirs [1].

1. Si par exemple AB, A'B' (fig. 81) sont les limites de l'inondation dans la vallée, CDEF, une digue insubmersible portant une voie de communication et DE le pont qu'il s'agit de protéger, la digue de protection insubmersible à construire en amont, et dont les musoirs doivent être en H et K, n'aura pas besoin d'être prolongée à travers toute la vallée, il suffira de rattacher ces musoirs à la levée CDEF

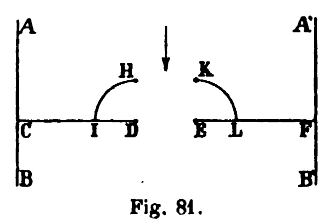


Fig. 81.

2° La distance de cette ouverture à la section qu'il s'agit de rendre constante et régulière doit être à peu près égale à la largeur qu'il faut donner à la dite ouverture pour que le libre écoulement des crues soit assuré.

3° Les musoirs des digues (orthogonales) doivent être suffisamment défendus pour résister au choc du courant et aux affouillements qui pourraient se produire à leur pied : le revêtement capable de procurer cette résistance devra être prolongé à partir de chaque musoir, du côté d'amont, sur une certaine longueur suivant la nature du terrain et le régime de la rivière ;

4° L'ouverture à réserver entre les musoirs doit être plus large d'un dixième environ que la largeur à assigner à la section inférieure (celle du pont) pour le libre écoulement des eaux, à cause de la contraction de la veine fluide ;

5° Enfin, les musoirs doivent être placés sur les bords de la section vive de la rivière et non à l'écart, sans quoi l'on aurait ensuite à faire d'autres ouvrages coûteux et d'un effet souvent très incertain pour amener la rivière entre les dits musoirs.

A cela Dausse ajoute qu'il faut toujours donner des talus doux aux musoirs et aux levées exposées au courant.

154. Considérations générales sur les travaux d'endiguement ou de régularisation des rivières. — Quel que soit le mode de correction adopté pour le lit d'une rivière, les travaux qu'il comporte se traduisent presque toujours par une diminution de la section laissée libre au passage des crues ordinaires ou des grandes eaux. Il en résulte, d'après la première loi citée plus haut, de Guglielmini, un accroissement de la vitesse des crues, et par suite une diminution de la pente : le lit se creuse vers l'amont. Les matériaux arrachés du fond, dans cette partie, ceux qui tombent

par deux digues HI, KL en forme de quart de cercle. Les parties de la vallée situées vers I et L ne tarderont pas à se colmater et à protéger très efficacement la levée principale.

des rives affouillées par l'approfondissement ne sont pas, en général, entraînés jusqu'à la mer sous leur forme primitive. Il y a un moment où par suite de circonstances locales diverses, la vitesse diminue et n'est plus suffisante pour les mettre en mouvement. D'ailleurs, la crue qui les a arrachés est ordinairement de peu de durée et lorsque le volume des eaux diminue, la marche des matériaux les plus gros s'arrête. La crue suivante les réprend et les porte un peu plus loin. En même temps, leur frottement mutuel arrondit leurs angles, diminue

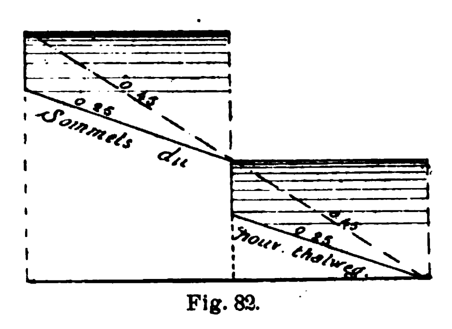


Fig. 82.

leur volume et les réduit progressivement en galets, gravier, sable et vase ; et la pente moyenne du cours d'eau s'établit, dans chaque section, en raison du volume et du poids de ces matériaux, ainsi que de la difficulté qu'ils présentent à être entraînés par les eaux. Mais, autour de cette pente moyenne, le lit présente des pentes plus faibles correspondant aux sections rétrécies, et des pentes plus fortes dans les parties larges; mais la pente moyenne est, comme on vient de le dire, plus faible après la régularisation qu'auparavant. C'est ce que M. Fargue, par exemple, a constaté sur la Garonne (voir plus haut, n° 138, page 288). Si la régularisation devait s'étendre sur une très grande longueur, la transformation, pour être complète, exigerait l'enlèvement par les eaux d'un énorme volume de déblais. Le plus souvent, il se rencontrera, dans le fond du lit, des parties moins affouillables dont les sommets deviendront les points de départ des pentes faibles, s'étendant pro-

gressivement vers l'amont par l'approfondissement successif. La figure 82 met en évidence ce résultat. Le lit primitif d'une rivière étant la ligne droite ponctuée avec une pente supposée de 0 m. 45 par kilomètre, s'il se rencontre un seuil résistant, le lit, après régularisation, présentera, en amont de ce point, une pente plus faible supposée, sur la figure, de 0 m. 25 par kilomètre. S'il n'y avait pas, dans le lit, ces seuils plus résistants, on pourrait avoir intérêt à les y établir, à construire, en des points convenablement choisis et espacés, des seuils fixes ou barrages de soutènement du lit. On éviterait ainsi l'énorme travail que devaient effectuer les eaux pour donner au lit, dans toute son étendue, la pente la plus faible, c'est-à-dire le déblai et le transport d'une énorme quantité de matériaux qui aurait l'inconvénient, non seulement d'exiger un très long délai, mais encore d'encaisser le lit d'une façon excessive vers l'amont et de l'exhausser vers l'aval dans des proportions qui pourraient devenir dangereuses. Ces barrages fixes de soutènement du lit peuvent d'ailleurs devenir les seuils de barrages mobiles, s'il s'agit de rendre la rivière navigable.

On peut au contraire, comme on l'a fait sur le Rhône, régulariser un cours d'eau en lui conservant sa pente moyenne et fixer le profil longitudinal du lit par des seuils analogues à ceux dont on vient de parler, mais assez rapprochés les uns des autres pour que la pente moyenne primitive du lit se trouve maintenue. Ces seuils, qui portent alors le nom d'épis-noyés, s'opposent à la réduction de la pente qui pourrait être la conséquence de travaux d'endiguement.

Dans le premier système, la vitesse moyenne des eaux est diminuée ; elle est au contraire conservée dans le second, car elle se règle sur la pente du lit auquel on a maintenu artificiellement une déclivité plus grande que celle qu'il aurait prise s'il avait été endigué.

Il ne rentre pas dans le cadre de cet ouvrage d'indiquer les motifs qui peuvent faire préférer l'un de ces systèmes à l'autre ; c'est avant tout une question d'espèce dans laquelle il y a à

faire entrer en ligne de compte l'importance économique du but que l'on poursuit, les dépenses à faire, etc. Tout ce que l'on peut conseiller, d'une façon générale, c'est la plus grande prudence dans les modifications que l'on apporte à la forme du lit. On se trouve en présence d'un régime existant, d'un état d'équilibre qui résulte de l'action des eaux sur ses rives et sur son lit pendant plusieurs siècles; si on vient à le troubler, on ne connaît pas exactement quel sera le nouveau régime qui s'établira ni quelles seront les conséquences des modifications. A ce point de vue, les théories de M. Fargue constituent une indication précieuse mais elles ne suffisent pas. En tout cas, lorsque l'on se sert du courant, convenablement dirigé, pour approfondir le lit sur un point, pour faire disparaître un banc, il ne faut pas perdre de vue que le courant emporte les matériaux de ce banc et qu'il devra, fatalement, les déposer en aval. Il s'agit donc de voir, dans chaque cas, comment et dans quelles conditions ce dépôt pourra s'effectuer sans constituer un nouveau banc pouvant présenter autant sinon plus d'inconvénients que le premier. Il faut aussi remarquer que les matériaux enlevés à un premier haut fond et emportés ainsi à l'aval par un effet du courant que l'on peut qualifier d'artificiel, plus énergique que celui que comportait le régime ancien, ne subissent pas, dans leur brusque transport vers l'aval, la même diminution progressive de volume qui résulterait pour eux de la marche graduelle vers l'aval et qui est corrélative à la diminution de la pente du cours d'eau depuis sa source jusqu'à l'embouchure. L'enlèvement d'un banc par l'effet du courant aura donc en général pour conséquence de déposer, en un certain point du cours d'eau, des matériaux plus gros et plus lourds que ceux qui constituent le lit en cet endroit et dont la grosseur est en rapport avec la vitesse moyenne au fond, sur le même point. Les matériaux ainsi déposés seront donc, toutes choses égales, plus difficilement entraînés par le courant dans leur nouvelle position que primitivement, c'est-à-dire que le second banc, s'il se forme, sera plus difficile à enlever que le premier.

L'amélioration d'un cours d'eau par le changement de son régime est donc une opération qui ne doit pas être entreprise à la légère sans que l'on en ait, auparavant, prévu toutes les conséquences dans la mesure du possible. A moins de circonstances exceptionnelles, il faut se garder d'entreprendre des travaux partiels, en vue de la modification d'un seul passage défectueux, sans les rattacher au préalable à une étude d'ensemble embrassant la totalité du cours d'eau.

§ 4

ÉCOULEMENT SOUTERRAIN

155. Écoulement à travers des terrains perméables. — Après cette étude sommaire du régime varié des cours d'eau à fond mobile, je vais dire quelques mots de l'écoulement de l'eau à travers les terrains perméables. L'étude de cette question a été faite par Dupuit, auquel j'emprunterai la plus grande partie de ce qui va suivre.

Considérons d'abord le mouvement en supposant une surface libre, comme celui d'une masse d'eau qui traverse un massif perméable, sans atteindre la partie supérieure de ce massif, et admettons que ce mouvement soit devenu permament. Nous pouvons y appliquer l'équation générale de ce mouvement sous la forme donnée par Prony :

$$\frac{\omega}{\chi} I = \alpha U + \beta U^2.$$

La vitesse moyenne U étant toujours très petite, on peut négliger le terme en U^2. D'autre part, le rayon moyen $\frac{\omega}{\chi}$ a, pour chaque nature de terrain perméable, une valeur déterminée qui dépend de la grandeur et de la forme des vides qui existent entre les différentes particules et par lesquels s'effectue l'écoulement. L'équation prend donc la forme :

(5) $$I = \mu U,$$

I désignant la pente superficielle et μ un coefficient numérique constant pour chaque nature de terrain. D'après Dupuit, ce coefficient μ vaut environ :

1266 dans du sable grossier,
5760 — fin.

Il varie donc entre les limites très étendues, et il doit, dans chaque cas particulier, être déterminé avec soin. Il a d'ailleurs une grande valeur, ce qui confirme ce que nous venons de dire dire sur la petitesse de la vitesse U.

Étudions maintenant une couche perméable, aquifère, reposant sur un terrain imperméable, et désignons par :
i l'inclinaison du fond,
q le débit par unité de largeur,
h la hauteur de la surface au-dessus du fond,
y la hauteur de la surface au-dessus de l'horizontale menée par l'origine de la couche imperméable ; $y = h - is$;
m le rapport du vide au plein dans le terrain perméable ; la grandeur du vide, dans une section verticale de hauteur h et de largeur égale à l'unité, sera mh, et la vitesse moyenne étant U, l'on aura :

(6) $$q = mhU.$$

Éliminant U entre les deux équations (5) et (6), il vient :

$$I = \frac{\mu}{m}\frac{q}{h} = \mu'\frac{q}{h},$$

en désignant par μ' un nouveau coefficient numérique.

Lorsque la pente est faible, la pente superficielle vaut à peu près $-\frac{dy}{ds}$ et l'on a, en tout cas, $dy = dh - ids$. On déduit donc de l'équation précédente dont on a éliminé d'abord I, puis y, la suivante :

$$ds = -\frac{hdh}{\mu' q + ih}$$

qui donne, en l'intégrant depuis l'origine $s=0$, où l'on suppose que la profondeur h était h_0 :

$$(7)\qquad s=\frac{h_0-h}{i}+\frac{\mu' q}{i^2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\mu' q+ih}{\mu' q+ih_0}\,;$$

ou bien, en développant le logarithme en série :

$$s=\frac{1}{2\mu' q}\left(h_0^2-h^2\right)-\frac{i}{3\mu'^2q^2}\left(h_0^3-h^3\right)+\frac{i^2}{4\mu'^3q^3}\left(h_0^4-h^4\right)\ldots.$$

Lorsque la pente du fond est assez faible pour que l'on puisse la négliger, c'est-à-dire si le terrain imperméable sur lequel repose la couche aquifère est sensiblement horizontal, on peut faire $i=0$, il reste simplement :

$$s=\frac{1}{2\mu' q}\left(h_0^2-h^2\right);$$

équation d'une parabole à axe horizontal. Telle est alors la forme de la surface libre de la couche aquifère. Si l'on représente par z la charge h_0-h, ou l'abaissement de la surface libre entre deux profils déterminés, on peut écrire l'équation précédente :

$$(8)\qquad q=\frac{1}{\mu'}\cdot\frac{z}{s}\cdot\frac{h+h_0}{2}.$$

Le débit est alors proportionnel à la charge z et inversement proportionnel à la longueur s du massif; il est donc proportionnel à la charge moyenne par unité de longueur et il est aussi proportionnel à $\frac{h+h_0}{2}$ ou à la profondeur moyenne de la couche aquifère. Il est facile de voir que cette formule est celle qui donnerait le débit d'un massif filtrant de même nature, de même épaisseur, mais traversé verticalement au lieu de l'être horizontalement. La formule (8) s'applique en effet à un massif tel que ABCD (fig. 83), reposant sur un fond horizontal imperméable BD et où la surface libre de la couche aquifère est la parabole EF à axe horizontal interceptant sur les deux ordonnées extrêmes, dis-

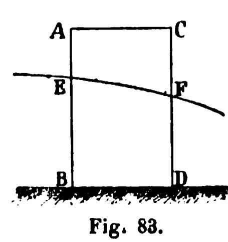


Fig. 83.

tantes de $BD = s$, les hauteurs $BE = h_0$, $DF = h$. Si, au lieu de cela, on considère un massif tel que MNPQ (fig. 84) compris entre deux parois MP, NQ imperméables, présentant une surface horizontale $MN = PQ = \frac{h+h_0}{2}$, égale à la section moyenne $\frac{h+h_0}{2}$, du premier et une hauteur $MP = NQ = BD$ égale à sa longueur s; si, en outre, la charge qui produira le mouvement dans ce second massif et qui sera la différence des niveaux HK et IL à l'intérieur et à l'extérieur des parois verticales, est égale à la charge $z = BE - FD$ dans le premier, ce second massif débitera le même volume que le premier dans l'unité de temps.

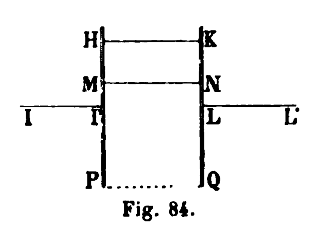


Fig. 84.

Enfin, si l'on appelle H la profondeur qui correspondrait au régime uniforme, dans lequel la pente superficielle I serait la même que la pente du fond i, c'est-à-dire si l'on pose :

$$Hi = \mu' q,$$

on peut éliminer μ' de l'équation (7) et l'écrire :

$$is = h_0 - h \pm H \operatorname{Log} \frac{H \pm h}{H \pm h_0},$$

en prenant le signe + lorsque i est positif et le signe — lorsqu'il est négatif. L'équation, mise sous cette forme, peut être discutée comme celle du mouvement varié des cours d'eau; mais cette discussion ne semble pas avoir, jusqu'ici, une grande utilité pratique.

Si, au lieu d'avoir sa surface libre, la couche aquifère est contenue entre deux couches imperméables, comme dans un tuyau de conduite qui serait rempli de sable ou de gravier, des équations analogues seront applicables. L désignant la longueur totale de cette conduite, H la différence de niveau des

réservoirs qu'elle réunit ou la perte de charge totale, sa section transversale, on pourra écrire comme ci-dessus, $\frac{H}{L}=\mu U$, $q=m\omega U=\frac{m}{\mu}\omega\frac{H}{l}=\frac{\omega}{\mu'}\cdot\frac{H}{L}$, en appelant encore m, μ et μ' des coefficients numériques dépendant de la nature du terrain perméable considéré.

156. Débit d'un puits ordinaire. — Un raisonnement analogue permet d'établir une relation entre le débit d'un puits ordinaire et le rayon de ce puits, supposé percé verticalement au milieu d'une couche aquifère et reposant sur la couche imperméable supposée horizontale.

Appelons R le rayon du puits, L le rayon du massif filtrant, h la hauteur de l'eau dans le puits lorsque l'on en extrait par seconde un débit régulier q, enfin H la même hauteur quand le puits est abandonné à lui-même et que l'eau s'y met en équilibre avec la couche environnante. Appelons encore x la distance d'un point quelconque du massif au centre du puits, y l'ordonnée de la surface liquide en ce point ; la pente superficielle est sensiblement égale à $\frac{dy}{dx}$ et, en appliquant l'équation générale (5), nous écrirons :

$$\frac{dy}{dx}=\mu U.$$

D'autre part, la surface filtrante du cylindre de rayon x est $2m\pi xy$, et, la vitesse de l'eau étant U, nous avons aussi :

$$q=2m\pi xyU.$$

Éliminant U et appelant encore μ' le rapport $\frac{\mu}{m}$, il vient :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mu' q}{2\pi}\cdot\frac{1}{xy}, \qquad \text{ou} \qquad ydy=\frac{\mu' q}{2\pi}\frac{dx}{x}.$$

Intégrant depuis $x=R$, où l'on a $y=h_0$, on trouve, pour l'é-

quation de la courbe superficielle :

$$y^2 - h_0^2 = \frac{\mu'}{\pi} q \cdot \text{Log} \frac{x}{R};$$

Si, au contraire, on intègre à partir de l'autre limite $x = L$, où l'on a $y = H$, on trouve :

$$y^2 - H^2 = \frac{\mu'}{\pi} q \cdot \text{Log} \frac{x}{L};$$

équation qui représente aussi la courbe superficielle. On en déduit facilement les trois équations suivantes :

$$\frac{y^2 - h_0}{H^2 - h_0^2} = \frac{\text{Log}\, x - \text{Log}\, R}{\text{Log}\, L - \text{Log}\, R}, \quad \frac{H^2 - y^2}{H^2 - h_0^2} = \frac{\text{Log}\, L - \text{Log}\, x}{\text{Log}\, L - \text{Log}\, R},$$

et

$$q = \frac{2\pi}{\mu'} \cdot \frac{H - h_0}{\text{Log}\, L - \text{Log}\, R} \cdot \frac{H + h_0}{2}.$$

Cette dernière montre que le débit q est proportionnel à la charge $H - h_0$, à l'épaisseur moyenne verticale $\frac{H + h_0}{2}$ de la couche, mais qu'il n'est plus inversement proportionnel à l'épaisseur moyenne horizontale $L - R$; il est inversement proportionnel au logarithme de $\frac{L}{R}$.

Si l'on considère, dans un même massif, deux puits de rayons différents R et R', les débits q et q', pour une même charge $H - h_0$, seront entre eux dans le rapport :

$$\frac{q}{q'} = \frac{1 - \text{Log} \frac{R'}{L}}{1 - \text{Log} \frac{R}{L}}.$$

Si R et R' sont petits par rapport à L, les deux débits q et q' différeront peu. Cela montre que le débit, tout en augmentant en même temps que le diamètre du puits, n'est proportionnel ni à sa surface ni à son périmètre. Il augmente bien moins rapidement que le diamètre.

Les calculs précédents supposent que le puits a été creusé jusqu'à la couche imperméable; s'il n'en était pas ainsi, le débit serait moindre, mais d'une quantité très faible. En effet, le terrain perméable laissé au fond du puits donnerait une issue à l'eau par le fond, et la diminution du débit ne correspondrait qu'à l'excès de perte de charge dû à la traversée de cette petite masse. Ce serait, en réalité, comme si l'on diminuait un peu le diamètre du puits, et nous venons de voir combien cette diminution a peu d'influence sur le débit[1].

§ 5.

JAUGEAGES

157. Détermination du débit d'un cours d'eau par la hauteur des eaux. — La détermination du débit d'un cours d'eau est toujours une opération difficile et délicate;

1. Dans une note de la page 404 de son très intéressant travail intitulé : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, 1885, M. Boussinesq a fait remarquer que les lois de la *diffusion* d'un corps (non gazeux) dans un dissolvant à température uniforme paraissent les mêmes que celles du mouvement de la chaleur par conductibilité dans les corps athermanes isotropes, au moins tant que le dissolvant se trouve encore assez loin de la saturation.

Ce mode de diffusion est celui auquel on arrive en assimilant le corps qui se diffuse à un fluide régi par la loi de Mariotte, qui filtrerait à travers un milieu perméable comme du sable, à la condition d'admettre que son coefficient de frottement intérieur fût proportionnel à sa densité, ce qui n'a pas lieu dans les gaz.

L'équation aux dérivées partielles qui régit les variations de la densité effective ρ de la matière diffusée (c'est-à-dire la masse qui se trouve effectivement par unité de volume dans le milieu perméable) est :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\,.$$

Je renvoie, pour l'intégration de cette équation, à l'ouvrage cité, où l'on trouvera une méthode remarquable d'intégration des équations différentielles de cette forme.

aussi, pour les grandes rivières, on se contente le plus souvent d'approximations, et l'on évalue simplement leur débit par une observation de la hauteur de leur niveau en adoptant, pour chacun des postes d'observations, une relation empirique entre la hauteur H lue à une certaine échelle et le débit Q correspondant. On admet alors, implicitement, que le débit est le même lorsque la profondeur est la même, ce qui, comme nous le verrons plus loin, n'est pas exact. Parmi ces relations empiriques, une des plus usitées est de la forme :

$$Q = A\,(H + C)^{\frac{3}{2}}, \tag{9}$$

A et C étant des coefficients numériques à déterminer en chaque point. Cette formule peut se justifier, dans une certaine mesure, par des considérations théoriques. Si l'on suppose que le mouvement du cours d'eau soit uniforme et si l'on appelle h sa profondeur, prise pour son rayon moyen, I sa pente et U sa vitesse moyenne, on pourra écrire :

$$hI = bU^2.$$

Si maintenant l'on prend pour le coefficient b la forme indiquée par Darcy, $b = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{h}\right)$, et si l'on appelle encore Q le débit total égal à lhU, on pourra donner, à l'équation précédente la forme :

$$hI = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{h}\right)\frac{Q^2}{l^2h^2}.$$

La largeur l du cours d'eau et le coefficient α sont des quantités constantes au point considéré, et l'on peut admettre, approximativement, qu'il en est de même de la pente I. Alors en posant $\frac{Il^2}{\alpha} = A^2$, on obtiendra :

$$Q^2 = A^2\,\frac{1}{1 + \frac{\beta}{h}}.$$

Si l'on suppose encore que β soit petit par rapport à h (ce qui ne peut être vrai que si h est assez grand, parce que, pour les parois en terre, par exemple, β est égal à 1,25), et si l'on peut négliger devant l'unité les puissances supérieures de $\frac{\beta}{h}$, on pourra écrire, approximativement :

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{h}} = \left(1+\frac{\beta}{h}\right)^{-1} = \left(1-\frac{\beta}{3h}\right)^{3};$$

et par suite :

$$Q = A\left(h-\frac{\beta}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La profondeur h ne diffère que par une constante de la hauteur H lue à une échelle fixe ; $h-\frac{\beta}{3}$ est donc la même chose que $H+C$, ce qui justifie la formule précédente. Elle a reçu de nombreuses applications ; par exemple, d'après M. Graëff, le débit de la Loire, au pont de Roanne, est lié à la hauteur lue à l'échelle de ce pont par la relation :

$$Q = 180\,(H+0{,}25)^{\frac{3}{2}};$$

d'après M. Cuvinot, le débit de la Seine au pont de Mantes est, de même, exprimé par :

$$Q = 95\,(H+0{,}70)^{\frac{3}{2}}.$$

D'autres formules ont également été employées. Ce sont ordinairement des formules dans lesquelles le débit est exprimé par plusieurs termes contenant les puissances croissantes de la profondeur, de la forme :

$$Q = A + BH + CH^2 + DH^3 + \ldots$$

Ainsi, d'après M. Fargue, le débit de la Garonne, à Langon, serait :

$$Q = 86{,}52 + 120{,}18H + 41{,}70H^2;$$

d'après M. du Boys, le débit du Rhône, à Valence :

$$Q = 325 + 365H + 40H^2 + 14H^3.$$

Mais la première de ces deux formules, surtout, pourrait être remplacée avec une exactitude suffisante par une expression de la forme (9).

L'illustre Lombardini a proposé, pour l'Adda, une formule analogue, dans laquelle la constante C est supprimée et la constante A remplacée par un terme variable en fonction de H. D'après lui, le débit de l'Adda à Côme serait lié à la hauteur H lue à l'échelle du pont de cette ville par la relation :

$$Q = 100\,H^{\frac{3}{2}}(1 - 0{,}032\,H) = (100 - 3{,}20\,H)\,H^{\frac{3}{2}}.$$

Ces formules, ou d'autres analogues, ne sont applicables qu'au point pour lequel on a déterminé les valeurs numériques des coefficients, et cette détermination suppose une autre méthode de mesurage du débit.

158. Détermination du débit au moyen de profils en travers. — On indique quelquefois, pour arriver à ce but, une méthode basée sur l'application de la formule du mouvement permanent, mise sous la forme :

$$dz = \frac{\alpha U dU}{g} + \frac{\chi}{\omega} b U^2 ds.$$

Appliquée à une étendue finie L, elle donne, en appelant U_0, U_n les vitesses aux deux extrémités de cette longueur, z_0 et z_n les altitudes de la surface libre :

$$z_0 - z_n = \alpha \frac{U_n^2 - U_0^2}{2g} + \int_0^L \frac{\chi}{\omega} b U^2 ds.$$

Remplaçons-y U par le quotient du débit constant Q par la section transversale ω, dont les valeurs aux extrémités seront aussi ω_0, ω_n, il viendra :

$$z_0 - z_n = \alpha \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) + Q^2 \int_0^L \frac{\chi}{\omega^3} b\,ds$$

L'intégrale du dernier terme peut être calculée approximativement par une formule de quadrature, en supposant que l'on ait mesuré, dans l'étendue de la longueur L, un certain nombre de profits transversaux pour lesquels on aura déterminé exactement les valeurs de χ, de ω et même de b qui varie avec le rayon moyen. Si l'on a partagé, par exemple, la distance L en un nombre pair n de parties égales, on pourra calculer l'intégrale par la formule de Simpson ou par celle, plus simple, du général Parmentier. Si l'on représente par y_0, y_1....., y_n, les valeurs de la quantité $\left[b\,\frac{\chi}{\omega_3}\right]$ dans les profits 0, 1....., n, l'intégrale $\int_0^L b\,\frac{\chi}{\omega^3}\,ds$, aura pour valeur approchée :

$$\int_0^L b\,\frac{\chi}{\omega^3}\,ds = \frac{L}{n}\left[2\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{y_0+y_n}{6} - \frac{y_1+y_{n-1}}{6}\right];$$

la première parenthèse ne comprenant que les valeurs affectées d'indices impairs.

Cette intégrale étant ainsi calculée, et sa valeur portée dans l'équation ci-dessus, celle-ci donnera immédiatement la valeur du débit Q lorsque l'on aura mesuré la pente superficielle totale $z_0 - z^n$ entre les deux profils extrêmes.

Cette méthode n'a été, à ma connaissance, que peu employée ; elle paraît n'avoir pas toujours fourni des résultats exacts [1].

159. Jaugeage par déversoir. — Lorsqu'il s'agit de petits cours d'eau que l'on peut barrer complètement, on arrive facilement à en connaître le débit au moyen d'un déversoir.

En tout cas, et quel que soit le procédé employé, comme l'opération du jaugeage exige un certain temps, le résultat ne peut avoir de sens que si le débit est resté constant pendant toute la durée de l'opération, il faut donc choisir un moment où le régime soit bien permanent, et, s'il est possible, une région où le mouvement soit à peu près uniforme.

1. Voir Graëff, *Traité d'hydraulique*, tome II, page 142.

Lorsque l'on établit un déversoir en travers d'un cours d'eau en vue de le jauger, il faut s'assurer avec le plus grand soin que l'eau ne peut pas passer au-dessous du déversoir, ce qui fausserait singulièrement les résultats. Cela fait, le seuil du déversoir étant réglé exactement suivant une ligne horizontale, il suffira de placer, un peu en amont, à une distance au moins égale à cinq ou six fois l'épaisseur de la lame déversante, une échelle graduée dont le zéro soit au niveau de cette ligne pour avoir, par une simple lecture, la hauteur h de la lame déversante et pouvoir calculer le débit par la formule spéciale du déversoir (n° 51) ou par la table n° II donnée à la fin de ce volume.

Il sera toujours utile, en même temps que l'on observera la hauteur à l'échelle au-dessus du déversoir, de l'observer aussi à une autre échelle fixe, placée en aval et assez loin pour que la perturbation produite dans le régime par l'établissement du barrage ait disparu. Si l'on a fait cette lecture un certain nombre de fois, dans des conditions différentes du cours d'eau, et en particulier au moment des eaux très abondantes, ainsi qu'en étiage, on pourra se servir de ces observations simultanées pour relier le débit Q du cours d'eau à la hauteur H lue à cette seconde échelle, au moyen d'une formule empirique de la forme :

$$Q = A\,(H + C)^{\frac{3}{2}}$$

dont on déterminera les constantes A et C par la méthode des moindres carrés, ou autrement ; et l'on pourra ainsi, à l'avenir, par une simple lecture à cette échelle, connaître le débit du cours d'eau.

163. Jaugeage des grands cours d'eau. — Mais ce procédé de jaugeage par déversoir n'est applicable, en général, qu'à de très petits cours d'eau. Lorsqu'il s'agit de cours d'eau importants, il n'y a pas d'autre moyen d'en connaître le débit que de mesurer la vitesse de l'eau. Et l'on peut dire,

alors, que la précision du résultat est en raison du nombre des points où l'on a mesuré cette vitesse, dans une même section transversale.

Les appareils servant à mesurer la vitesse de l'eau dans les cours d'eau sont de deux sortes : les flotteurs et les hydromètres. Nous parlerons d'abord des premiers.

161. Flotteurs. — Les flotteurs peuvent être disposés de manière à donner la vitesse superficielle de l'eau, ou bien la vitesse moyenne de l'eau sur une verticale, ou bien encore la vitesse d'un des filets non superficiels situé à une profondeur donnée.

Quel que soit le système de flotteur que l'on adopte, la vitesse se déduit du temps nécessaire au parcours d'une longueur déterminée. Il est ici de la plus grande importance de choisir, pour faire les observations, une portion de cours d'eau aussi régulière que possible, bien rectiligne et où le mouvement puisse être considéré comme uniforme. Il est, en outre, nécessaire de faire les observations par un temps calme, car, le moindre vent modifie la vitesse des flotteurs dans une proportion qui est rarement négligeable.

L'emplacement des observations étant choisi, on tend, au travers du cours d'eau, et aussi près que possible au-dessus de sa surface, deux cordes allant d'une rive à l'autre, dans une direction bien perpendiculaire à celle du courant et à une distance déterminée l'une de l'autre ; cette distance doit être la plus grande possible, il est bon qu'elle ne soit pas inférieure à 50 mètres et souvent on la prend de 100 mètres ou d'un multiple de 100 mètres.

Le flotteur, quelle que soit sa forme, placé dans le courant, commence par avoir une vitesse inférieure à celle des filets qui l'entourent. Sa marche s'accélère peu à peu et sa vitesse augmente jusqu'à ce que la résistance qu'il rencontre au-devant de lui égale les pressions qu'il subit en arrière, diminuées du frottement qu'il exerce sur les filets qui vont moins

vite que lui. La vitesse qu'il acquiert, lorsque son mouvement est devenu uniforme, est sensiblement la même que la moyenne de celles des filets liquides dont il tient la place, et la différence est d'autant plus faible que ses dimensions horizontales sont plus petites. Il faut donc choisir des flotteurs très petits. L'espace nécessaire pour que le flotteur ait acquis une vitesse uniforme est d'environ 15 à 20 mètres. D'une barque amarrée à 20 ou 25 mètres en amont de la première corde on laissera donc tomber dans l'eau le flotteur sur le filet dont on voudra mesurer la vitesse : exactement sur ce filet lorsqu'il sera au milieu de la largeur ; un peu plus près de la rive lorsqu'il s'agira d'un filet qui ne sera pas au milieu, afin de tenir compte, dans une certaine mesure, de l'effet d'entraînement, vers le milieu, que subira le flotteur dans sa course. Alors, un observateur, muni d'un chronomètre, se plaçant sur une rive exactement dans le plan vertical qui contient l'une des cordes, note l'instant où le flotteur passe au-dessous de la corde, puis se transportant en face de l'autre corde, fait une observation analogue, ce qui lui fait connaître le nombre de secondes employées par le flotteur pour parcourir la distance connue des deux cordes. Au lieu d'un seul observateur, parcourant la rive d'une corde à l'autre en même temps que le flotteur, ce qui devient d'ailleurs impraticable lorsque la vitesse atteint un mètre par seconde, on peut, lorsque l'on veut faire un grand nombre d'observations, placer un observateur en face de chaque corde ; l'un d'eux est muni du chronomètre, note le passage du flotteur en face de sa corde et note ensuite l'apparition d'un signal convenu que lui montre le second, lorsque le flotteur passe à la seconde corde. Une autre barque, placée à quelques mètres en aval de la seconde corde, recueille les flotteurs, lorsqu'ils doivent servir de nouveau, et, dans tous les cas, s'assure que le flotteur a suivi la direction du filet dont il avait pour but de mesurer la vitesse ou du moins ne s'en est pas trop écarté. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, l'on doit annuler l'observation et la recommencer. Pour faire facilement

cette vérification, on marque, sur chaque corde, des points de division qui se correspondent et qui partagent la largeur de la rivière en un certain nombre de parties égales, dans chacune desquelles doit rester le flotteur en passant d'une corde à l'autre. Lorsque l'on n'a pas de chronomètre, M. Graëff indique la possibilité de s'en passer en confectionnant sur place un pendule de 0 m. 994 de longueur, battant la seconde, au moyen d'une pierre attachée à l'extrémité d'une ficelle. Ce procédé expéditif peut suffire pour des reconnaissances sommaires ; son exactitude dépend du soin qui a été apporté à son emploi.

Quelle que soit la forme du flotteur adopté, il faut, comme on a dit, qu'il soit de petites dimensions horizontales. Il faut aussi, toujours, qu'il ne fasse pas au-dessus du niveau de l'eau une saillie prononcée, qui ferait intervenir dans son mouvement la résistance de l'air ou l'action du vent.

Pour des flotteurs superficiels, Boileau s'est servi, en 1845, de pains à cacheter. On emploie quelquefois de petites rondelles de liège, provenant simplement de bouchons de bouteilles coupés en tranches minces. On est souvent obligé, pour les rendre visibles de la rive, de les colorer en blanc ou en rouge.

162. Bâtons lestés. — Pour déterminer la vitesse moyenne sur une verticale, on se sert de tiges ou bâtons lestés. C'est un moyen très rapide et suffisamment exact d'arriver au but. Le flotteur est alors formé d'un bâton bien droit, en bois verni, à la partie inférieure duquel s'adapte un petit cylindre creux où l'on place des rondelles de plomb en nombre suffisant pour que le bâton, se tenant verticalement dans l'eau, n'émerge que d'une très petite quantité. En raison de la masse du flotteur et de la grandeur des efforts qui lui sont imprimés par le liquide, l'influence de la résistance de l'air est bien moins à craindre que pour les flotteurs superficiels ; on peut donc, sans inconvénient, le laisser dépasser légèrement la surface libre du liquide, ou planter sur sa face supérieure un petit signal qui le rende bien visible.

Un pareil bâton, plongé verticalement dans un liquide en mouvement, y rencontre des filets animés de vitesses différentes et, sous leur action, il prend une vitesse moyenne intermédiaire entre elles. Si l'on désigne par l la longueur de la tige supposée verticale, par v' sa vitesse, par v la vitesse d'un filet quelconque situé à une profondeur z et enfin par h la profondeur du filet qui a la même vitesse v' que la tige, les filets situés plus haut ont une vitesse $v > v'$, leur vitesse relative par rapport à la tige est $v - v'$ et, si l'on admet que la pression du liquide soit proportionnelle au carré de cette vitesse relative, la force accélératrice totale sera, en appelant μ un certain coefficient numérique : $\int_0^h \mu\,(v-v')^2\,dz$. De même, les filets à une profondeur supérieure à h dont la vitesse v est inférieure à v' produiront, sur la tige, une force retardatrice $\int_h^l \mu\,(v'-v)^2\,dz$. Si le mouvement de la tige est uniforme, ces deux intégrales doivent être égales. On a ainsi :

$$\int_0^h \mu\,(v - v')^2\,dz = \int_h^l \mu\,(v' - v)^2\,dz.$$

Le facteur constant μ, commun aux deux termes, peut être supprimé. Si l'on met ensuite, pour v, une expression de la forme : $v = v_0 + az - bz^2$,
qui donne : $v' = v_0 + ah - bh^2$,
la différence $v - v'$ sera :

$$v - v' = a(z - h) - b\,(z^2 - h^2).$$

Substituant et effectuant les intégrations, il vient une équation du 5e degré en h, d'où l'on tire, en moyenne, en mettant pour a et b les valeurs les plus ordinaires :

$$h = 0{,}61\ l.$$

Cela veut dire que la tige prend à peu près la vitesse du filet qui la rencontre aux $\frac{3}{5}$ de sa profondeur. On peut, par le même

moyen, comparer la vitesse v' de la tige, à la vitesse moyenne u sur la verticale dans la profondeur l, vitesse qui a pour expression $u=\frac{1}{l}\int_0^l vdz$. On trouve ainsi que la vitesse de la tige est inférieure à cette vitesse moyenne ; par conséquent, la vitesse prise par la tige, plus faible que la vitesse moyenne des filets qui la rencontrent, peut être considérée comme étant égale à la vitesse moyenne sur une profondeur un peu plus grande que sa longueur. En faisant le calcul avec les valeurs les plus ordinaires des coefficients numériques a et b, on constate que, pour avoir la vitesse moyenne sur toute un verticale, depuis la surface jusqu'au fond, il faut donner à la tige lestée une longueur égale à environ 0,94 de la profondeur du cours d'eau [1].

168. Doubles flotteurs. — Pour mesurer la vitesse en un point situé à une certaine profondeur au-dessous de la surface libre, on emploie quelquefois un double flotteur. C'est un instrument dont l'idée remonte à Léonard de Vinci et qui a été employé par Mariotte (1684). Il se compose de deux corps solides, réunis par un cordeau ou fil. L'un de ces corps qui seul est à proprement parler un flotteur doit rester à la surface de l'eau, l'autre, plus lourd que l'eau, soutenu par le premier et par le cordeau, doit rester à la profondeur marquée par la longueur du fil. Si les dimensions de ce dernier corps sont grandes par rapport à celles du reste de l'appareil, la vitesse prise par l'ensemble du système, et que l'on peut mesurer en observant le flotteur supérieur, se rapprochera de la vitesse moyenne des filets que rencontre ce corps inférieur.

Les conditions que doivent remplir les doubles flotteurs pour donner des indications à peu près exactes sont nombreuses et difficiles à réaliser.

Le corps inférieur doit être d'un volume relativement grand par rapport aux autres parties, mais cependant assez petit pour que la vitesse du courant soit sensiblement la même dans

1. Voir *Annales des Ponts et chaussées*, 1882, 2e semestre, pages 69 et suiv.

toute son étendue ; il doit avoir un poids spécifique suffisant pour s'enfoncer rapidement, tendre le fil, et se maintenir à une profondeur constante malgré les tourbillons ou courants qui tendraient à le faire remonter ; le flotteur superficiel doit être le plus petit possible pour que son volume soit négligeable par rapport à celui du corps inférieur, il doit cependant avoir une flottaison suffisante pour maintenir ce dernier en équilibre. Le fil doit être assez menu pour que l'action du courant sur lui soit négligeable et assez solide pour porter le corps inférieur dans l'air. Ces conditions, dont quelques-unes paraissent incompatibles, sont rarement satisfaites ; aussi les doubles flotteurs, dont l'usage s'explique par la facilité et la promptitude avec lesquelles on peut les établir et les observer, ne donnent-ils que des résultats fort sujets à caution, surtout lorsque la vitesse et la profondeur sont grandes. Les causes d'erreur, qui croissent avec la profondeur, peuvent enlever toute valeur aux observations faites par ce procédé expéditif. En effet, lorsque la profondeur est grande, le fil, si menu qu'il soit, n'est plus négligeable, et la vitesse réellement prise par l'ensemble est beaucoup plus grande que celle du filet où se trouve son extrémité inférieure. Le corps inférieur est, en outre, déplacé verticalement par les tourbillonnements et il se trouve porté dans les couches supérieures où la vitesse est plus rapide. Les vitesses observées devraient donc être réduites dans une proportion difficile à déterminer, mais qui peut être très grande [1].

164. Hydromètres. Tube de Pitot. — La vitesse des filets liquides placés à une certaine profondeur se détermine plus exactement au moyen des hydromètres. Ces appareils sont de deux sortes suivant que la vitesse de l'eau est mesurée par l'intermédiaire d'un équilibre statique ou d'un équilibre dynamique. Dans les premiers, on mesure la pression produite par la vitesse de l'eau sur une surface fixe donnée ; dans les

1. Notice sur l'emploi des doubles flotteurs, par M. Bazin. *Annales des Ponts et chaussées*, 1884, 1er semestre, page 554.

seconds on mesure la vitesse imprimée par l'eau à des organes mobiles. Les appareils les plus usités du premier type sont les tubes jaugeurs, ceux du second les moulinets.

L'idée des tubes jaugeurs paraît due à Pitot. Il a remarqué en 1732, que si l'on plonge dans un courant un tube vertical AB (fig. 85) recourbé à son extrémité, ouvert aux deux bouts de manière à diriger son extrémité inférieure à l'encontre du courant, l'eau s'élève dans ce tube à une hauteur $ab = h_1$ qui dépend de la vitesse u du filet liquide correspondant à l'orifice B. Pitot supposait, entre ces deux quantités, la relation $u^2 = 2gh_1$, mais cela n'est pas tout à fait exact, parce que la colonne liquide $ab = h_1$ qui mesure l'excès de la pression au point B sur la pression hydrostatique ne serait rigoureusement celle qui est due à la vitesse u du liquide en ce point que si les filets avaient des trajectoires rectilignes et parallèles. La présence du tube, dont les dimensions ne sont jamais négligeables, a pour effet d'obliger les filets liquides à se courber. La pression se trouve modifiée : elle augmente du côté convexe et diminue du côté concave par suite de l'accélération normale qui intervient alors dans son expression. On rend évident cet effet de la courbure des filets en plongeant dans le courant un tube vertical CD, non recourbé, ou bien un tube recourbé comme AB, mais disposé de manière que la branche inférieure soit dirigée transversalement ou perpendiculairement au courant. Dans les deux cas, la présence du tube oblige les filets à se courber en tournant leur concavité vers son orifice ; il s'y produit donc une diminution de pression qui se manifeste par un abaissement $cd = h_2$: le niveau dans le tube se tient au-dessous de la surface libre. De même, si l'on place le tube recourbé dans la position EF, la dépression $ef = h_3$ est encore plus accentuée. On comprend d'ailleurs

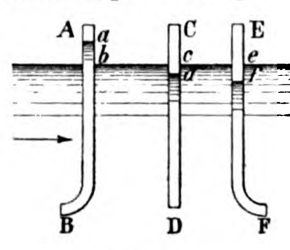


Fig. 85.

que si aucune de ces petites hauteurs, h_1, h_2 ou h_3 n'est celle qui est *due* à la vitesse u, elles doivent vraisemblablement présenter avec la quantité $\frac{u^2}{2g}$ un rapport constant dont la grandeur dépend des dimensions et de la forme de l'appareil. On pourra donc, en appelant m_1, m_2, m_3 des coefficients numériques à déterminer pour chaque tube, écrire :

$$\frac{u^2}{2g} = m_1 h_1 = m_2 h_2 = m_3 h_3,$$

et la mesure de l'une de ces hauteurs, en supposant connu le coefficient m correspondant, donnera la vitesse du filet rencontré par l'extrémité inférieure du tube.

La lecture de ces petites hauteurs est très difficile : la surface libre d'un liquide en mouvement est bien rarement immobile aussitôt que les vitesses cessent d'être très faibles ; il s'y produit constamment de petites ondulations, des rides, provenant le plus souvent de composantes obliques des vitesses des filets inférieurs, de petits tourbillons à axe horizontal, de l'effet du vent, etc. Les variations qui se produisent dans le niveau de cette surface autour du tube sont souvent du même ordre de grandeur que les hauteurs h à mesurer, de sorte que l'on ne peut obtenir de celles-ci qu'une valeur assez peu approchée.

165. Tube de Darcy. — Darcy a perfectionné d'une façon très heureuse le tube de Pitot en réunissant, sur un même appareil, les deux tubes AB, EF de la figure précédente et en les munissant de robinets qui permettent de faire les lectures beaucoup plus facilement. Voici comment : Les deux tubes AB, EF (fig. 86) peuvent être fermés simultanément au moyen d'un même robinet R placé vers leur partie inférieure. Ils sont en outre réunis par le haut, et sur la partie supérieure commune est placé un autre robinet S permettant d'établir ou d'inter-

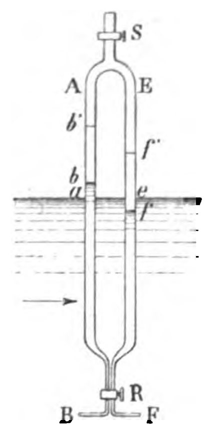


Fig. 86.

cepter la communication de cette partie supérieure avec l'atmosphère. Les deux parties inférieures recourbées, terminées en B et en F, étant dans le prolongement l'une de l'autre, on descend l'appareil dans le courant de manière que la direction BF soit parallèle à celle de l'écoulement : le robinet R étant ouvert, les deux tubes fonctionnent comme nous venons de le dire ; le niveau monte dans le premier, d'une certaine hauteur $ab = h_1$, et s'abaisse, dans le second, de $ef = h_2$. Que l'on ferme le robinet R et l'on pourra retirer l'instrument de l'eau et lire avec toute la précision possible la différence de niveau dans les deux tubes ; ce sera, avec nos notations, $h_1 + h_2$. Au lieu d'opérer ainsi, on peut encore, sans retirer de l'eau l'appareil, ouvrir le robinet S, aspirer avec la bouche l'air qui se trouve au-dessus des niveaux b, f ; ces deux niveaux s'élèveront d'une même quantité, arriveront en b', f', et l'on pourra les amener tous deux assez haut au-dessus du niveau du courant pour que la lecture de leur différence puisse se faire facilement. Une échelle graduée se trouve placée, dans ce but, entre les deux tubes.

Lorsque l'on opère avec le tube de Pitot, l'équilibre ne s'établit, qu'après un grand nombre d'oscillations. C'est afin de les réduire que Darcy a donné un très faible diamètre (0^m0015) à la partie inférieure et recourbée des tubes, tandis que dans la partie atteinte par les niveaux, le diamètre est beaucoup plus grand (0^m01).

La hauteur $h_1 + h_2$ étant ainsi mesurée et désignée simplement par h, les équations précédentes la relient à la vitesse u par l'expression :

$$h = h_1 + h_2 = \frac{u^2}{2g}\left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right],$$

qui peut prendre la forme :

$$u = K\sqrt{2gh},$$

K étant un coefficient numérique $= \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}}$ qui dépend comme m_1 et m_3 de la forme et des dimensions de l'appareil et qui, une fois déterminé pour chaque instrument, donnera la vitesse u correspondant à une hauteur h.

Pour déterminer ce coefficient K on fait mouvoir l'instrument en ligne droite dans une eau tranquille avec une vitesse constante connue u et l'on observe la valeur correspondante de h. On répète bien entendu cette opération un assez grand nombre de fois, avec des vitesses différentes, afin d'avoir pour K la valeur la plus exacte possible [1].

Comme autre hydromètre statique, nous mentionnerons simplement le tachomètre de Brunings et une balance de torsion due à M. de Perrodil ; ces appareils ne paraissent pas avoir été l'objet d'applications nombreuses.

M. Ritter a donné, dans les Annales des ponts et chaussées de 1886, 2e semestre, page 697, la description d'un appareil nouveau dérivant du tube de Pitot, qui a surtout pour objet la mesure des vitesses superficielles. Cet instrument n'a pas été jusqu'ici, assez employé pour que l'on puisse se prononcer sur sa valeur.

Le tube de Pitot ou de Darcy ne peut pas être facilement employé dans les grandes profondeurs, ni lorsque les vitesses sont trop faibles. On se sert alors du moulinet de Woltmann.

166. Moulinet de Woltmann. — Le moulinet de Woltmann se compose essentiellement d'un axe horizontal AB (fig. 87), portant à son extrémité deux ou quatre ailettes CC disposées obliquement sur sa direction. Cet appareil est monté sur une tige verticale MN que l'on fait reposer sur le fond du lit du courant ; l'axe AB peut se déplacer à volonté de manière à pouvoir être mis à une hauteur quelconque au-dessus du fond.

1. On pourra utilement consulter à ce sujet un article de Darcy, dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1858, 1er semestre, page 354, et le traité de M. Bazin sur les eaux courantes, pages 44 à 51 et 63 à 70.

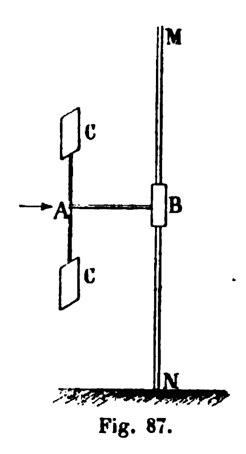


Fig. 87.

Si on le dirige dans le sens du courant, les filets liquides rencontrant les palettes C leur imprimeront une vitesse proportionnelle à la leur, si l'on fait abstraction du frottement, ou un peu moindre en tenant compte de cette résistance. Il suffira de mesurer la vitesse de rotation de l'axe AB pour, en la multipliant par un coefficient numérique spécial, en déduire la vitesse moyenne des filets qui rencontrent les ailettes que l'on regarde comme étant celle du filet qui rencontre l'axe.

La vitesse de l'axe AB se mesure par l'observation du nombre n de tours qu'il fait dans un temps déterminé, une seconde par exemple. L'observation porte, bien entendu, sur un temps assez long et l'on divise le nombre total de tours par celui des secondes. Dans l'appareil de Woltmann, l'axe AB porte une vis sans fin qui peut engrener avec une roue dentée servant de compteur de tours; un enclenchement spécial, manœuvré du haut au moyen d'une corde, permet de produire l'engrènement de la roue dentée ou de la rendre indépendante de la vis. On doit, pour chaque lecture, retirer de l'eau l'instrument. Cette obligation, ainsi que celle de maintenir la corde bien tendue pendant toute la durée de chaque opération, rend la manœuvre de l'instrument assez incommode; en outre, le frottement des engrenages a pour conséquence de fausser les résultats.

167. Perfectionnement apporté par M. Harlacher. — M. Harlacher, professeur à l'école polytechnique de Prague, a eu l'idée de supprimer tous ces engrenages et de compter les tours de l'axe par l'intervention d'un courant électrique. A chaque tour un contact se produit, un courant passe et vient au dehors, se manifester soit par une marque inscrite, comme dans l'appareil télégraphique de Morse, sur une bande de papier qui se déroule, soit en laissant avancer d'une dent la roue

d'un compteur de tours. Les lectures peuvent ainsi se faire à tout moment, à l'air, sans que l'on ait besoin de déplacer l'appareil, et presque tous les frottements se trouvent supprimés. Grâce à ce perfectionnement, le moulinet est devenu beaucoup plus commode et plus exact.

La relation entre la vitesse moyenne u des filets rencontrés par l'appareil et le nombre n de tours par seconde est de la forme :

$$u = An + B,$$

A et B étant des coefficients numériques spéciaux à chaque instrument et à déterminer par un tarage. On opère, comme pour le tube jaugeur, en imprimant au moulinet une vitesse horizontale connue dans une eau en repos. M. Harlacher se servait, pour cela, d'un wagon roulant sur des rails établis sur pilotis au milieu d'une pièce d'eau et au-dessous duquel était suspendu l'instrument. Il a constaté qu'en général le coefficient B est petit par rapport à A et que l'on ne commet pas une erreur appréciable, surtout si le nombre n de tours est un peu grand, en bornant la formule à son premier terme : $u = An$. Baumgarten tarait le moulinet de Woltmann en l'attachant à l'extrémité d'une longue perche horizontale dont l'autre extrémité était maintenue fixe sur un axe vertical. Le moulinet décrivait ainsi, dans l'eau en repos, une grande circonférence.

168. Calcul du débit au moyen des vitesses mesurées. — Au moyen de l'un des appareils qui viennent d'être décrits, on pourra donc toujours mesurer la vitesse en un point quelconque de la section transversale du cours d'eau ; il faudra ensuite en déduire le débit, et cette dernière opération sera, comme il a été dit, d'autant plus exacte que la vitesse aura été mesurée en un plus grand nombre de points convenablement choisis.

On peut, pour un jaugeage approximatif, se contenter de mesurer la vitesse V au milieu de la surface libre, qui diffère peu

de la vitesse maximum. On calcule alors la vitesse moyenne U par une formule empirique, celle de Prony par exemple (n° 107), ou bien tout simplement en prenant $U = 0,80$ V, ou $= 0,85$V, ou même $= 0,90$V. Le coefficient à adopter, compris entre 0,80 et 0,90, doit être d'autant plus petit que le fond du cours d'eau est plus irrégulier et que le cours d'eau est plus étroit. C'est donc pour les cours d'eau très larges et à fond très uni que l'on prendrait $U = 0,90$V. La vitesse moyenne U ainsi calculée se multiplie par l'aire de la section transversale moyenne relevée dans l'étendue dans laquelle les observations ont été faites, si la vitesse V a été mesurée au moyen d'un flotteur. Il faut alors, comme on l'a dit, que la portion de cours d'eau observée ait une forme aussi régulière que possible, mais il n'en existe pas moins quelques différences entre les surfaces des diverses sections transversales. On en relève un nombre suffisant, on en calcule les aires et on prend la moyenne.

On obtient un résultat plus exact en mesurant les vitesses superficielles en un certain nombre de points équidistants de la ligne d'eau. On divise alors l'aire de la section transversale par des verticales équidistantes en un même nombre de parties au milieu desquelles on a mesuré la vitesse superficielle. On ne se trompe généralement pas beaucoup en admettant que la vitesse moyenne sur la verticale menée au-dessous du point où elle a été mesurée est de 0,84 à 0,85 de la vitesse superficielle, et en appliquant la vitesse moyenne ainsi calculée à l'élément d'aire limité par les deux verticales voisines.

Le résultat est encore plus exact si, au lieu de se contenter de mesurer les vitesses superficielles, on mesure directement, au moyen de bâtons lestés ayant une longueur d'environ 0,92 à 0,94 de la profondeur, la vitesse moyenne sur chaque verticale. Les vitesses prises par ces bâtons lestés et observées directement, remplacent celles que l'on calculerait, comme il vient d'être dit, en se servant de l'observation de vitesses superficielles. En mesurant simplement, au moyen d'un bâton

lesté, la vitesse moyenne sur la verticale du milieu du courant, on peut la prendre à très peu près pour la vitesse moyenne U dans toute la section lorsque celle-ci est très large. Pour les cours d'eau de dimension restreinte, on la multipliera par un coefficient de réduction qui ne devra pas être inférieur à 0,90, si la section transversale ne présente pas d'irrégularités trop prononcées et si elle se rapproche de la forme d'un segment de cercle ou d'un trapèze.

Enfin, lorsque l'on voudra avoir un jaugeage exact, il sera nécessaire de mesurer, au moulinet ou au tube jaugeur, les vitesses en un grand nombre de points d'une section transversale bien régulière; ces points seront en général équidistants, dans le sens horizontal et dans le sens vertical; ils se trouveront, par conséquent, aux sommets de rectangles juxtaposés. Les médianes de tous ces rectangles diviseront la section transversale en d'autres rectangles qui, sur les bords, deviendront des triangles ou des trapèzes, et à l'aire de chacun de ces éléments de la section on appliquera la vitesse mesurée au point central correspondant. La somme de tous les produits donnera le débit du cours d'eau.

Cette opération du jaugeage est, comme on voit, assez longue, et il est nécessaire que pendant toute sa durée, le régime du cours d'eau reste permanent. Cette condition est souvent difficile à réaliser, et c'est une des raisons pour lesquelles on se contente souvent d'opérations un peu moins exactes, mais plus rapides.

169. Méthode de calcul de M. Harlacher. — M. Harlacher a indiqué, pour calculer le débit d'un cours d'eau, lorsque l'on a mesuré les vitesses en un grand nombre de points d'une section transversale, une méthode basée sur l'emploi des appareils planimétriques et qu'il est intéressant de connaître[1]. Supposons qu'en chaque point de la section transver-

1. *Die Messungen in der Elbe und Donau, und die hydrometrischen Apparate und Methoden des Verfassers*, Leipzig, 1881.

sale considérée nous portions, sur la normale au plan de cette section, une longueur égale à la vitesse en ce point ; les extrémités de ces lignes constitueront une surface courbe et le débit Q sera égal au volume compris entre : 1° le plan de la section transversale ; 2° la surface libre du cours d'eau ; 3° les parois et le fond du lit ; 4° la surface courbe ainsi tracée. Le calcul du débit revient donc à la mesure de ce volume. Décomposons-le en tranches par des plans équidistants, parallèles à celui de la section transversale ; la surface courbe dont il vient d'être parlé sera coupée, par ces plans, suivant des lignes d'égale vitesse dont nous supposerons les projections tracées sur le plan de la section. Le volume total sera la somme d'une série de disques trapézoïdaux ayant pour bases successives ces courbes d'égale vitesse. Si donc, pour chacun de ces disques, on mesure, au planimètre, la surface des deux bases verticales qui le limitent, le volume du disque sera égal à la demi-somme de ces deux surfaces multipliée par l'équidistance des plans verticaux de division, et la somme des volumes sera le débit cherché.

Lorsque l'on connaît la vitesse moyenne sur un grand nombre de verticales parallèles, soit qu'on les ait déterminées au moyen de bâtons lestés ou par l'observation d'une ou de plusieurs vitesses sur chaque verticale, comme il a été dit, le calcul du débit se réduit à une simple quadrature et peut s'effectuer au planimètre de la manière suivante. Soit ABC (fig. 88) la section transversale considérée. Si v est la vitesse moyenne sur une verticale quelconque KL dont la profondeur KL soit appelée z et la distance AK, à l'origine du profil, désignée par y, le débit Q sera exprimé par

$$Q = \int vzdy,$$

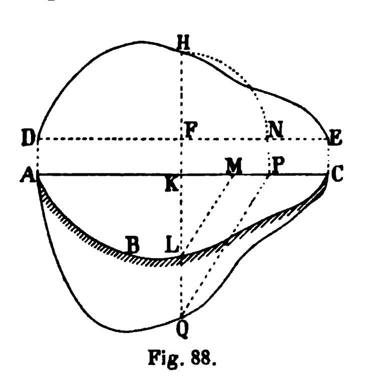


Fig. 88.

l'intégrale étant prise dans toute l'étendue de la section. Sur une

horizontale DE égale à la largeur de la surface libre, menons en chaque point, tel que F, une verticale FH égale à la vitesse moyenne v sur la verticale correspondante KL de la section transversale, le lieu des sommets H de ces ordonnées, ou la courbe DHE sera la courbe des vitesses moyennes sur les verticales, supposée connue. Du point F comme centre avec FH pour rayon, décrivons un quart de circonférence HN, ou simplement prenons sur l'horizontale DE la longueur FN = FH, et projetons le point N en P sur la ligne AC représentant la surface libre. A partir du point K, prenons KM égale à une longueur constante arbitraire a, qui sera ou l'unité de longueur ou une fraction simple de cette unité, joignons ML, et par le point P menons PQ parallèle à ML jusqu'à sa rencontre en Q avec la verticale KL prolongée au besoin; la longueur KQ sera égale à $KL \times \frac{KP}{KM}$ ou, puisque KP = FH, nous aurons $KQ = \frac{vz}{a}$. Le débit Q sera ainsi exprimé par $Q = a\int KQ.dy$. Le lieu des points Q sera une courbe AQC, que l'on tracera par points, et dont la surface AQC, mesurée au planimètre, donnera la valeur de l'intégrale qu'il suffira de multiplier par a pour obtenir le débit cherché Q.

Cette méthode consiste simplement, comme on le voit, à substituer le calcul d'une surface à celui d'un volume en effectuant graphiquement le produit des deux dimensions de chacune de ses sections rectangulaires.

170. Précautions générales à prendre dans les opérations de jaugeage. — On ne saurait trop insister sur la nécessité, lorsque l'on veut calculer la vitesse moyenne par l'observation de flotteurs superficiels, de choisir une portion de cours d'eau bien régulière dans sa forme longitudinale et transversale. C'est à cette seule condition que les rapports entre la vitesse moyenne et la vitesse superficielle restent compris entre les limites indiquées. Mais il n'est pas moins important que la forme régulière de la partie du cours

d'eau où se font les observations fasse suite à une autre, aussi régulière et de même forme, car ce n'est pas immédiatement à chaque variation de forme de la section transversale, que la répartition des vitesses s'établit suivant les lois qui ont été indiquées. Pour ce motif, ainsi que le fait observer M. de Caligny [1], il y a des raisons de penser que le rapport de la vitesse moyenne à celle du milieu de la surface de l'eau dans un canal où le mouvement est permanent, peut être plus grand si la longueur du canal est petite par rapport à ses dimensions transversales que si elle est beaucoup plus grande.

1. *Hydraulique*, 1re partie, page 157.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT NON PERMANENT.

§ 1. *Généralités.* — § 2. *Crues des cours d'eau.* — § 3. *Prévision des crues.* — § 4. *Atténuation des effets des crues.*

§ 1.

GÉNÉRALITÉS.

171. Equation approchée du mouvement non permanent. — L'étude du mouvement non permanent des liquides est beaucoup plus compliquée que celle du mouvement permanent, et je n'ai pas l'intention de l'aborder ici dans ses détails ; mais je crois qu'il est utile d'indiquer au moins comment doit se modifier l'équation générale qui a été établie au n° 24, page 47, lorsque la permanence n'existe plus.

Si nous admettons toujours que le mouvement du liquide ait lieu par filets parallèles, nous pourrons, à une première approximation, négliger, comme nous l'avons fait à ce n° 24, les composantes v et w des vitesses devant la composante u dirigée dans le sens du mouvement, ainsi que leurs dérivées v' et w'. Il en résulte que les trois équations générales se réduiront encore à la forme (14). En répétant le même raisonnement, nous arriverons toujours de la même manière à l'équation :

$$\omega\left(g \sin \mathrm{I} - \frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}\right) = \int_\omega \mathrm{F}\,d\omega + \int_\omega u'\,d\omega.$$

Le premier terme du second membre pourra encore être exprimé par une fonction de la vitesse moyenne U écrite, en général, $g\chi.\varphi(U)$ mais à laquelle nous donnerons, comme nous l'avons fait au n° 115 pour le mouvement permanent, la forme $g\chi b'U^2$, dans laquelle b' devra, ainsi que b, être considéré comme pouvant représenter une fonction quelconque de U, laquelle pourra être et sera en général différente de celle b, relative au mouvement permanent.

C'est dans l'évaluation de l'intégrale $\int_\omega u'd\omega$ que se manifestera surtout la différence des deux hypothèses. Nous avons, en général, en négligeant v et w :

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx}.$$

Nous aurons certainement une valeur approchée de u' en remplaçant dans cette expression u par la vitesse moyenne U, et alors nous trouverons, tout simplement, puisque U aura la même valeur en tous les points de la section transversale :

$$\int_\omega u'd\omega = \text{à peu près } \omega\left(\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}\right).$$

Et alors, si nous adoptons cette valeur approchée, nous obtiendrons, pour l'équation du mouvement non permanent, en remplaçant, comme au n° 24, dx par ds, et en remarquant que la pression p_0 est constante :

$$(1) \qquad \sin I = \frac{\chi}{\omega} b' U^2 + \frac{1}{g}\frac{dU}{dt} + \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

Cette équation suffit le plus souvent.

Par une analyse très compliquée et dont il n'est pas possible de donner ici une idée, mais que l'on trouvera dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*, pages 261 et suivantes, M. Boussinesq a montré qu'abstraction faite de coefficients α_1 et α_2 peu différents de l'unité dont les deux derniers termes doivent

être affectés, il était plus exact d'ajouter un très petit terme de la forme $\beta \frac{U}{\omega} \frac{d\omega}{dt}$, le coefficient β étant une très petite fraction de l'unité et d'écrire l'équation :

$$\sin I = \frac{\chi}{\omega} b' U^2 + \frac{\alpha_1}{g} \frac{dU}{dt} + \alpha_2 \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \beta \frac{U}{\omega} \frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

Nous ne l'appliquerons que sous sa forme approximative (1).

A cette équation générale, nous joindrons celle qui exprime la continuité ou la conservation du volume des éléments liquides et que nous prendrons sous la forme (8) n° 17, page 32.

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{dq}{ds} = 0,$$

ou bien, puisque le débit $q = \omega U$:

$$\frac{d\omega}{dt} + U \frac{d\omega}{ds} + \omega \frac{dU}{ds} = 0. \tag{3}$$

Nous ne conserverons pas au problème toute sa généralité, ce qui n'aurait d'autre effet que de compliquer inutilement les équations et les calculs ; mais nous appliquerons ces équations générales au cas particulier d'un canal horizontal de largeur indéfinie, dont nous considérerons l'unité de largeur.

Si nous appelons H la profondeur du canal en un point où la vitesse moyenne U soit nulle et $H + h$ cette profondeur en un autre point quelconque, nous aurons :

$$\omega = H + h \quad \text{et} \quad d\omega = dh.$$

Soit i la pente du fond du canal ; cette pente est liée à la pente superficielle I et à la profondeur par la relation $I = i - \frac{dh}{ds}$ et supposons encore, pour simplifier, que la pente de fond i et le frottement $\frac{\chi}{\omega} b' U^2$ sont assez petits pour être négligeables ou plutôt pour que l'on puisse admettre qu'il y a toujours compensation entre cette pente et les frottements extérieurs, de

telle sorte que la différence $i - \frac{\chi}{\omega} b' U^2$ puisse être toujours regardée comme nulle.

Enfin, notre dernière hypothèse, qui est d'une application fréquente, sera que la vitesse moyenne U ne soit fonction que de la profondeur $H + h$ ou de sa partie variable h ; les dérivées de U s'exprimeront en fonction de celles de h par les formules :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dh}\frac{dh}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dh}\frac{dh}{ds}.$$

Dans ces hypothèses simplificatives, les équations générales (1) et (3) deviennent respectivement :

$$(4) \qquad g\frac{dh}{ds} + \frac{dU}{dh}\frac{dh}{dt} + U\frac{dU}{dh}\frac{dh}{ds} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{dh}{dt} + U\frac{dh}{ds} + (H + h)\frac{dU}{dh}\frac{dh}{ds} = 0.$$

Portant, dans la première, la valeur de $\frac{dh}{dt}$ donnée par la seconde, il vient, après réduction et suppression du facteur commun $\frac{dh}{ds}$ qui, égalé à zéro, correspond à une profondeur constante :

$$(H + h)\left(\frac{dU}{dh}\right)^2 = g,$$

ou bien

$$\frac{dU}{dh} = \pm\sqrt{\frac{g}{H + h}}.$$

Cette dérivée ne peut évidemment s'annuler ni par suite changer de signe, et il suffit pour conserver toute la généralité d'adopter l'un des deux signes du second membre. En intégrant, et remarquant que, par hypothèse, $U = 0$ pour $h = 0$, il vient :

(6) $$U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$$

Substituant cette valeur de U et celle qui précède, de $\frac{dU}{dh}$ dans l'équation (5), on trouve :

$$\frac{dh}{dt} + \left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right]\frac{dh}{ds} = 0.$$

L'intégrale de cette équation aux dérivées partielles est, en désignant par f une fonction arbitraire :

(7) $$s = \left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right]t + f(h).$$

Cette équation fournit la forme de la surface de l'eau dans le canal considéré à une époque t quelconque, lorsque l'on connaît sa forme :

$$s = f(h)$$

à une époque antérieure à partir de laquelle on comptera le temps t, ou pour laquelle $t = 0$. Elle montre que la surface se propage en se déformant comme si chacune de ses courbes horizontales, élevée de $H + h$ au-dessus du fond, marchait avec une vitesse $[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}]$. Toutefois, cette équation cesse évidemment de s'appliquer si t augmentant, on arrive à en pouvoir tirer deux valeurs de h pour une même valeur de s. C'est qu'il y a dès lors un déferlement ou un *mascaret* qui vient de ce que les couches supérieures, comme l'a remarqué M. Partiot, ont gagné de vitesse et dépassé les couches inférieures.

Nous retrouverons plus loin ces équations comme conséquence de celles qui régissent la propagation des ondes.

§ 2

CRUES DES COURS D'EAU

172. Difficulté du problème. — La question des crues des cours d'eau est une de celles qui intéressent le plus les

ingénieurs : ils ont à étudier les moyens de garantir les vallées contre les inondations, ou tout au moins ceux de prévoir les surélévations exceptionnelles du niveau des eaux, et d'en avertir les intéressés. Dans l'état actuel de la science, il est impossible de donner une théorie complète des crues ; d'ailleurs, les cours d'eau présentent dans leurs allures une si grande diversité que la théorie, fût-elle parfaite, devrait en tout cas être appropriée aux circonstances spéciales relatives à chaque rivière et ne pourrait se traduire en formules pratiques que moyennant l'introduction d'un certain nombre de coefficients ou de termes empiriques dépendant de ces circonstances. Les crues constituent, en réalité, une forme de mouvement non permanent des cours d'eau et leur étude théorique devrait, rationnellement, être déduite de celle de l'équation du mouvement non permanent qui vient d'être établie. Mais dans l'état actuel de la science, cette équation générale ne peut donner, sur le phénomène des crues, que des indications vagues et sans utilité pratique. C'est pourquoi je n'en ferai pas usage dans cette étude et je vais me contenter d'indiquer ce que peut apprendre, sur la question de la propagation des crues, une théorie sommaire que j'emprunterai pour la plus grande partie à une note de M. Kleitz [1], dans laquelle cet ingénieur, à propos des crues du Rhône, a traité la question d'une manière tout à fait générale.

178. Hypothèse simplificative. — J'examinerai seulement le cas le plus simple d'une crue se propageant dans un cours d'eau sans affluent. Je ferai abstraction des complications qui résulteraient de la division de la rivière en plusieurs bras, ou de ses débordements sur de larges plaines et je supposerai que la crue, dans chaque localité, s'élève graduellement jusqu'à un maximum unique, pour s'abaisser en-

1. Note sur la théorie du mouvement non permanent des liquides, par M. Kleitz. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1877, 2e semestre, page 135.

suite jusqu'à ce que la rivière soit revenue à son état initial. Au commencement et à la fin de la crue, la rivière est censée être en régime permanent et avoir le même débit dans toutes les sections transversales.

Alors le débit q, dans une localité quelconque définie par son abscisse s, variera avec le temps t pendant la durée de la crue ; à une même époque t, au contraire, le débit variera suivant les localités, ou avec l'abscisse s qui les définit ; il sera donc à la fois fonction de ces deux variables et nous pourrons écrire :

$$(8) \qquad q = F(s, t).$$

D'autre part, si nous désignons par ω l'étendue de la section transversale, nous pourrons répéter le même raisonnement et écrire :

$$(9) \qquad \omega = f(s, t).$$

Nous avons démontré plus haut (n° 17, page 32), que l'équation de continuité pouvait se mettre sous la forme :

$$(10) \qquad \frac{dq}{ds} + \frac{d\omega}{dt} = 0 ;$$

et enfin, en appelant u la vitesse moyenne, à une époque quelconque et dans une section quelconque, nous aurons, par définition :

$$(11) \qquad u = \frac{q}{\omega} \quad \text{ou} \quad q = \omega u.$$

174. Courbe des débits. — Un fait bien constaté par l'expérience, c'est que le flot produit par une crue simple s'affaisse de plus en plus, en s'allongeant, lorsqu'il se propage

sur une partie de cours d'eau qui ne reçoit aucun affluent [1]. Si l'on a construit, pour une localité donnée, la courbe des débits locaux, c'est-à-dire une courbe telle que OMN (fig. 89), dont les abscisses sont les temps t et les ordonnées les débits q à chaque instant ; la courbe analogue, pour une autre localité située en aval de la première, aura une forme telle que O'M'N' plus longue et moins haute que la précédente ; la ligne horizontale OO'NN' correspondant au débit permanent qui, par hypothèse, suit et précède la crue. Le volume du flot qui cons-

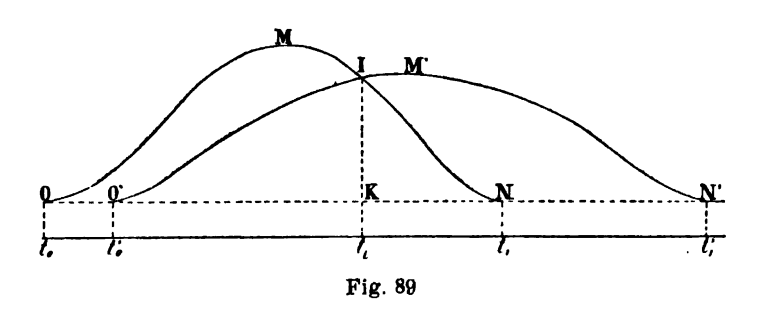


Fig. 89

titue la crue dans toute son étendue est le même pour toutes les localités, puisque, par hypothèse, le cours d'eau ne reçoit aucun affluent. Or, ce volume, dans la première localité, est représenté par la surface OMNO, dans la seconde, par la surface O'M'N'O'. Il faut donc que ces deux surfaces soient équivalentes. Il en est de même aussi, par conséquent, des deux surfaces OMIO'O et NIM'N'N. La première est l'excès de la surface OMIKO, représentant le volume d'eau passé à la première localité avant l'époque t_i sur la surface O'IKO', qui représente celui qui est passé à la seconde avant la même époque. Cette surface OMIO'O représente ainsi l'accroissement que le volume du cours d'eau a pris entre les deux localités avant l'époque t_i ; c'est ce qu'on appelle l'emmagasinement maxi-

1. Je renvoie le lecteur à la note citée de M. Kleitz, pages 158 à 166, pour la démonstration théorique de ce fait, qu'il déduit de l'équation générale du mouvement du liquide.

mum, entre les deux localités considérées. Pour une crue donnée OMNO qui passe devant la première, cet emmagasinement sera d'autant plus grand que le point I sera plus bas sur la branche de courbe MN ; et plus le point I sera abaissé, plus la forme de la seconde courbe, qui doit être telle que la surface IM'N'NI soit égale OMIO'O, sera aplatie et allongée. On voit que le débit maximum, dans la localité d'aval, sera d'autant moindre que l'emmagasinement, en amont, aura été plus considérable. Si donc on diminue cet emmagasinement par des travaux d'endiguement, on augmente nécessairement le débit maximum dans les localités d'aval. « Cette conséquence si évidente, dit M. Kleitz, paraît avoir passé longtemps inaperçue ; car c'est lors des inondations de 1856 seulement que le danger des digues insubmersibles a été signalé. »

175. Maximums successifs de la vitesse, du débit et de la hauteur. — Dès qu'il est admis que le point culminant M de la courbe des débits s'abaisse progressivement, en passant d'une localité à une autre située en aval, il s'en suit que si l'on imagine tracées, sur une même épure, toutes les courbes analogues aux deux précédentes, pour toutes les localités successives, le lieu des sommets tels que M,M'... (fig. 90) de ces courbes sera une nouvelle courbe dont la tangente, en un point quelconque, fera un angle fini avec l'horizontale. Si, alors, nous considérons les sommets M,M' de deux courbes infiniment voisines, la ligne MM', qui les joint, fera, d'après cela, un angle fini avec l'horizontale MH, et le point M', infiniment voisin du point M, se trouvera au-dessous de la courbe M qui ne s'écarte de sa tangente que d'un angle infiniment petit. Le point d'intersection I des deux courbes se trouvera donc au-delà des deux sommets M et M'. Or, à l'instant t_1 marqué par l'abscisse de ce point I, le débit q est le même dans les deux localités

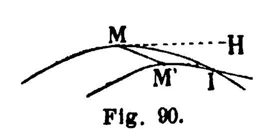


Fig. 90.

infiniment voisines considérées, ou bien $\frac{dq}{ds}=0$. Mais d'après l'équation (9), cela entraîne comme conséquence :

$$\frac{d\omega}{dt}=0.$$

Cela veut dire qu'à l'époque t_1 la section transversale atteint son maximum dans cette localité, ou que la crue y atteint son maximum de hauteur. Ce maximum de hauteur est, comme on voit, postérieur au débit maximum, dont l'époque est représentée par l'abscisse du point M [1].

1. Voici comment on peut calculer, dans une localité donnée, le temps qui s'écoule entre ces deux maximums. Si l'on suppose que, dans cette localité, le lit du cours d'eau soit à peu près rectangulaire, de largeur l, de manière que la section ω soit proportionnelle à la profondeur h, ou que $\omega = lh$, la largeur l étant constante, et si l'on a observé les hauteurs de la crue et construit une courbe de ces hauteurs en fonction du temps, comme on a toujours $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{dq}{ds}$, il suffira, pour avoir l'époque du maximum de q, de déterminer sur cette courbe le point où le coefficient angulaire de sa tangente $\frac{dh}{dt}$ ou $\frac{1}{l}\frac{d\omega}{dt}$ est égal en valeur absolue à la valeur de $\frac{dq}{ds}$, pour le maximum de q, multipliée par $\frac{1}{l}$.

On peut assimiler, sans erreur sensible, la courbe des hauteurs, dans la partie dont il s'agit, à un arc de cercle, et il suffira, pour avoir son rayon, d'en mesurer la flèche f pour une corde déterminée correspondant à un intervalle de temps 2θ. Le rayon de courbure est alors $\frac{\theta^2}{2f}$ et l'angle avec l'horizontale formé par la tangente à cette courbe à une distance x du sommet sera $\frac{x}{\left(\frac{\theta^2}{2f}\right)} = \frac{2fx}{\theta^2}$. Cet angle, sensiblement égal à $\frac{dh}{dt}$ ou à $\frac{1}{l}\frac{d\omega}{dt}$ doit être égalé à $\frac{1}{l}\frac{dq}{ds}$ et l'on en déduira : $x = \frac{\theta^2}{2fl}\frac{dq}{ds}$.

Si, par exemple, dans la localité considérée, le sommet de la courbe des hauteurs a une flèche de 0^m20 pour vingt-quatre heures, $f = 0^m20$, et $\theta = 12$ h. $\times$ 3600″; si de plus, le débit maximum du cours d'eau décroît de 5 mètres cubes par kilomètre [le débit maximum étant inférieur de 1000 mètres cubes dans une localité située à 200 kilomètres en aval], on a $\frac{dq}{ds} = 0{,}005$; ce qui donne avec $l = 300^m$, $x = 21$ h. 36 m.

Prenons l'équation (11) dans une localité donnée et différentions-la par rapport au temps, nous aurons :

$$\frac{dq}{dt} = u\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{du}{dt}, \tag{12}$$

u et ω étant nécessairement positifs, il faut que, lorsque $\frac{dq}{dt}$ s'annule, les deux dérivées $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ s'annulent en même temps, ou soient de signes contraires. Or, nous venons de voir que, quand $\frac{dq}{dt} = 0$ dans une localité, c'est-à-dire quand le débit y est maximum, la hauteur croît encore et n'a pas encore atteint sa plus grande valeur ; $\frac{d\omega}{dt}$ est donc alors positif et par suite $\frac{du}{dt}$ est négatif; la vitesse décroît. Et comme il s'agit d'une crue simple, dans laquelle la vitesse, le débit et la hauteur ne passent chacun que par un seul maximum, si la vitesse décroît, c'est qu'à l'époque considérée du débit maximum, elle a déjà passé par sa plus grande valeur ou que son maximum a précédé celui du débit. Nous trouvons ainsi que ces trois maximums ne se produisent pas simultanément. Dans une crue simple, on observera donc d'abord :

le maximum de la vitesse moyenne u,
puis le maximum du débit q,
et enfin le maximum de la hauteur atteinte par les eaux,
lequel correspond au maximum de la section transversale ω.

On voit ainsi que le débit du cours d'eau, pour une même profondeur, ou pour une même valeur de la section transversale, n'est pas le même pendant la période ascendante et pendant la période descendante de la crue. La vitesse moyenne diminue déjà depuis longtemps, que le niveau s'élève encore ; et le niveau continue encore à monter lorsque le débit commence à décroître, ce qui montre qu'au moment de la plus grande hauteur, la vitesse moyenne doit être bien inférieure au maximum. Les formules qui ont été données plus haut, et

qui expriment le débit d'un cours d'eau en fonction de sa profondeur ne sont donc applicables qu'en cas de mouvement permanent, puisque, en temps de crue, le débit, pour une même hauteur observée à une échelle, a deux valeurs très différentes suivant que le niveau monte ou descend. On ne peut alors les appliquer que sous réserve et simplement à titre d'approximation.

176. Vitesse de propagation de la crue. — Il est intéressant de chercher la vitesse de propagation de la crue le long du cours d'eau. Supposons que nous ayons construit la surface représentée par l'équation :

$$q = F(s,t)$$

en prenant deux axes rectangulaires pour les s et les t (fig. 91) et en supposant les débits q portés en ordonnées perpendiculaires au plan de la figure : la surface peut alors être représentée par ses courbes de niveau, ou lignes d'égal débit $q, q_1, q_2, q_3, \ldots$ Un même débit q, par exemple, se propage entre les points définis par les abscisses s et s' dans un intervalle de temps que l'on obtient en menant, par s et s', des parallèles à l'axe OT jusqu'en m, m', puis, par ces points mm', des parallèles à l'axe OS ; l'intervalle de temps en question est tt'. Or, l'équation de la courbe d'égal débit étant :

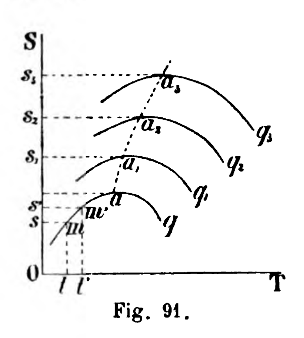


Fig. 91.

$$q = \text{constante},$$

son équation différentielle est :

$$\frac{dq}{ds} ds + \frac{dq}{dt} dt = 0,$$

et la vitesse de propagation du débit q sera exprimée par $\frac{ds}{dt}$, ou

bien, si on la désigne par v_q, par :

$$v_q = \frac{ds}{dt} = -\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dq}{ds}},$$

ou bien, en vertu des équations (10) et (12) :

$$v_q = \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}} = u + \frac{\omega \frac{du}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

La vitesse v_q de propagation d'un débit quelconque q, est plus grande que la vitesse moyenne u du courant liquide dans la première période de la crue où u et ω sont toutes deux croissantes ; elle devient égale à u lorsque cette vitesse atteint son maximum ; et ensuite, $\frac{du}{dt}$ étant négatif alors que $\frac{d\omega}{dt}$ est encore positif, v_q devient plus petit que u et s'annule lorsque, $\frac{dq}{dt}$ étant nul, q est maximum. Cette vitesse nulle indique que le débit maximum q, qui se produit alors, n'a pas son égal dans la section infiniment voisine, ou qu'il ne se propage pas du côté d'aval. Dans la période comprise entre $\frac{dq}{dt}=0$ et $\frac{d\omega}{dt}=0$, ou entre le maximum du débit et le maximum de la hauteur, la vitesse de propagation est négative, ce qui signifie (comme le montre la fig. 90 entre les points MM' supposés infiniment voisins et le point I) que les débits qui se produisent pendant cet intervalle de temps dans la section d'amont s'étaient déjà produits dans celle d'aval. Au moment du maximum de ω, la vitesse de propagation v_q devient infinie, ce qui veut dire que le même débit se produit simultanément dans les deux sections voisines. Enfin, plus tard, $\frac{dq}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ étant tous deux négatifs, la vitesse v_q redevient positive et tend de nouveau vers la valeur u.

En général, dans les cours d'eau ordinaires où la section

transversale est à peu près rectangulaire ou trapézoïdale, tant que le débordement n'a pas commencé, le rapport de $\frac{dq}{dt}$ à $\frac{d\omega}{dt}$, qui mesure la vitesse v_q de propagation d'un débit q, sera, en chaque point du cours d'eau, d'autant plus grand que le débit q lui-même sera plus grand. En effet, bien que d'après ce qui vient d'être dit, le débit q correspondant à une hauteur donnée du niveau soit différent suivant que le cours d'eau est en croissance ou en décroissance, et ne soit pas le même par conséquent que dans l'état de régime permanent, on peut, à titre de première approximation, admettre que le débit est lié à la profondeur par une des relations que nous avons données plus haut (n° 157, page 340), par exemple par celle-ci dont nous avons justifié la forme :

$$q = A(H + C)^{\frac{3}{2}} = A(h + c')^{\frac{3}{2}},$$

en substituant la profondeur h du cours d'eau à la hauteur H menée à une échelle fixe, dont le zéro peut ne pas correspondre au fond du lit. On aurait alors :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2}\,A(h + c')^{\frac{1}{2}}\frac{dh}{dt}.$$

Si, d'autre part, la section est rectangulaire ou à peu près rectangulaire, et si l'on désigne par l la largeur à la ligne d'eau, on pourra écrire à peu près :

$$\omega = lh \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = l\frac{dh}{dt} + h\frac{dl}{dt}$$

Tant que le cours d'eau ne déborde pas, la largeur l est peu variable et $\frac{dl}{dt}$ est nul ou négligeable ; on a donc simplement :

$$\frac{d\omega}{dt} = l\frac{dh}{dt}$$

et par suite, avec l'approximation que nous avons admise :

$$v_q = \frac{3A}{2l}(h + c')^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2l}A^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{q}.$$

On peut donc considérer comme démontré que, dans les circonstances indiquées, la vitesse de propagation d'un débit q est d'autant plus grande que le débit est plus grand; il en résulte que la tête et la queue d'une crue marchent moins vite que son sommet : la partie postérieure de la crue s'allonge donc de plus en plus, tandis que la partie antérieure se raccourcit[1].

Mais le contraire doit arriver souvent dans les rivières débordées. La largeur à fleur d'eau croît très rapidement avec q, le terme $\frac{dl}{dt}$ n'est plus négligeable, et il peut se faire que la vitesse de propagation v_q soit moindre pour les débits élevés que pour les débits plus faibles ou décroisse lorsque q grandit. Elle sera plus petite alors pour le sommet de la crue que pour sa tête ou sa queue; la partie antérieure de la crue s'allongera, tandis que la partie postérieure se raccourcira de plus en plus. Cette conséquence a été vérifiée par M. Graëff dans son *Mémoire sur l'application des courbes des débits à l'étude du régime des rivières, etc*[2].

177. Vitesse de propagation du débit maximum. — Sur les diverses courbes d'égal débit représentées plus haut par la figure 91, nous pouvons considérer les points a, a_1, a_2, a_3,.... où la tangente est parallèle à l'axe des t; ces points donneront les débits maximums dans les localités s_1, s_2, s_3,....; la courbe, lieu des points a, a pour équation :

$$\frac{dq}{dt}=0 \quad \text{ou} \quad \varphi(s,t)=0,$$

en appelant $\varphi(s,t)$ la dérivée $\frac{dq}{dt}$. Or, le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe qui exprimera la vitesse avec laquelle se propage le débit maximum, sera obtenu par :

1. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, nº 191, pages 470 et suivantes.

2. *Mémoires des savants étrangers*, tome XXI.

$$\frac{d\varphi}{ds}ds+\frac{d\varphi}{dt}dt=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2q}{dsdt}ds+\frac{d^2q}{dt^2}dt=0;$$

et cette vitesse, égale à $\frac{ds}{dt}$ sera, si on l'appelle v_m:

$$v_m=-\frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{d^2q}{dsdt}}=\frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{d^2\omega}{dt^2}}.$$

Cette vitesse v_m diffère essentiellement de la vitesse de propagation d'un débit déterminé v_q; il ne s'agit plus de la production successive d'un même débit dans deux localités, mais de la production successive des débits maxima qui ont des valeurs différentes dans ces deux localités.

178. Cas où la hauteur de la crue reste stationnaire. — Ce qui précède suppose que les courbes des débits q et des sections ω ou des profondeurs h sont arrondies à leur sommet. Or, sur les cours d'eau de quelque importance, on observe très fréquemment qu'aux environs du maximum d'une crue, la hauteur reste à peu près stationnaire pendant un temps assez long. Dans ce cas, si le débit q n'arrive pas à son maximum en même temps que ω, sa valeur ne varie pas sensiblement. Si la crue se maintient exactement à la même hauteur pendant un temps assez long pour qu'il se constitue un régime permanent, on aura à la fois $\frac{d\omega}{dt}=0$ et $\frac{dq}{dt}=0$. Alors le débit maximum se transmet à l'aval sans diminution. Mais on se rend facilement compte que la durée de l'*étale* ira en se raccourcissant de plus en plus et, pour peu que le cours d'eau soit étendu, il arrivera que, dans une certaine localité, l'étale s'étant complètement effacée, la courbe des débits sera arrondie à son sommet. En aval de cette localité, le débit maximum ira en décroissant.

Mais les choses ne se passent pas, en général, d'une manière aussi simple que nous l'avons admise et la diminution

graduelle des débits maxima n'est pas seulement la conséquence des conditions du mouvement varié des liquides. D'autres causes y contribuent souvent d'une façon plus efficace. Ainsi lorsqu'une rivière déborde sur de larges plaines, dont le remplissage ne se fait pas instantanément, l'emmagasinement continue assez longtemps après que la crue a atteint sa plus grande hauteur dans le courant principal. Mais toutes ces causes, quelles qu'elles soient, se traduisent toujours par un emmagasinement des eaux pendant la période ascendante de la crue ; et si cet emmagasinement est diminué notablement, dans une certaine région, par des ouvrages de main d'homme, tels que des digues insubmersibles, les débits maxima peuvent en être augmentés sensiblement et d'une manière dommageable dans les régions inférieures. « Les rétrécissements du champ d'inondation qui ont été opérés partout, depuis les plus petites vallées jusqu'aux plus vastes, au moyen de redressements de rives et d'endiguements plus ou moins complets, dit M. Kleitz, ont certainement une influence considérable, sinon prédominante, sur les hauteurs plus grandes que les crues atteignent généralement aujourd'hui, comparativement à celles des siècles passés. »

179. Cas où les formules cessent d'être applicables. — Les formules qui précèdent, ainsi que celles plus détaillées que l'on pourrait en déduire, afin d'étudier de plus près les diverses particularités des crues, comme l'a fait M. Boussinesq dans son ouvrage cité, cessent d'être applicables, soit lorsque les variations du régime sont trop brusques, soit quand le lit présente une largeur assez grande ou des rives assez peu semblables pour que la propagation d'une crue se fasse avec des vitesses notablement différentes aux diverses parties de la largeur en produisant ainsi, dans le sens transversal, des dénivellations sensibles. Les pressions, alors, ne varient plus hydrostatiquement dans un même profil en travers.

On peut se faire une idée de ce qui se passe dans un pareil

cours d'eau en l'assimilant à un certain nombre de cours d'eau juxtaposés, mais distincts. Il est facile de reconnaître, d'abord, que la vitesse de propagation v_q d'un débit donné varie dans le même sens que la profondeur h et en sens inverse du coefficient de frottement extérieur[1]. Donc, à pente de fond égale, la propagation se fait plus rapidement aux points où la profondeur est grande qu'à ceux où elle l'est moins; plus rapidement, aussi, loin des rives, où le seul frottement extérieur à considérer est celui du fond, que près d'une rive où il y a en outre le frottement du bord; plus rapidement aussi près d'une berge unie ou quand le fond est peu rugueux que dans les cas contraires. Aux endroits où les vitesses de propagation sont ainsi plus grandes qu'en d'autres appartenant aux mêmes sections, les diverses phases de la crue se produisent avec une certaine avance relative. Pendant la période ascendante, le niveau s'y trouvera donc plus élevé qu'aux autres points et le profil transversal de la surface libre y présentera une concavité vers le haut; au contraire, pendant la période de décroissance, le niveau y sera plus bas qu'ailleurs et la surface libre concave.

M. Baumgarten a constaté, sur la Garonne, de petites dénivellations de cette nature[2]. M. Graëff en a observé de bien plus considérables (s'élevant à $2^m,40$) sur la Loire, dans les gorges du Pertuiset[3]. « Et il doit s'en produire de plus « grandes encore, dit M. Boussinesq, dans les rivières à bords « perméables, entre le liquide qui coule à ciel ouvert et celui « qui, circulant à travers les pores du lit, ne progage à son « intérieur, d'amont en aval, qu'avec une lenteur excessive,

1. Si l'on admet que l'on puisse appliquer, au moins approximativement, la formule du mouvement uniforme écrite $HI = bU^2$, le débit q étant égal à lhU, on aura $hI = \frac{bq^2}{l^2h^2}$ ou $q = \sqrt{\frac{l^2h^3I}{b}}$, ce qui démontre la proposition énoncée. On conçoit qu'elle soit encore exacte, dans sa forme générale, ou du moins approchée lorsque le mouvement n'est pas uniforme.

2. *Annales des ponts et chaussées*, 1848, 2e semestre, pages 29 et 30.

3. *De l'action de la digue de Pinay*, page 206.

« ses variations de régime, de manière, en quelque sorte, à « ne s'élever durand la période de croissance et à ne baisser « durant la période de décroissance, qu'en vertu de ses diffé- « rences de niveau et par suite de ses échanges avec l'eau « voisine contenue dans le lit ouvert. »

180. Formules approximatives. — Si l'on devait étudier les crues d'un cours d'eau d'après la théorie qui vient d'être exposée, il faudrait renoncer à aborder les divers problèmes qui se posent dans les questions d'inondations, car les débits q et les vitesses de propagation v_q, pour les diverses valeurs de ω sont exprimées, dans les équations précédentes, en fonction des dérivées de ces quantités par rapport à l'espace et au temps, dérivées dont la connaissance suppose précisément celle des circonstances de la crue. Mais il est possible, en se bornant à une approximation, d'établir des formules dont on peut se contenter dans la pratique.

L'approximation consiste à négliger, dans une certaine étendue du cours d'eau, les effets de l'affaissement graduel de la crue. On divise le cours d'eau à étudier en un certain nombre de sections et dans chacune d'elles on suppose que le débit maximum se propage sans atténuation de l'amont à l'aval. Alors q et ω atteignent en même temps leurs maximums et le régime peut être considéré comme permanent. La vitesse de propagation v_q est la même pour tous les débits et elle a pour valeur commune :

$$v_q = \frac{dq}{d\omega} = u + \frac{du}{d\omega};$$

elle varie, comme nous venons de le dire, aux diverses époques de la crue. Dans cette hypothèse simplificative, la valeur de q est déterminée pour chaque valeur de ω et l'on peut exprimer q en fonction de ω ou de la profondeur h, au moyen de formules approximatives comme celles dont il a été donné des exemples plus haut (n° 157). Alors, si $\omega = lh$.

$$v_q = \frac{dq}{d\omega} = \frac{1}{l}\frac{dq}{dh},$$

et si la formule du débit en fonction de la hauteur est de la forme :

$$q = \mathrm{A}l\,(h+c)^{\frac{3}{2}},$$

que nous avons reconnue être assez générale, la vitesse de propagation de la crue sera :

$$v_q = \frac{3}{2}\mathrm{A}\sqrt{h+c} = m\sqrt{2g\,(h+c)},$$

en appelant m le coefficient $\frac{3\mathrm{A}}{2\sqrt{2g}}$.

Dans chacune des parties en lesquelles on aura divisé la longueur du cours d'eau, les coefficients A, c et m auront des valeurs différentes, mais ces valeurs, une fois déterminées pour chaque section, pourront servir à évaluer la vitesse de propagation d'une crue de hauteur donnée h dans l'étendue de cette partie du cours d'eau.

En tout cas, la valeur de $\frac{dq}{dh}$ peut être déduite pour chaque hauteur h de la comparaison de la courbe des débits et de celle des hauteurs, et on adopte une valeur moyenne pour toute la portion de cours d'eau considérée. La largeur l est celle du champ d'inondation, elle est aussi déterminée pour chaque hauteur h. On obtient ainsi une valeur de v_q pour une valeur quelconque de h et par suite du débit q.

Mais ce qu'il importe aussi de déterminer, c'est la hauteur probable de la crue dans la partie située en aval de celle que l'on considère. Prenons alors les deux sections transversales qui limitent cette partie à l'amont et à l'aval et supposons connue la courbe des débits OMN (fig. 92) dans

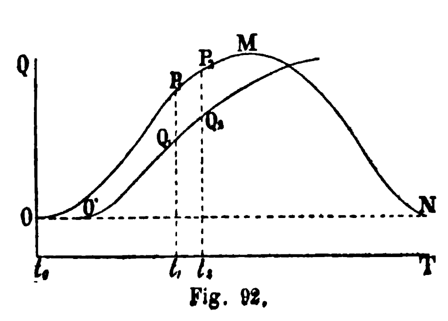


Fig. 92.

la première de ces localités. Nous devons supposer aussi que, la vallée où se produit la crue étant connue, on a pu dresser à l'avance un tableau numérique ou graphique faisant connaître l'augmentation ΔB du volume d'eau emmagasiné pour chaque augmentation de hauteur Δh à une échelle donnée. Cette augmentation de volume est simplement le produit, par Δh, de la surface horizontale couverte par l'eau, à chaque hauteur du niveau, dans l'étendue comprise entre les deux localités considérées. Le tableau ainsi dressé donnera, pour une différence de niveau quelconque, $h_2 - h_1$, l'accroissement correspondant $B_2 - B_1$ du volume d'eau répandu sur la vallée.

Cela étant, si nous considérons deux époques successives, aussi voisines que nous le voudrons, et représentées par les abscisses t_0t_1 et t_0t_2, le volume d'eau passé dans la première des deux sections transversales pendant l'intervalle de temps t_1t_2 aura pour mesure la surface du trapèze $t_1P_1P_2t_2$, et si l'on a observé en même temps les hauteurs h_2 et h_1 du niveau à ces deux époques marquées par t_2 et t_1, on en déduira, d'après le tableau dont il vient d'être question, l'accroissement $B_2 - B_1$ du volume d'eau emmagasiné. Représentons ce volume $B_2 - B_1$ par un parallélogramme dont la hauteur soit t_1t_2 et P_1P_2 le côté oblique, ce parallélogramme sera par exemple $P_1P_2Q_2Q_1$ et par suite Q_1Q_2 sera un élément de la courbe des débits de la localité d'aval. En opérant ainsi successivement pour chaque époque, au fur et à mesure de la production des débits qui constituent la crue dans la première localité, on obtiendra des éléments successifs, tels que Q_1Q_2 parallèles aux éléments correspondants P_1P_2 de la première courbe mais qui en seront à des distances différentes. Il suffira de substituer, à ces éléments discontinus, une courbe continue pour avoir ainsi la courbe des débits dans la localité d'aval, et ainsi de suite [1].

1. Par cette méthode et au moyen de la formule $v_q = \frac{1}{l}\frac{dq}{dh}$ appliquée comme il est dit plus haut, au moyen de profils en travers levés de kilomètre en kilomètre, les ingénieurs du service du Rhône ont calculé, en 1857,

Ordinairement, en même temps que la crue du cours d'eau priucipal, se produisent celles de ses affluents, et chacune de celles-ci vient modifier, en aval du confluent, la courbe des débits déterminée comme il vient d'être dit. Il résulte de cette superposition des courbes plus ou moins ondulées, mais dont les ondulations s'effacent peu à peu à mesure que l'on descend ; les sommets des courbes s'abaissent progressivement, tandis que les points bas intermédiaires entre deux sommets se relèvent et que les pentes moyennes de ces courbes diminuent par suite de l'allongement de leur base que l'on constate toujours, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Les méthodes approximatives qui viennent d'être indiquées s'appliquent facilement à cette superposition de crues[1].

Malgré cela, ces méthodes ne paraissent pas, jusqu'à présent, avoir été souvent employées par les ingénieurs pour l'étude des crues des rivières et les procédés de prévision des crues restent absolument empiriques. Il n'est que juste de reconnaître d'ailleurs que ces procédés empiriques sont arrivés, dans quelques services, à un degré de perfection assez avancé pour que les avertissements donnés aux autorités locales et aux populations riveraines aient une véritable utilité, leur indiquent la nature des précautions à prendre s'il y a lieu et leur évitent des craintes exagérées. On peut en effet, par les pro-

les vitesses de propagation v_q pour des débits variant de mille en mille mètres cubes entre Lyon et le Pont-Saint-Esprit. Ils ont également déduit, dans la crue extraordinaire de 1856, les courbes des débits de Tournon, de Valence, du Pouzin, de Pont-Saint-Esprit et de Beaucaire des courbes des débits établies à Lyon en amont et en aval du confluent de la Saône. Les résultats de ces calculs sont consignés dans un mémoire de M. Kleitz en date du 30 janvier 1858.

1. Il peut arriver que la crue subite d'un grand affluent, tel que l'Ardèche, produise, dans le cours d'eau principal, une surélévation considérable du niveau, accompagnée d'un arrêt ou tout au moins d'un ralentissement très prononcé du débit de ce cours d'eau, en amont du confluent. La méthode qui vient d'être exposée rendrait compte de ce phénomène, car elle permet aussi bien de déduire la courbe d'amont OP_1P_2 de celle d'aval, $O'Q_1Q_2$ supposée connue, que de faire l'inverse.

cédés empiriques, tenir compte, bien plus facilement que par des formules théoriques, de toutes les inégalités de forme que présentent les cours d'eau et qui modifient la hauteur des crues. Ainsi par exemple, un étranglement local de la section transversale de la vallée aura presque toujours pour conséquence de relever le maximum de la crue en amont et de s'opposer, par suite, à l'effet d'affaissement graduel que nous avons signalé. Le relèvement pourrait sans doute être calculé, mais on arrivera à le connaître peut-être plus exactement au moyen d'une formule simplement empirique. Il en sera de même des effets produits par les changements de pente, les courbes, la division du lit en plusieurs bras, etc.

§ 3

PRÉVISION DES CRUES

181. Premiers essais. — Ce n'est guère que depuis une vingtaine d'années que l'on s'est préoccupé d'organiser des services d'annonce des crues. C'est Belgrand qui, dans le bassin de la Seine, a montré le premier comment l'on pouvait, par l'étude des faits survenus dans la partie supérieure des vallées, prévoir la hauteur probable que pourra atteindre le niveau d'un cours d'eau en un point donné de son cours. Les considérations générales qui peuvent être regardées comme la base de cette étude ont été développées par lui dans les *Annales des Ponts et Chaussées* [1]. Nous allons les reproduire en les résumant.

182. Variation du débit des sources. — Il est évident que toutes les eaux absorbées par un terrain perméable dé-

1. *Etudes hydrologiques dans le bassin de la Seine*, 1846, 2e semestre, et 1852, 1er semestre.

boisé n'arrivent pas au sous-sol ; une grande partie reste dans le sol qui, après la pluie, est imprégné comme une éponge quand sa pente superficielle est faible[1]. Lorsque la saison est sèche, cette eau est promptement enlevée par l'évaporation. Il est donc très rare qu'il tombe assez d'eau, l'été, pour qu'elle pénètre jusqu'au sous-sol et à plus forte raison jusqu'aux sources. Dans les terrains boisés, ce sont les feuilles qui empêchent les eaux pluviales d'arriver jusqu'au sol. Il en résulte, dans tous les cas, une diminution considérable du volume des sources en été.

Au contraire, les sources qui existent dans les terrains perméables se gonflent à la suite des grandes pluies d'hiver et reçoivent à peu près toute la quantité d'eau tombée sur le sol, rien n'étant enlevé par l'évaporation. Il en résulte alors le débordement, presque périodique, des rivières dont les versants perméables ne laissent point couler d'eau à leur surface. Cette variation du débit, entre l'été et l'hiver, semble d'autant plus marquée que les versants de la vallée sont plus boisés : les arbres, même dépouillés de leurs feuilles, empêchent pendant l'hiver l'évaporation partielle qui se produit sur les terrains déboisés. « S'il était démontré, dit Belgrand, que les bois, « qui n'ont qu'une faible action sur le débit des sources en « été, peuvent, au contraire, notablement augmenter leur dé- « bit en hiver, il faudrait en conclure que *le reboisement des « montagnes, loin de régulariser le régime des sources, tendrait « au contraire à le rendre moins régulier*. »

183. Crues des grands cours d'eau. Lois de Belgrand. — Les crues des cours d'eau, suivant que les versants sont perméables ou imperméables, sont soumises à des lois différentes. Belgrand appelle *eaux torrentielles* les eaux qui arrivent au thalweg en ruisselant à la surface des terrains

1. Si la pente du terrain est forte, une grande partie des eaux pluviales arrive aux cours d'eau, quelle que soit la perméabilité, et ne profite pas aux sources.

imperméables ; *torrent*, un cours d'eau alimenté par des eaux torrentielles; et, par opposition, *eaux tranquilles* les eaux provenant des sources et de l'égoutture des terres, et *cours d'eau tranquille* un cours d'eau alimenté par des eaux tranquilles. Avec ces définitions, que nous adopterons dans cet exposé, une rivière, pouvant recevoir à la fois des eaux torrentielles et tranquilles peut être un demi, un tiers, un quart de torrent.

Si les versants d'un cours d'eau d'une médiocre étendue sont imperméables, la crue se divise en deux parties très distinctes : l'une très élevée et d'une très courte durée est due aux eaux torrentielles, l'autre, d'une élévation médiocre et d'une très longue durée est due au gonflement des eaux tranquilles et à l'égoutture des terres après la cessation des pluies.

Si, au contraire, les versants sont perméables, la crue est toujours due au gonflement des eaux tranquilles ; elle est très longue et se compose d'une période de croissance régulière, d'un étale bien soutenu et d'une période de décroissance également régulière.

Première loi. — La crue d'un torrent d'étendue médiocre se compose toujours d'une première partie courte et élevée due aux eaux torrentielles, et d'une longue crue tranquille d'une élévation médiocre. La crue d'un cours d'eau à versants perméables est toujours longue et croît et décroît lentement et régulièrement.

Considérons maintenant l'influence qu'exerce, sur la crue d'un cours d'eau A, la rencontre d'un affluent *a* dont les versants ont une superficie moindre que ceux de A. Supposons d'abord que ces versants soient imperméables. Si la pluie dure encore ou n'a cessé que depuis un temps assez court, la crue A s'accroît toujours de la crue de *a* ; mais si la pluie a cessé depuis un temps assez long, l'écoulement de la partie torrentielle de la crue *a* étant de courte durée, les deux crues torrentielles ne se rencontreront presque jamais au confluent;

Pour peu que l'étendue des versants de A soit plus grande que celle de *a*, la crue torrentielle de A arrivera la dernière au confluent, et s'ajoutera à la crue tranquille de *a*.

Deuxième loi. — En général, la crue d'un torrent, à l'aval du confluent d'un autre torrent plus petit, a pour portée maximum, par seconde, la somme de la portée maximum du cours d'eau principal et de la portée de la crue tranquille de l'autre cours d'eau. La crue torrentielle totale d'un grand cours d'eau à versants imperméables se compose donc de la succession des crues torrentielles des affluents qui passent les unes à la suite des autres, et est d'autant plus longue que le nombre des affluents est plus grand, et que le point qu'on considère est plus éloigné de la source.

Troisième loi. — Si les versants du cours d'eau *a* sont perméables, ceux de A restant imperméables, et si l'étendue de *a* est peu différente de celle de A, la crue torrentielle de A passera toujours seule et la première au confluent, et les portées par seconde des deux crues tranquilles s'ajouteront.

Si les deux cours d'eau A et *a* ont leurs versants perméables, la durée de l'étale des crues étant très longue, les portées maximum s'ajouteront presque toujours au confluent.

Quatrième loi. — La portée maximum, par seconde, à l'aval d'un confluent, des crues d'un cours d'eau à versants perméables se compose de la somme des portées maximum, par seconde, des deux affluents.

Si les versants de A étant perméables, ceux de *a* sont imperméables, la crue torrentielle de *a* sera toujours écoulée lors qu'arrivera la crue de A, donc :

Cinquième loi. — Lorsqu'un cours d'eau tranquille rencontre un torrent, la partie torrentielle de la crue du torrent passe toujours seule et la première au confluent ; la crue du cours d'eau tranquille s'ajoute à la partie tranquille de la crue du torrent.

Belgrand cite un grand nombre de faits à l'appui de ces lois. Il constate cependant qu'elles ne se vérifient pas toujours exactement, surtout pour ce qui concerne les crues torrentielles. Deux torrents, même très inégaux en surface, peuvent être disposés de telle sorte que leurs crues torrentielles arrivent ensemble au confluent ; cela a lieu surtout lorsque la pente du petit cours d'eau est plus faible que celle du grand ; mais ce cas est presque toujours une exception.

Ces lois permettent d'expliquer plusieurs faits remarquables.

1° Les crues extraordinaires des cours d'eau à versants imperméables, qui prennent dans la partie supérieure du lit un développement très rapide, tendent, en descendant, à prendre une portée maximum constante. Ces crues sont beaucoup plus longues dans les parties basses du cours d'eau que dans les parties supérieures.

2° Les portées maximum de deux affluents tranquilles s'ajoutant toujours à chaque confluent et le plan des eaux tendant à s'abaisser en raison de la longue durée des crues, les crues extraordinaires d'un fleuve tranquille vont sans cesse en croissant à mesure qu'il reçoit de grands affluents ou même qu'il traverse de grandes régions de sources.

3° La crue la plus élevée d'un bassin imperméable pourra être produite par une pluie tombée seulement sur une partie du bassin ; dans ce cas, elle sera de plus courte durée que si le phénomène qui la produit était général.

4° Dans un bassin perméable, au contraire, où les portées ne se succèdent pas, mais s'ajoutent à chaque confluent, la plus grande crue sera produite par un phénomène général.

Il y a d'ailleurs, suivant les divers cours d'eau des différences énormes dans le rapport du débit par seconde pendant les crues à celui de l'étiage. Ainsi, tandis que sur la Somme ce rapport ne serait que de 2,75, d'après Cambuzat, ou 4, d'après Mary, il atteindrait le chiffre 30 sur la Seine à Paris où le plus bas étiage serait de 73 mètres cubes[1] et la plus grande crue

1. Depuis l'époque où Belgrand a établi ces comparaisons, on a observé des débits d'étiage encore plus faibles.

de plus de 2200 cubes par seconde. Sur la Loire à Roanne, il arriverait au chiffre de 1458 : la plus grande crue étant, d'après Vauthier, de 7290 mètres cubes, et l'étiage de 5 mètres cubes seulement.

184. Incertitude des formules empiriques trop générales. — D'après ce qui précède on voit combien sont incomplets et incertains les énoncés ou les formules qui ne font dépendre les débits des cours d'eau que des surfaces du bassin. Baccarini, dans son ouvrage *Sul compimento delle opere di bonificazione et sulla regolazione delle acque nelle Maremme Toscane* donne la formule de Possenti :

$$Q = \frac{Ca}{S}\left(m + \frac{p}{3}\right),$$

dans laquelle Q est le débit maximum des crues ; m la superficie de la partie montagneuse du bassin ; p celle de la partie en plaine ; a la hauteur maxima de la pluie en vingt-quatre heures ; S la longueur de la rivière depuis sa source et C un coefficient variable avec chaque rivière ou chaque section de rivière, que l'on détermine au moyen d'un débit maximum connu.

Cette formule suppose que le débit est proportionnel à la quantité a de pluie tombée ; elle ne tient aucun compte de l'état d'imbibition des terres perméables qui peut pourtant, dans une mesure considérable, modifier le rapport entre le volume d'eau tombée et le volume charrié par le cours d'eau. Elle ne tient pas compte non plus de la superficie atteinte par les pluies ni des divers degrés de perméabilité des versants. On ne peut donc la considérer que comme donnant une grossière approximation.

185. Bases ordinaires des formules de prévision des crues. — Les formules usitées pour la prévision des crues sont ordinairement établies sur d'autres bases. Belgrand a indiqué, pour le bassin de la Seine, une formule qui permet

de calculer la hauteur du fleuve à Paris au moyen de celles de ses affluents supérieurs.

Cette formule est en réalité la première qui ait été effectivement appliquée à la prévision des crues. La méthode indiquée par Belgrand a été imitée dans la plupart des autres bassins et il a été rendu compte, dans les Annales des ponts et chaussées, de quelques-unes de celles qui ont été adoptées et qui sont aujourd'hui employées dans divers services [1].

On peut faire la prévision des crues, en un point donné d'un cours d'eau, en établissant des relations empiriques entre les hauteurs atteintes par le niveau de l'eau à des échelles fixes, dont l'une est placée en ce point et les autres en d'autres points en amont sur le cours d'eau principal ou sur ses affluents, les zéros de ces échelles correspondant à l'étiage du cours d'eau ; ou bien on peut établir ces relations entre les *montées* de l'eau, c'est-à-dire entre les quantités dont l'eau s'élève au-dessus du niveau qu'elle avait au moment où le cours d'eau a commencé à croître. Les deux systèmes ont leurs partisans. Belgrand considérait surtout les montées et il a donné une règle qui est encore, sauf quelques modifications, adoptée aujourd'hui, d'après laquelle la montée probable à Paris est une fonction linéaire simple des montées observées sur huit affluents recueillant les eaux de vallées imperméables ; ceux qui coulent dans des vallées perméables ne font que soutenir la crue après la production du maximum. Cette règle permet de faire les prévisions, en moyenne, trois jours à l'avance. Elle doit d'ailleurs être appliquée avec sagacité et doit subir quelques corrections pour tenir compte des circonstances particulières à chaque crue ; mais elle donne des résultats satisfaisants.

Ce sont des règles analogues qui ont été appliquées, en général, dans tous les bassins français où l'on a organisé des

1. Je citerai, en particulier, les notes sur ce sujet de M. Allard, 1889, 1er semestre, page 629 ; de M. Mazoyer, 1890, 2e semestre, page 441, et un grand nombre d'autres antérieures. J'ai emprunté aux deux premières tout ce qui suit, concernant la prévision des crues.



services d'annonce des crues. C'est aussi d'après ce système que M. le colonel Mahan a installé un service d'annonce des crues de l'Ohio, aux États-Unis d'Amérique.

186. Méthode algébrique. — Cette méthode ne tient pas compte de la durée de la propagation de la crue dans chacun des affluents ou du temps qui s'écoule entre la montée maximum sur chacun de ces cours d'eau et le moment où elle se produira dans le cours d'eau principal; ou plutôt, on mesure les montées des affluents en des points tels que la crue de chacun d'eux mette à peu près le même temps pour arriver à la localité pour laquelle la prévision doit être faite, et ce sont des coefficients numériques, déterminés empiriquement, qui tiennent compte de l'atténuation de chacune des crues. Il serait assurément préférable, comme l'a proposé M. Allard, de combiner ensemble les hauteurs qui se produisent sur chaque affluent à des dates échelonnées, suivant les différences des durées de propagation. Sans doute ces durées varient un peu suivant la hauteur et les autres circonstances de la crue ; mais il suffirait peut-être de prendre dans chaque cas la durée moyenne, pour se rapprocher un peu plus de la vérité qu'en ne tenant aucun compte de cet élément important.

Les hauteurs ou les montées des divers affluents, qui servent à la prévision, peuvent entrer dans la formule simplement par leur somme ou par leur moyenne ; mais il est en général plus rationnel et plus exact de leur attribuer à chacune un coefficient en rapport avec la surface du bassin de chaque affluent. Si l'on fait la prévision au moyen des hauteurs et si h_1, h_2, h_3... sont les hauteurs observées aux échelles des affluents, la hauteur probable h du cours d'eau principal dans la localité d'aval est alors exprimée par une fonction de la forme :

$$h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \ldots$$

dans laquelle a_1, a_2, a_3... sont des coefficients numériques présentant avec les surfaces de chaque bassin une certaine pro-

portionnalité, pour les vallées offrant à peu près les mêmes caractères de perméabilité. On donnera proportionnellement des valeurs plus grandes aux coefficients qui s'appliquent aux hauteurs des affluents venant de vallées moins perméables.

Cette formule n'est pas en général suffisante pour donner des valeurs assez rapprochées de la hauteur h que la crue atteindra dans la localité où il s'agit de l'annoncer. Et pour obtenir une approximation plus grande, voici le procédé graphique que propose M. Allard.

187 Méthode graphique de M. Allard. — La somme $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots$ des hauteurs observées dans les affluents, ou, plus généralement, la somme de ces hauteurs multipliées chacune par un coefficient très simple, 1, 2, ou 3... est portée en abscisse sur une épure, et l'ordonnée correspondante est la hauteur h qu'il s'agit de prévoir. Si la relation entre cette abscisse, ainsi calculée, que je représenterai par η et la hauteur h était simplement linéaire, les sommets de toutes les ordonnées se trouveraient sur une ligne droite. Mais si l'on a, pendant plusieurs années consécutives, observé les crues du cours d'eau que l'on étudie, on pourra, avec l'abscisse et l'ordonnée, figurer chacune des crues par un point marqué sur cette épure (fig. 93) et alors tracer, au sentiment, une courbe qui représente à peu près la moyenne de ces observations antérieures. Cela étant, pour appliquer cette épure à la prévision d'une nouvelle crue, on calculera l'abscisse η d'après les hauteurs h_1, h_2..., des affluents et on prendra, sur la figure, l'ordonnée correspondante de la courbe qui sera la hauteur probable dans la localité d'aval.

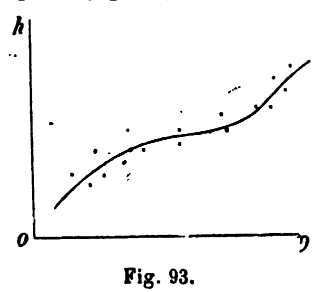


Fig. 93.

Les hauteurs h_1, h_2... seront celles qui auront été observées simultanément aux échelles des divers affluents, lorsque ces échelles seront sensiblement à la même distance de la localité

d'aval. Plus généralement, on prendra, pour former l'abscisse η les hauteurs à des époques échelonnées suivant les distances et suivant le temps probable que met la crue à arriver jusqu'à la localité dont il s'agit. Les durées de propagation sont variables avec les hauteurs, et il ne s'agit ici que d'une moyenne approximative. Si l'on admet, par exemple, que la crue met en moyenne trois heures de plus pour venir du point où l'on mesure la hauteur h_1 que de celui où l'on mesure la hauteur h_2, on prendra, pour former l'abscisse η la hauteur h_1 à 9 heures du matin, et celle h_2 à midi et ainsi des autres, l'ordonnée h correspondant, d'après la courbe, à l'abscisse η ainsi calculée, donnera la hauteur probable de la crue à une éqoque déterminée, postérieure d'un certain nombre d'heures à celle des observations.

Les mêmes procédés peuvent être employés en mesurant et en calculant les montées au lieu des hauteurs et tout ce qui précède s'y applique sans modification.

188. Méthode graphique de M. Mazoyer. — M. Mazoyer fait usage, sur la Loire, d'une autre méthode graphique, applicable surtout à un cours d'eau ne recevant qu'un seul affluent principal. Il détermine par exemple, par sa méthode, les hauteurs des crues de la Loire au Bec d'Allier au moyen des hauteurs observées sur la Loire supérieure à Decize et sur l'Allier à Moulins, ou bien au moyen de la hauteur observée à Moulins et de la hauteur prévue à Nevers, sur la Loire, d'après les observations des affluents.

La hauteur maximum h de la crue, en aval du confluent, est une fonction des hauteurs maxima h_1, h_2 observées sur le cours d'eau et sur son affluent, aux deux échelles placées en amont du confluent. On peut donc écrire

$$h = f(h_1, h_2)$$

et figurer la surface, représentée par cette équation à trois variables, au moyen de ses courbes de niveau. Cela revient,

ayant porté en abscisse l'une des hauteurs h_1 (fig. 94), en ordonnée l'autre h_2, à marquer à l'extrémité de cette ordonnée la valeur correspondante de h, et à réunir par des courbes continues les points du plan qui répondent aux mêmes valeurs de h. L'épure étant tracée sur un papier quadrillé, pour avoir la hauteur h correspondant à deux hauteurs observées h_1, h_2, on prendra, sur chacun des axes, le point où se trouve le chiffre relatif à chacune de ces hauteurs et les lignes menées par ces points, parallèlement aux axes, se couperont en un point qui sera sur l'une des courbes tracées ou bien entre deux de ces courbes, et la position de ce point donnera ainsi immédiatement ou par interpolation la hauteur cherchée h.

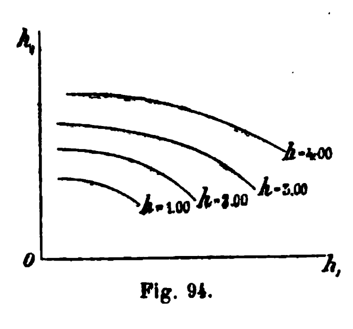


Fig. 94.

La même méthode s'applique au cas où le cours d'eau principal reçoit un certain nombre d'affluents secondaires. Alors, la hauteur h du cours d'eau, dans une localité d'aval, est fonction de la hauteur h_1 observée sur ce cours d'eau à une échelle en amont, et des hauteurs h_2, h_3. h_4..... observées sur les divers affluents. Mais ces hauteurs peuvent être, comme dans la méthode de M. Allard, composées en une seule, η, qui sera ou leur somme ou la somme de leurs produits par des nombres entiers, 1, 2, 3,... Cette quantité, η, ainsi calculée, caractérise, d'après M. Mazoyer, l'état des affluents, et alors on a simplement :

$$h = f(h_1, \eta);$$

c'est-à-dire que l'on considère h comme une fonction de ces deux quantités, h_1 et η et que l'on représente cette fonction par ses courbes de niveau comme il vient d'être dit. C'est ainsi, par exemple, que M. Mazoyer prévoit les hauteurs maxima de la Loire à Nevers d'après la hauteur h_1 observée à Digoin et ce qu'il appelle l'état des affluents, η.

189. Application de ces méthodes. — Il importe d'ajouter que l'application de ces règles empiriques, quelles qu'elles soient, doit être judicieusement faite : il faut, en même temps que l'on calcule la hauteur probable d'une crue, corriger souvent le résultat du calcul pour tenir compte des circonstances particulières qui l'accompagnent. Les crues d'été se propagent d'une manière différente de celles d'hiver ; une crue se propage autrement si elle en suit une autre à peu de distance que si elle succède à une longue période d'étiage, etc. La mise en compte de toutes ces circonstances peut difficilement se faire au moyen de formules ; c'est à la sagacité de celui qui les applique qu'incombe le soin de déterminer les corrections qu'elles doivent subir ; et ce n'est que par une longue pratique et par la comparaison d'un grand nombre d'observations que l'on pourra arriver à des prévisions exactes, en perfectionnant tous les jours les coefficients, les formules et les méthodes elles-mêmes.

Je ne parlerai que pour mémoire de la méthode employée par M. Harlacher et ses collaborateurs pour prévoir les crues de l'Elbe, méthode basée sur la mesure non des hauteurs atteintes en amont par ce cours d'eau et son affluent principal, la Moldau, mais sur la mesure des augmentations de débit qui s'y produisent simultanément. On en déduit naturellement l'augmentation du débit du cours d'eau principal et l'on est obligé, pour prévoir la hauteur de la crue, de recourir à une relation entre les débits et les hauteurs.

§ 4

ATTÉNUATION DES EFFETS DES CRUES

190. Atténuation des effets des crues. Réservoirs. — Un autre problème, bien autrement important que celui de la prévision des crues, consisterait à en prévenir le retour ou du moins à en atténuer les effets.

On a quelquefois pensé, pour diminuer l'importance des crues des cours d'eau, à établir, dans la partie supérieure de leurs bassins, de grands réservoirs dans lesquels s'emmagasinerait l'eau pendant la période ascendante, et que l'on viderait ensuite progressivement et d'une façon assez lente pour qu'il n'en résulte aucun dommage. Cette idée séduisante serait une sorte de généralisation de ce que l'on trouve naturellement établi sur certains cours d'eau dont le parcours traverse de grands lacs qui sont les régulateurs de leurs crues. L'exemple le plus souvent cité est celui du lac Léman et du Rhône. Pour qu'un pareil réservoir puisse avoir toute son utilité il faut qu'il soit, en général, vide, et qu'on ne le remplisse qu'au moment où de grandes pluies étant tombées dans les régions supérieures de la vallée, l'arrivée d'une crue est menaçante. Ou bien, si le réservoir n'est pas habituellement tout à fait vide, son niveau devra être tenu le plus bas possible afin de laisser à l'emmagasinement de l'eau le plus grand volume disponible. Et alors on arrêtera l'écoulement de manière à le remplir, toutes les fois qu'une crue se produira. L'époque à laquelle la fermeture devra avoir lieu ne laissera pas que d'être difficile à déterminer. Si elle a lieu trop tôt et que le réservoir soit entièrement rempli avant que le cours d'eau ait atteint son débit maximum celui-ci ne sera nullement atténué et le réservoir aura été à peu près inutile. Je ne parle que pour mémoire des dommages que pourra causer la surélévation de l'eau dans le réservoir, en admettant que tous les terrains qui seront alors submergés aient reçu dans l'intervalle des crues des cultures plus ou moins importantes.

Si l'on se rend compte, d'ailleurs, du volume énorme que devraient emmagasiner les réservoirs construits sur un grand cours d'eau pour en atténuer les crues d'une façon appréciable on ne sera pas éloigné de reconnaître tout ce qu'il y a d'impraticable dans cette idée : un réservoir de cent millions de mètres cubes n'aurait qu'une influence insignifiante sur les crues d'un grand cours d'eau comme la Loire. Tout ce qu'il

serait peut-être possible de faire, dans cet ordre d'idées, ce serait de créer, de distance en distance, principalement dans les parties les plus hautes des vallées, des obstacles partiels à l'écoulement, favorisant l'emmagasinement de l'eau, ayant pour conséquence certaine une surélévation du niveau des crues en amont, mais aussi et par compensation un abaissement du niveau maximum à l'aval. Les emplacements de ces obstacles partiels devraient être choisis en aval de plaines larges et peu inclinées, habituellement submergées par les crues et sur lesquelles la petite surélévation du niveau dont il est question n'aurait pas un grand inconvénient, en même temps qu'elle correspondrait à un volume emmagasiné considérable. Telle est la digue de Pinay, sur la Loire, en aval de la plaine du Forez, dont la présence a pour effet d'abaisser la hauteur des crues, à Roanne, de 0 m. 60 à 1 mètre, d'après M. Graeff. Il n'est pas besoin d'ajouter que la construction de pareils obstacles à l'écoulement, si elle a pu se faire sans inconvénients ni réclamations à une époque où les terrains des vallées avaient une valeur beaucoup moindre qu'aujourd'hui, ne pourrait être entreprise, dans l'état actuel des cours d'eau français, qu'avec la plus grande prudence et serait peut-être même impraticable. Les terrains cultivables ont acquis aujourd'hui une valeur telle que non seulement, si le lac Léman n'existait pas, il ne viendrait à l'idée de personne de barrer le Rhône pour le constituer, mais que l'idée de le dessécher pour le mettre en culture sera peut-être un jour sérieusement examinée.

Mais, quel que soit le système préventif établi dans les régions supérieures des vallées pour régulariser les crues et en diminuer la hauteur, il y aura toujours, sur les grands cours d'eau, des changements de régime considérables et des périodes alternatives d'étiage, de grandes eaux et même de grandes crues. Les populations riveraines songeront à se protéger contre les effets de ce régime variable au moyen de digues longitudinales, ayant pour but de mettre à l'abri de l'eau les terrains qu'elles ne voudront pas voir envahis par les crues.

191. Digues submersibles et insubmersibles. — Les digues sont de deux espèces : les digues submersibles et celles *dites* insubmersibles. Il y a des digues submersibles de toute hauteur, suivant l'importance des terrains à protéger. Quant aux autres, on ne devrait les considérer que comme plus rarement submersibles que les premières, et leur submersion devrait être, comme celle des autres, un événement prévu, calculé et contre les effets duquel on ne chercherait que des moyens d'atténuation. Mais il n'en est pas toujours ainsi, et souvent l'on a pris absolument à la lettre la dénomination d'insubmersible et l'on s'est attaché à élever le niveau de ces digues au-dessus des plus hautes crues connues. Ainsi, d'après Comoy[1], sur la Loire, le couronnement des digues avait été arrêté à 15 pieds au-dessus de l'étiage ; tout porte à penser qu'avant l'établissement des digues les plus grandes crues ne dépassaient pas cette hauteur, et qu'en adoptant la hauteur de 15 pieds on avait l'intention de rendre les digues insubmersibles. On n'avait pas compté sur les effets que produit l'endiguement ; la hauteur des grandes crues a augmenté, et celle de 1706 s'étant élevée en certains points à 18 pieds, l'on fixa la hauteur des digues à 21 pieds. Mais cette nouvelle hauteur s'est trouvée encore trop faible : toutes les grandes crues ont continué à surmonter et à rompre les digues. Après la crue de 1846, on tenta de mettre les digues à l'abri des ruptures en les exhaussant d'environ un mètre au moyen d'une petite banquette construite sur leur crête du côté du fleuve. Mais la crue de 1856 et celle de 1866 ont démontré que cet exhaussement est encore et de beaucoup insuffisant. Les digues peuvent défendre les vals submersibles contre les crues ordinaires, mais elles sont insuffisantes contre les grandes crues. Leur rupture cause alors de graves dommages. L'eau se précipite avec violence par les brèches, creuse dans le val des gouffres profonds, occasionne des ensablements souvent considérables et détruit

1. Rapport sur la crue de 1856.

les bâtiments qui se trouvent à proximité des brèches. Ce sont des pertes radicales, des destructions complètes de propriétés dont s'émeut beaucoup l'opinion publique à toute nouvelle apparition de ces tristes catastrophes. Ainsi, les digues construites pour défendre la vallée submersible deviennent par suite de leur insuffisance la principale cause des dommages qu'elle éprouve dans les grandes inondations.

Les digues plus basses, submersibles par les grandes crues et qui n'ont pour but que de protéger les récoltes contre les crues moyennes rendent autant, sinon plus, de services que les digues élevées que l'on a voulu rendre insubmersibles; elles n'ont pas l'inconvénient de déterminer les courants dévastateurs auxquels les grandes digues donnent lieu dans les crues extraordinaires. Elles ont en outre le grand avantage de ne pas diminuer l'étendue du lit majeur dans les grandes crues et par suite de ne pas augmenter le débit maximum des crues.

La solution des digues insubmersibles a été toutefois adoptée pour le Pô avec raison, car la vallée du Pô est beaucoup plus large que celle de la Loire, et elle fourmille de villes qu'il fallait couvrir à tout prix. Et encore, bien que le Pô, dans ses crues, roule moins d'eau que la Loire, cette solution garde-t-elle bien des dangers avec un grand fleuve, tant d'affluents et de cours d'eau latéraux suspendus à 9, 10 et 13 mètres au-dessus de la plaine, et bien des inconvénients avec de vastes marais sans écoulement naturel.

192. Effet de l'endiguement insubmersible. — Il convient de remarquer avec Dausse[1] que l'endiguement insubmersible a nécessairement cette conséquence de relever le cours d'eau au-dessus de sa vallée. Pour les fleuves, comme pour les torrents des Alpes que M. Surell à si bien décrits, il y a une partie de leur cours, plus ou moins courte, au pied

1. *Études d'hydraulique pratique.* Mémoires des savants étrangers, t. XX.

des montagnes, où ils ne creusent ni n'exhaussent. Cette double action est plus ou moins lente et sensible et le reboisement avec les travaux auxiliaires la diminue puissamment, mais elle n'en est pas moins constante. Là où elle semble nulle en vingt ans, elle sera marquée après un siècle ou après quelques siècles. Dans la partie sujette à exhaussement, laquelle est la plus longue des trois et la plus importante d'ordinaire, le cours d'eau a établi avec le temps une certaine différence d'altitude entre le fond du lit et la plaine adjacente ; et quand le lit s'exhausse, la plaine aussi s'exhausse, l'un et l'autre à sa manière propre, de sorte que la différence en question, qui est un des éléments du régime établi, se maintient, et c'est le cours d'eau lui-même qui l'entretient, qui perpétue cette espèce d'harmonie. Or l'endiguement rompt cette harmonie, il rend impossible l'exhaussement graduel de la plaine, en modifiant l'exhaussement du lit, mais sans l'empêcher, d'où résultent un état artificiel de plus en plus instable, la dépression croissante de la plaine qu'on prétend garantir et le risque croissant aussi des irruptions dévastatrices[1].

Non seulement les digues dites insubmersibles privent les vallées du limon, généralement très fécond, que déposent les crues, mais lorsque ces digues sont rapprochées, elles augmentent la hauteur des crues ; si elles sont en même temps sinueuses, elles ont à essuyer le choc de courants violents qui les culbutent sans avoir besoin de les surmonter. Elles sont d'une construction et d'un entretien très coûteux et elles nécessitent l'ouverture de canaux d'assainissement des vals qu'elles ont isolés du cours d'eau.

193. Avantages des digues submersibles. — Si, au contraire, l'on s'est contenté de fixer les berges du cours

1. Dans les lits de la Loire et de la Garonne, des seuils rocheux existent en un grand nombre de points des thalwegs ; il n'y a donc pas eu sur ces deux fleuves, l'exhaussement général du lit constaté sur le Pô où l'endiguement est beaucoup plus complet et plus ancien.

d'eau, puis, à une distance plus ou moins grande de part et d'autre, d'élever des bourrelets en terre un peu au-dessus des crues ordinaires; si l'on a mis entre ces bourrelets et le fleuve les cultures qui craignent le moins une immersion passagère et en arrière les cultures les plus délicates, les grandes crues, qui sont le plus chargées de limon, couvriront tout; sans doute elles causeront quelque dommage aux récoltes, mais comme elles laissent d'ordinaire un engrais qui dispense, les années suivantes, de fumer les terres inondées, les dommages qu'elles auront causés se trouveront compensés. En outre, les points plus bas, marécageux, les lits délaissés que l'on trouve souvent dans toutes les vallées se combleront peu à peu et finiront par devenir cultivables.

Avec ce système de digues basses, les crues s'étendant sur toute la plaine sont diminuées à proportion de sa largeur, et les cultures, les haies, les arbres, les chaussées transversales surtout, modèrent la vitesse de la nappe d'inondation laquelle alors, au lieu de raviner le sol, le couvre d'un précieux sédiment.

Les digues insubmersibles, rendues autant que possible véritablement telles, doivent être réservées pour les villes, bourgs, villages bâtis dans des lieux trop bas. Mais il faut les éviter partout ailleurs.

CHAPITRE VIII

MOUVEMENTS ONDULATOIRES.

---

§ 1. *Ondes de translation.* — § 2. *Onde solitaire.* — § 3. *Houle.* — § 4. *Clapotis.* — § 5. *Colonnes liquides oscillantes.* — § 6. *Marées.*

§ 1.

ONDES DE TRANSLATION

191. Ondes de translation. — A l'étude de la propagation des crues se rattache étroitement celle du phénomène remarquable de propagation des ondes liquides, et en particulier des ondes dites de translation qui ont été l'objet d'expériences intéressantes de la part de J. Scott Russell et de M. Bazin. Voici comment Scott Russell (cité par M. Bazin) rend compte de la façon dont il a découvert ce phénomène [1] :

« J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux « tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau « vint à s'arrêter tout à coup ; mais il n'en fut pas de même « de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le « canal ; elle s'accumula autour de la proue dans un état de « violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en

1. Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of science, held at York in september 1844. London 1845.

« arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse « sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface « était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde « continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa « vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la « retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 mil- « les à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds « de longueur sur 1 pied à 1 $^{1}/_{2}$ pied de hauteur). La hauteur « de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie « pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités « du canal. »

L'onde de translation (tel est le nom que J. Russell donne à ce phénomène) peut se produire d'après lui et d'après M. Bazin[1] dans des circonstances fort diverses : toutes les fois qu'un certain volume d'eau, momentanément soulevé au-dessus du niveau général de la masse, est abandonné à lui-même, il donne naissance, en s'affaissant pour y rentrer, à une onde de translation. Ce soulèvement momentané peut être produit soit par le mouvement d'un solide (comme le bateau dont il vient d'être parlé) agissant à la façon d'un piston qui pousse le liquide, soit par la projection d'un certain volume d'eau dans un liquide tranquille, etc. L'onde de translation est tout entière en saillie au-dessus du niveau de l'eau sur laquelle elle chemine, ce qui la distingue des ondes oscillatoires que nous étudierons plus loin et dont chaque saillie est accompagnée d'une cavité correspondante. De plus, les ondes d'oscillation sont toujours réunies par groupe et se succèdent à intervalles réguliers ; l'onde de translation chemine seule, aussi Scott Russell a-t-il donné à celle qu'il a étudiée la dénomination d'*onde solitaire* (solitary wave), qui est appliquée plus spécialement aujourd'hui à une onde de translation particulière ayant la propriété de se propager sans se déformer.

Si, au lieu d'élever momentanément le niveau du liquide,

1. Recherches expérimentales sur la propagation des ondes : *Mémoire des savants étrangers*, tome XIX.

on l'abaisse en créant subitement un vide ou une dépression dans la surface liquide, on a une onde de translation négative qui se propage, comme l'onde positive, mais en se déformant progressivement. L'onde dite solitaire, seule, se propage sans subir de déformation.

95. Vitesse de leur propagation. — Voici comment on peut, très simplement, se rendre compte de la propagation d'une pareille onde de translation, positive ou négative, et calculer la vitesse de cette propagation.

Considérons un canal horizontal, de section transversale quelconque, mais uniforme, dont nous appellerons l'aire ω, rempli de liquide en repos dont le poids spécifique est Π ; soit AA′ (fig. 95) sa surface libre et BB′ le fond. Supposons ce canal

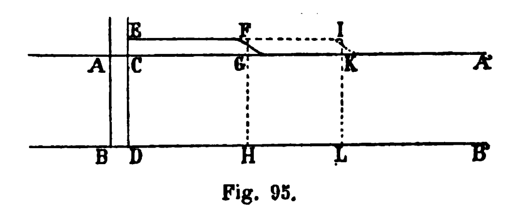


Fig. 95.

fermé par une vanne AB occupant toute la section transversale et formant piston. Imprimons à cette vanne une vitesse horizontale U ; il se produira, en avant, sur une certaine longueur CG, une surélévation du liquide qui viendra, par exemple, jusqu'en EF. Désignons par h la surélévation CE supposée petite par rapport aux autres dimensions et par l la largeur du canal à la surface ; la différence de pression, d'un côté à l'autre de la vanne AB, venue en CD, aura pour valeur

$$\Pi\left(\omega h + \frac{lh^2}{2}\right).$$

L'impulsion de cette force, pendant l'unité de temps, sera égale à l'accroissement de la quantité de mouvement de la masse liquide. Or, au commencement de cette unité de temps,

toute la masse liquide comprise entre ED et FH avait déjà la vitesse U, et pendant cette unité de temps, cette même vitesse U a été communiquée à une certaine masse GHLK dont la longueur GK = HL représente la quantité dont s'est propagée l'intumescence dans l'unité de temps, ou la célérité[1] de cette propagation que nous appellerons V. La masse mise en mouvement est ainsi $\frac{\Pi}{g} V\omega$, et la quantité de mouvement communiquée :

$$\frac{\Pi}{g} V\omega U.$$

Égalant cet accroissement de la quantité de mouvement à l'impulsion de la force qui pendant l'unité de temps est égale à la force elle-même et divisant tous les termes par Π, il vient :

$$\omega h + \frac{lh^2}{2} = \frac{V\omega U}{g}. \qquad (1)$$

Mais, d'autre part, par suite de l'incompressibilité de la masse liquide, il y a égalité entre l'accroissement FGKI de l'intumescence et la diminution de volume résultant de l'avancement de la vanne d'une quantité U dans l'unité de temps, ce qui donne la nouvelle équation

$$lh\, V = (\omega + lh)\, U. \qquad (2)$$

Éliminant U entre ces deux équations, on en tire la valeur de V :

$$V = \sqrt{g\left(\frac{\omega}{l} + \frac{3h}{2} + \frac{lh^2}{2\omega}\right)}.$$

Le dernier terme sous le radical est toujours petit par rapport aux autres ; en effet, si on le compare au précédent, la somme de ces deux termes peut s'écrire $\frac{h}{2}\left(3 + \frac{lh}{\omega}\right)$; or lh, accroisse-

1. Saint-Venant a employé le mot de *célérité* pour distinguer la vitesse dont il s'agit de la véritable vitesse des molécules liquides représentée par U.

ment de l'aire de la section dû à la surélévation h, est toujours, par hypothèse, une petite fraction de l'aire primitive ω, le rapport $\frac{lh}{\omega}$ est donc négligeable par rapport à 3 et la formule peut se réduire à :

$$V=\sqrt{g\left(\frac{\omega}{l}+\frac{3}{2}h\right)}. \tag{3}$$

Elle s'applique, sous cette forme, à une section transversale quelconque. S'il s'agit, en particulier, d'un canal rectangulaire de largeur l et de profondeur $AB = H$, la section $\omega = lH$, et les formules (2) et (3) s'écrivent :

$$(H+h)\,U = h\,V, \tag{4}$$

$$V=\sqrt{g\left(H+\frac{3}{2}h\right)}. \tag{5}$$

Et si l'on exige le carré de $\frac{h}{H}$ devant l'unité, cette dernière expression peut se mettre sous la forme

$$V=\sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{4H}\right). \tag{6}$$

Il est facile de reconnaître que le mouvement de propagation, une fois commencé, continuera indéfiniment dans le même sens, alors même que la cause qui l'a provoqué cessera d'agir; car cette propagation résulte uniquement du fait qu'une certaine masse liquide a reçu une impulsion déterminée. La quantité de mouvement qui en résulte reste ensuite constante si l'on fait abstraction des frottements.

Lorsque h est négligeable devant H, on a simplement

$$V=\sqrt{gH}, \tag{7}$$

expression applicable dès que la profondeur H est un peu grande. Dans les mêmes conditions, l'expression (4) devient

$$HU = hV \tag{8}$$

ou bien

$$(9) \qquad U = h\sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Scott Russell avait déduit, de ses observations, la formule suivante,

$$(10) \qquad V = \sqrt{g(H+h)}$$

pour la célérité de la propagation. Cette formule a été vérifiée par M. Bazin. Cependant certaines de ses expériences lui ont donné des valeurs un peu plus grandes et voisines de celles qui répondent à la formule (5). Il se produisait alors, en avant de l'intumescence, une tête ou saillie dont la surélévation était évaluée par lui à $\frac{3}{2}h$ environ. Eu égard à ce que h est généralement petit par rapport à H, les deux formules (5) et (10) peuvent être considérées comme donnant à peu près les mêmes résultats. D'ailleurs il est à peine besoin de faire remarquer que le raisonnement d'où nous avons déduit la formule (5) n'est qu'approximatif; il ne serait donc pas surprenant que cette formule ne s'accordât pas bien exactement avec les observations[1]. Mais nous verrons plus loin la cause de la différence entre ces deux formules, qui mettra au contraire en évidence leur exactitude. Nous allons les modifier en cherchant à leur donner une approximation plus grande. Pour cela, nous

1. La formule (5) n'est autre chose que celle du ressaut superficiel. Supposons que l'on imprime aux parois du canal et à l'observateur une vitesse commune de translation égale à V, ce qui ne change rien aux mouvements effectifs; l'onde, devenue fixe, ne sera plus qu'un ressaut dont le liquide s'écoulera, en sens inverse du mouvement de l'observateur, avec une vitesse V dans toutes ses parties non atteintes par l'intumescence où la section est Hl, et avec la vitesse $V - U$ dans celles où la section est $l(H+h)$. Mettons donc dans la formule du ressaut (dernière équation du n° 67), page 127, pour ω_0 la valeur lH, pour ω_1 celle $l(H+h)$ et pour Q celle lHV, faisons d'ailleurs $\cos i = 1$, nous obtiendrons :

$$V^2 = g(H+h)\left(1+\frac{h}{2H}\right), \text{ soit, à peu près, } V^2 = g\left(H+\frac{3}{2}h\right),$$

ce qui est précisément la formule (5).

prendrons la question sous une forme plus générale et nous aurons recours au calcul analytique, en suivant la marche indiquée par M. Boussinesq.

196. Formule plus approchée de cette vitesse, tenant compte de la forme de l'onde. — Considérons une masse liquide indéfinie dans tous les sens horizontaux, reposant sur un fond horizontal placé à une profondeur H au-dessous de sa surface libre supposée d'abord immobile. Nous étudierons simplement les ondes *cylindriques*, c'est-à-dire celles dont la surface libre est limitée par des cylindres à génératrices horizontales, et nous admettrons que toutes les molécules liquides qui se trouvent sur une même horizontale parallèle à ces génératrices ont, à chaque instant, le même mouvement, de sorte qu'il nous suffira d'étudier le mouvement de celles qui se trouvent dans un même plan vertical.

Nous prendrons, dans ce plan, pour axe des x, son instersection avec le fond horizontal, et pour axe des z, une verticale quelconque dirigée de bas en haut. Nous pourrons, en limitant fictivement la masse liquide à deux plans verticaux parallèles à celui des coordonnées, la regarder comme faisant partie d'un canal rectangulaire dont l'axe longitudinal serait l'axe des x.

Nous étudierons l'onde ou intumescence formée, dans ce canal, par la projection brusque, en un point quelconque de sa longueur, d'un certain volume liquide, et nous compterons les abscisses positivement dans le sens de la propagation de cette onde.

La surélévation h, positive ou négative, du niveau primitif, sera alors variable avec l'abscisse x et le temps t; mais elle sera nulle, quel que soit t, pour $x = \infty$.

Si nous appelons u, w les composantes horizontale et verticale de la vitesse d'une molécule liquide de coordonnées x, z, p la pression en ce point, ρ la densité du liquide, g la gravité, les équations générales du mouvement sont (n° 16, page 28):

(11) $$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = u', \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g - w'.$$

Il faut y joindre l'équation de continuité ou de conservation des volumes (7), page 32, qui se réduit à :

(12) $$\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Si nous appelons U la vitesse moyenne dans une section transversale dont l'aire est ici $(H + h)$, le volume qui traverse cette section dans l'unité de temps est $(H + h)\,U$, son accroissement, entre deux sections distantes de dx est $-\frac{d(H+h)U}{dx}dx$, et ce même accroissement a pour expression $\frac{dh}{dt}dx$. En égalant ces deux expressions, on obtient la forme suivante de l'équation de continuité que nous aurions pu déduire de l'équation (8) page 32 :

(13) $$\frac{dh}{dt} + \frac{d\,(H+h)\,U}{dx} = 0.$$

Eliminons p entre les deux équations (11) et pour cela, multiplions la seconde par $-dz$ et intégrons depuis $z = z$ jusqu'à $z = H + h$, où $p = 0$, il viendra :

(14) $$\frac{p}{\rho} = g\,(H + h - z) + \int_z^{H+h} w'dz.$$

Il s'agit d'exprimer w'. L'équation de continuité (12) peut être écrite $dw = -\frac{du}{dx}dz$, et si, approximativement, nous supposons que toutes les composantes horizontales u des vitesses des molécules sont égales à leur moyenne U, nous pourrons remplacer u par U qui est alors indépendant de z et nous obtiendrons, à fort peu près :

$$w = -z\frac{dU}{dx}.$$

D'un autre côté, l'équation (13), en y négligeant h devant H, donne $\frac{dh}{dt} + H\frac{dU}{dx} = 0$, ce qui permet d'éliminer $\frac{dU}{dx}$ de la précédente et d'écrire

$$(15) \qquad w = \frac{z}{H}\frac{dh}{dt}.$$

$\frac{dh}{dt}$ est la composante verticale de la vitesse d'une molécule de la surface libre, et cette équation revient à dire que les composantes verticales des diverses molécules liquides sont en raison de leur distance au fond du canal. Il en résulte :

$$w' = \frac{z}{H}\frac{d^2h}{dt^2}.$$

Substituant dans la valeur (14) de $\frac{p}{\rho}$, effectuant l'intégration et remplaçant la limite $H + h$ de l'intégrale par H, il vient, à ce degré d'approximation :

$$\frac{p}{\rho} = g(H + h - z) + \frac{d^2h}{dt^2}\frac{H^2 - z^2}{2H}.$$

Différentions par rapport à x pour retrouver le premier membre de la première (11) et éliminons ce premier membre qui contient p, nous obtenons :

$$u' = -g\frac{dh}{dx} - \frac{d^3h}{dxdt^2}\frac{H^2 - z^2}{2H}.$$

Cherchons maintenant la valeur moyenne de u' sur une verticale; pour cela multiplions cette expression par $\frac{dz}{H+h}$ et intégrons de 0 à $H + h$, cela nous donnera :

$$\text{valeur moyenne de } u' = -g\frac{dh}{dx} - \frac{H}{3}\frac{d^3h}{dxdt^2}.$$

D'un autre côté, la valeur générale de u', dérivée totale de u, a pour expression

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + w\frac{du}{dz}.$$

Si nous y remplaçons u par sa valeur moyenne U, nous pourrons considérer le résultat comme étant la valeur moyenne de u'; il nous viendra ainsi, le dernier terme étant nul puisque U est indépendant de z :

$$\text{valeur moyenne de } u' = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}.$$

Égalons ces deux expressions, nous obtiendrons enfin :

$$(16) \qquad \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx} + g\frac{dh}{dx} + \frac{H}{3}\frac{d^3h}{dxdt^2} = 0.$$

A cette équation, nous joindrons l'équation de continuité (13) que nous écrirons :

$$(17) \qquad \frac{dh}{dt} + H\frac{dU}{dx} + \frac{d.hU}{dx} = 0.$$

Ce qui caractérise et définit la vitesse V de propagation de l'une des tranches verticales de l'intumescence, c'est que, lorsque t croît de dt et x de Vdt, la surélévation h et la vitesse moyenne U dans la section correspondante se retrouvent les mêmes, ou que ces deux quantités h et U sont des fonctions inconnues de la quantité $(x - Vt)$; cela veut dire que leurs dérivées par rapport à t sont égales au produit par $-$ V de leurs dérivées par rapport à x. Dans les deux équations (16) et (17), mettons alors au lieu des dérivées $\frac{d}{dt}$ par rapport à t, les dérivées $\frac{d}{dx}$ par rapport à x multipliées par $-$ V, nous obtiendrons respectivement :

$$\frac{d}{dx}\left[- VU + \frac{1}{2}U^2 + gh + \frac{HV^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[- Vh + HU + hU\right] = 0.$$

Les deux polynômes entre parenthèses sont donc indépen-

dants de x ou constants quel que soit x; et comme tous leurs termes sont nuls pour $x = \infty$, ils sont tous deux égaux à zéro. Cela nous donne les deux équations :

$$VU = \frac{1}{2} U^2 + gh + \frac{HV^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2},$$

$$Vh = U(H + h).$$

La seconde est celle (4) que nous avons trouvée plus haut.

Portant la valeur de $U = \frac{Vh}{H + h}$, qu'on en tire, dans la précédente, celle-ci donne :

$$V^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{H+h} - \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2}\right) = g(H + h)$$

ou à peu près, en négligeant les puissances de $\frac{h}{H}$ supérieures à la première, et les produits de $\frac{h}{H}$ par $\frac{d^2h}{dx^2}$:

$$V^2 = g(H + h)\left(1 + \frac{h}{2H} + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2}\right),$$

ou bien enfin :

(18) $$V = \sqrt{gH\left(1 + \frac{3}{2} \frac{h}{H} + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2}\right)},$$

ou encore, au même degré d'approximation :

(19) $$V = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4} \frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h} \frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

Cette valeur V de la vitesse de propagation d'une tranche quelconque de l'onde, étant ainsi fonction de la surélévation h et de la courbure $\frac{d^2h}{dx^2}$ au point correspondant de la surface, montre que les diverses tranches verticales d'une intumescence quelconque marcheront plus ou moins vite suivant les valeurs respectives de ces deux quantités. Les formules (18) et (19)

ont été données pour la première fois par M. Boussinesq. On voit que si l'on néglige le terme contenant la courbure, elles se réduisent aux formules de première approximation (5) ou (6) que nous avons établies d'une façon toute différente.

197. Energie totale d'une onde de translation. — Quelle que soit la forme d'une intumescence et les transformations qu'elle subit en se propageant, son *énergie totale*, c'est-à-dire le travail qu'elle produirait si la masse liquide revenait au repos, *est constante* si l'on néglige les frottements des particules liquides, qui sont en effet négligeables lorsque l'on ne considère le mouvement que pendant un temps limité. Les actions moléculaires, supposées alors normales aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent, ne produisent aucun travail dans les changements de forme du fluide lorsque le volume ne change pas. Il en est de même des pressions appliquées à la surface libre et aux parois fixes. Il ne reste donc, comme force agissant sur le liquide et capable de produire un travail, que la pesanteur, et tout le travail qu'elle produira aura pour effet, en diminuant l'énergie potentielle, d'augmenter d'autant la force vive des particules liquides, de sorte que l'énergie totale sera constante.

Il est facile d'évaluer cette énergie totale.

Soit Q le volume total de l'intumescence, ou le volume du liquide dont la projection brusque est censée avoir donné naissance à l'onde (ce volume pouvant se composer de parties positives et de parties négatives correspondant respectivement aux régions dans lesquelles la surface libre est au-dessus ou au-dessous du niveau primitif et dans lesquelles h est positif ou négatif). Appelons ζ la hauteur du centre de gravité du volume Q au-dessus de la surface libre, $H + \zeta$ son ordonnée et ξ son abscisse. L'énergie potentielle de l'onde est, pour chacun de ses éléments hdx, égale au poids $\rho g h dx$ de cet élément multiplié par la hauteur $\frac{h}{2}$ de son centre de gravité au-dessus

de la surface libre ; c'est donc la somme des produits $\rho g \frac{h^2}{2} dx$. Pour la totalité de l'onde, elle est la même que si tout le volume Q ou tout le poids ρgQ était concentré au centre de gravité, c'est-à-dire qu'elle a pour valeur $\rho g Q \zeta$.

L'énergie actuelle, ou demi-force vive, est, pour une tranche $(H + h)dx$ comprise entre deux plans verticaux distants de dx, égale au demi-produit de la masse $\rho(H + h)dx$ de cette tranche par le carré U^2 de la vitesse de toutes ses molécules, en admettant qu'elles ont toutes la même vitesse horizontale U et en négligeant le carré de la composante verticale de ces vitesses. Cette énergie actuelle est ainsi $\frac{1}{2} \rho(H + h)U^2 dx$. Nous avons trouvé plus haut (4) la relation $(H + h)^2 U^2 = h^2 V^2$ ou bien, en mettant pour V^2 sa valeur expérimentale $g(H + h)$ qui est suffisamment approchée : $(H + h)U^2 = gh^2$. Cette valeur donne à l'énergie actuelle d'un élément la même expression $\frac{1}{2} \rho g h^2 dx$ qu'à son énergie potentielle, et par suite, la somme des énergies actuelles, pour tous les éléments, sera la même que la somme $\rho g Q \zeta$ de leurs énergies potentielles L'énergie totale sera ainsi le double de chacune d'elles ; si on la désigne par ρgE, on aura :

$$(20) \qquad \rho g E = 2 \rho g Q \zeta \quad \text{ou} \quad E = 2Q\zeta.$$

Le premier membre E étant constant, il en est de même du second, et par suite, la hauteur ζ du centre de gravité d'une intumescence au-dessus de la surface libre primitive est constante.

Les seules forces extérieures agissant sur le liquide étant la pesanteur et les réactions du fond, qui sont verticales, la quantité de mouvement projetée sur l'horizontale doit également être constante, et cette quantité est la même que si toute la masse avait la vitesse $\frac{d\xi}{dt}$ du centre de gravité. Il en résulte que cette vitesse est invariable.

La circonstance que le centre de gravité de l'intumescence reste à une hauteur constante n'empêche pas l'onde de s'aplatir : il suffit qu'elle se décompose en parties alternativement positives et négatives dont la somme algébrique seule représente son volume invariable. Le centre de gravité des parties positives et celui des parties négatives peuvent se rapprocher indéfiniment de la surface libre initiale, tandis que le centre de gravité général, situé sur le prolongement de la droite qui les joint, se maintient toujours à la même hauteur.

Les conclusions qui précèdent supposent d'ailleurs que les frottements sont négligés : c'est à cette seule condition que l'énergie E et par suite l'ordonnée ζ restent constantes. Lorsque l'on ne considère l'onde que sur une portion restreinte de son parcours, les frottements sont, en effet, à peu près négligeables, car, comme l'on peut s'en assurer par un calcul facile dans le cas d'une onde solitaire, le mouvement des molécules liquides, au passage de l'onde, est assez peu accentué, et ne donne pas lieu à des vitesses relatives importantes[1].

Nous allons appliquer les résultats théoriques précédents à l'étude de la propagation de quelques intumescences de formes particulières.

198. Application à quelques exemples. — Considérons d'abord une intumescence assez longue, mais limitée, comme

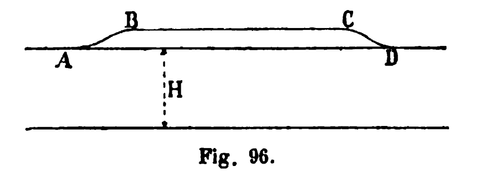


Fig. 96.

celle qui serait produite par la projection, dans le canal, d'un

1. On peut voir, sur ce sujet l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, de M. Boussinesq auquel est empruntée la plus grande partie de cette étude sur les ondes de translation et l'onde solitaire, ou bien un article inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1889, 2e semestre, page 5.

certain volume liquide y arrivant avec un débit constant pendant un temps appréciable. Aux premiers instants qui suivront sa formation, l'intumescence aura une forme telle que ABCD (fig. 96), comprenant une partie BC, sensiblement horizontale, raccordée avec le niveau primitif AD par deux courbes AB,CD. Dans la partie horizontale BC, la courbure étant nulle ou négligeable, la célérité de la propagation s'exprime seulement par les deux premiers termes $V = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3h}{4H}\right)$ de la formule (19). En un point tel que B, où la courbure devient sensible avec une valeur négative, la célérité de la propagation s'exprimera par cette formule (19) dans laquelle le dernier terme ne sera plus nul, mais négatif, et h aura une valeur plus faible ; elle sera moindre que dans la partie horizontale. La queue de l'onde tendra donc à se détacher et à former une onde distincte. Le même morcellement continuant, l'intumescence primitive se résoudra en un certain nombre d'ondes distinctes, jusqu'à ce que la courbure au sommet de chacune d'elles devienne assez sensible pour que la vitesse du point le plus élevé ne dépasse pas celle des parties voisines. Ce phénomène a été nettement observé et décrit par Scott Russell.

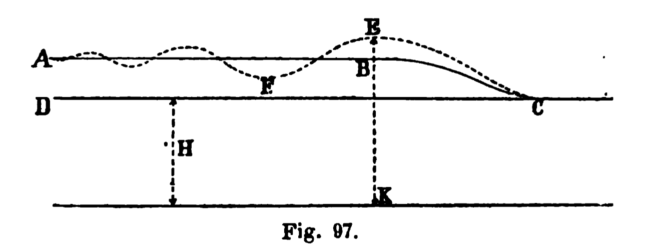


Fig. 97.

Supposons maintenant que l'afflux d'eau, restant encore uniforme, se continue indéfiniment ; l'intumescence aura, à ses premiers instants, la forme d'une lame d'une épaisseur uniforme telle que AB (fig. 97) superposée au liquide primitif DC. En raisonnant de la même manière, on voit que la partie horizontale, la lame, se propage plus vite que la tête de l'onde où

la courbure introduit un terme négatif. La tête de l'onde se trouvera alors inondée par l'afflux de l'eau venant en arrière et elle s'exhaussera jusqu'à ce que son excès d'élévation compense, dans la formule (19), l'influence du dernier terme négatif. Ainsi se formera ce que M. Bazin a appelé l'*onde initiale*, dont il a évalué la hauteur à $\frac{3}{2}h$ ou à une fois et demie celle de la lame qui la suit. L'équilibre étant établi dans ces conditions, la célérité de la propagation de la lame AB de hauteur uniforme et de courbure nulle a été trouvée, dans les expériences de M. Bazin, égale à $\sqrt{g \times \mathrm{EK}}$, c'est-à-dire $\sqrt{g(\mathrm{H}+\frac{3}{2}h)}$ comme l'indique la formule approximative (5) et la formule exacte (18) dans laquelle on suppose nulle la courbure $\frac{d^2h}{dx^2}$.

Ce n'est pas tout ; l'onde initiale ne peut se raccorder à la lame qui la suit que par une courbe ayant une partie concave, pour laquelle le dernier terme de V étant positif, la célérité de propagation sera plus grande que celle de la lame. Il se creusera, par conséquent, un vide entre l'onde initiale et la lame qui suit. La concavité F ainsi formée n'atteindra pas la surface libre primitive DC, car si h devenait négatif la célérité V deviendrait notablement inférieure à celle de la lame qui, affluant, relèverait sur le champ le niveau. Cette première concavité ne pourra se raccorder à la lame située en arrière que par une partie convexe dont le sommet soit au-dessus du niveau AB, et ainsi de suite. La formule (19) rend bien compte, comme on voit, de toutes ces particularités constatées par l'observation et décrites avec plus de détails dans le mémoire de M. Bazin.

§ 2.

ONDE SOLITAIRE

199. Onde solitaire. — Parmi toutes les intumescences de formes diverses dont on peut imaginer la propagation, il en est une pour laquelle les hauteurs h et les courbures $\frac{d^2h}{dx^2}$ sont tellement réparties que la célérité de la propagation est la même pour tous ses éléments. C'est l'*onde solitaire* étudiée par Scott Russell.

Pour en déterminer la forme, il suffit d'exprimer que la somme des deux derniers termes, variables, de l'expression de V conserve la même valeur, ce que l'on peut écrire, en appelant h_1 une quantité constante :

$$\frac{3h}{4\text{H}} + \frac{\text{H}^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h_1}{2\text{H}}, \tag{21}$$

ou bien

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{3h}{2\text{H}^3}(2h_1 - 3h). \tag{22}$$

Equation différentielle, en h et x, définissant la forme de la sur face de l'onde.

Pour l'intégrer, multiplions les deux membres par $2\frac{dh}{dx}dx$ et remarquons que h s'annule en même temps que $\frac{dh}{dx}$; il viendra :

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3h}{\text{H}^3}(h_1 - h). \tag{23}$$

Cette équation, ayant son premier membre positif, montre que h est toujours inférieur ou au plus égal à h_1. La quantité h_1 est ainsi la hauteur, au-dessus du niveau primitif, du som-

met de l'onde solitaire. La pente $\frac{dh}{dx}$ ayant des valeurs égales, au signe près, pour les points où h a la même grandeur, la surface de l'onde est symétrique par rapport à cette ordonnée maximum h_1.

Quant à la célérité de la propagation de l'onde, elle est, en mettant dans (18) pour les deux derniers termes leur valeur en h_1 donnée par (21) :

$$V = \sqrt{g(H + h_1)}$$

conformément aux expériences, très précises et très nombreuses de Scott Russell et de M. Bazin.

Pour tirer parti de l'équation différentielle (22), nous allons la transformer en prenant pour variable indépendante, au lieu de l'abscisse x d'une section transversale, le volume $q = \int_x^{\infty} h dx$ compris en avant de cette section, volume qui suffit, tout aussi bien que x, à en définir la situation[1]. On a alors $dq = - h dx$, et en éliminant dx de l'équation (23), il vient :

$$\left(\frac{dh}{dq}\right)^2 = \frac{3}{H^3}(h - h_1),$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{3}{H^3}}\, dq = \frac{dh}{\sqrt{h_1 - h}}.$$

L'intégration donne facilement, en appelant c une constante :

$$\sqrt{\frac{3}{H^3}}(q - c) = 2\sqrt{h_1 - h},$$

1. On peut aussi intégrer l'équation (22) en h et x sous la forme (23) sans y rien changer. Il suffit de séparer les variables et de remarquer que l'abscisse du sommet est égale à Vt si l'on compte le temps à partir du moment où le sommet de l'onde passe à l'origine. On trouve alors

$$\frac{2h_1}{h} = 1 + \text{coh}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x - Vt),$$

en désignant par *coh* le cosinus hyperbolique.

ou, en élevant au carré :

$$h = h_1 - \frac{3}{4H^3}(q - c)^2.$$

La constante se déterminera en exprimant que, pour $x = \infty$ ou pour $h = 0$, le volume q est nul, ce qui donne $c^2 = \frac{4H^3h_1}{3}$. Mais, d'autre part, il y a une relation entre la hauteur maximum h_1 de l'onde et son volume total Q. L'onde étant symétrique, on doit avoir $q = \frac{Q}{2}$ pour $h = h_1$. Il en résulte $c = \frac{Q}{2}$, ou en comparant avec la précédente valeur de c^2 :

$$Q^2 = \frac{16h_1H^3}{3}, \qquad h_1 = \frac{3Q^2}{16H^3},$$

et cela permet d'éliminer à la fois h_1 et c de l'équation précédente en y faisant entrer Q. Elle devient ainsi :

(24) $$h = \frac{3}{4H^3} q (Q - q).$$

Sous cette forme remarquable, elle montre que l'ordonnée h varie proportionnellement au produit des deux portions en lesquelles elle divise le volume total Q de l'intumescence.

200. Énergie et stabilité de l'onde solitaire. — Nous pouvons trouver facilement la hauteur du centre de gravité de l'onde au-dessus de la surface libre primitive. D'après la définition même du centre de gravité, cette hauteur ζ sera donnée par l'équation $Q\zeta = \int_0^Q \frac{h}{2} dq$; et en mettant pour h sa valeur (24), effectuant l'intégration, on trouve :

$$\zeta = \frac{Q^2}{16H^3} = \frac{h_1}{3}.$$

Le centre de gravité d'une onde solitaire se trouve donc au tiers de la hauteur de cette onde au-dessus de la surface libre primitive.

La quantité E, qui exprime le quotient de l'énergie totale de l'onde par le poids spécifique du liquide, a pour expression d'après (20) :

$$(25) \qquad E = 2Q\zeta = 2Q \cdot \frac{Q^2}{16H^3} = \left(\frac{Q}{2H}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{4h_1H}{3}}\right)^3.$$

On en déduit les relations suivantes :

$$(26) \qquad Q = 2H\sqrt[3]{E}; \qquad h_1 = \frac{3\sqrt[3]{E}}{4H}; \qquad \frac{Q}{h_1} = \frac{8H^2}{3\sqrt[3]{E}}.$$

Ces formules peuvent expliquer ce qui se passe lorsqu'une onde se propage dans un canal à pente douce, dont la profondeur H diminue lentement; par exemple, ce qui se produit au bord de la mer pour les ondes qui viennent du large sur une plage peu inclinée. L'énergie E étant constante, ou sensiblement constante, le volume Q de l'onde décroîtra avec H et la hauteur h_1 augmentera en sens inverse. Le rapport $\frac{Q}{h_1}$ qui peut être considéré comme mesurant en quelque sorte la longueur de l'onde, décroîtra comme le carré de H. L'onde, plus élevée et plus courte, sera de moins en moins stable jusqu'à ce qu'elle manque de base et déferle.

Les formules précédentes peuvent encore servir à calculer approximativement l'énergie du choc produit par une onde sur un obstacle vertical perpendiculaire à sa direction. Si l'on admet que l'énergie totale de l'onde est employée à produire ce choc, la force vive correspondante sera :

$$\rho g E = \rho g \left(\sqrt{\frac{4h_1H}{3}}\right)^3.$$

Ainsi, une onde de 0,40 de saillie se propageant dans une eau de 2^m00 de profondeur produira, sur un mur vertical perpendiculaire à sa direction, un choc dont l'énergie, par mètre de longueur horizontale, sera :

$$1000\left(\sqrt{\frac{4 \times 0{,}40 \times 2{,}00}{3}}\right)^3 = 1100 \text{ kilogrammètres environ.}$$

L'onde solitaire, dont tous les éléments se propagent avec la même célérité, conserve indéfiniment sa forme ; mais une autre intumescence de forme différente, pour laquelle la somme des deux derniers termes de l'expression de V n'est pas constante, change de forme en se propageant, les éléments les plus rapides se superposant en partie à ceux qui les précèdent. Il est bien évident que le mouvement doit tendre à se régulariser ou que toutes ces célérités variables doivent tendre vers une valeur commune et par conséquent la forme de l'onde tendre vers celle de l'onde solitaire, la seule qui soit stable. C'est ce que M. Boussinesq a démontré analytiquement et ce qui explique la facilité avec laquelle on produit des ondes solitaires : toute intumescence de longueur peu considérable et de volume limité, assez peu haute pour ne pas déferler, prend au bout d'un certain temps, cette forme définitive. Et lorsqu'elles sont arrivées à cet état, la célérité de leur propagation s'exprime bien par la formule de Scott Russell et de M. Bazin :

$$V = \sqrt{g(H + h)}.$$

201. Intumescence très allongée. — Considérons maintenant une intumescence assez longue et assez aplatie pour que ses courbures soient partout négligeables ; la célérité de sa propagation sera simplement, en annulant le dernier terme de (19) :

$$V = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3h}{4H}\right);$$

et si l'on combine cette équation avec celle (4), on en déduit :

$$U = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3h}{4H}\right)\frac{h}{H + h};$$

ou bien en négligeant les puissances supérieures du rapport $\frac{h}{H}$:

$$(27) \qquad U = \sqrt{gH}\left(1 - \frac{h}{4H}\right)\frac{h}{H}.$$

Si dans l'équation de continuité (13) l'on met pour $(H+h)U$ la valeur que donne la précédente, cette équation devient :

$$\frac{dh}{dt}+\sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{2H}\right)\frac{dh}{dx}=0\ ;$$

et cette dernière, intégrée, donne, en appelant f une fonction arbitraire :

$$x=\sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{2H}\right)t-f(h). \tag{28}$$

Ces deux équations (27) et (28) sont identiques au fond à celles que nous avons trouvées plus haut, article 171, page 369, pour le mouvement non permanent dans les conditions spéciales que nous y avons définies. Elles portent, à cet article, les numéros (6) et (7) et il suffit de les développer en négligeant les puissances supérieures du rapport $\frac{h}{H}$ pour retrouver identiquement les deux qui précèdent.

202. Propagation des ondes dans un liquide en mouvement. — Les formules de la propagation des ondes dans un liquide en repos s'appliquent facilement au cas où ce phénomène se produit dans un cours d'eau régulier, à fond horizontal ou sensiblement horizontal et dans lequel le liquide est animé d'une vitesse moyenne U_0. Là rien n'empêche de supposer que l'axe des z, au lieu d'être immobile, participe au mouvement de la masse liquide et se déplace avec la vitesse U_0. Et alors, l'onde ayant, par rapport à cet axe, une célérité de propagation exprimée par $\sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{4H}\right)$, la célérité réelle V rapportée à un axe fixe sera :

$$V=U_0\pm\sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{4H}\right),$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant que la célérité relative est de même sens que U_0 ou de sens contraire.

Ce raisonnement serait rigoureux si toutes les particules li-

quides de la section transversale du cours d'eau avaient effectivement la vitesse U_0 ; mais il n'en est pas ainsi, et l'inégalité de vitesse des divers filets fluides a pour effet de diminuer la célérité absolue de la propagation. M. Boussinesq en tient compte au moyen d'un terme correctif $-\eta\sqrt{gH}$ dans lequel η est un coefficient numérique beaucoup plus petit que l'unité. La formule s'écrit alors :

$$V = U_0 \pm \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3h}{4H} - \eta\right).$$

Appelons, comme plus haut, U la vitesse moyenne effective dans une section transversale atteinte par l'onde, dont la hauteur soit $H + h$; la vitesse relative, par rapport à l'axe mobile, sera $\pm (U - U_0)$ et nous pourrons appliquer à cette vitesse la formule approximative (5) qui nous donnera :

$$h = \pm H \frac{U - U_0}{\sqrt{gH}}.$$

Substituons cette valeur de h dans l'équation précédente, il vient :

$$V = \pm \sqrt{gH}\,(1 - \eta) + \frac{3}{4}U + \frac{1}{4}U_0. \tag{29}$$

Par exemple, dans le cas du remous ascendant que l'on produit dans un canal en arrêtant l'écoulement par la fermeture d'une vanne placée à l'aval, cette formule donne, en y faisant $U = 0$, puisque la vitesse s'annule dans les sections transversales, et en prenant le signe — puisque l'onde se propage alors en sens inverse de U_0 :

$$-V = \sqrt{gH}\,(1 - \eta) - \frac{1}{4}U_0.$$

La célérité de la propagation est donc, en valeur absolue, un peu inférieure à la valeur $\sqrt{gH} - \frac{1}{4}U_0$ que lui avait attribuée Bidone d'après ses expériences. C'est ce qu'a reconnu en effet M. Bazin qui a tenu compte de la différence dont il s'agit en prenant :

$$-V = \sqrt{gH} - \frac{2}{5} U_0 .$$

De même, s'il s'agit d'un courant continu, de vitesse U, propagé le long d'un canal contenant déjà une eau en repos de profondeur H, la formule prise avec le signe supérieur et en y faisant $U_0 = 0$, donne :

$$V = \sqrt{gH}\,(1 - \eta) + \frac{3}{4} U,$$

valeur un peu inférieure à $\sqrt{gH} + \frac{3}{4} U$; aussi M. Bazin a-t-il dans ce cas trouvé, pour concorder avec ses expériences, la valeur :

$$V = \sqrt{gH} + \frac{3}{5} U.$$

Plus généralement, pour un remous ascendant quelconque, on aura $U_0 > U$ et la formule (29) prise avec le signe inférieur — pourra être écrite :

$$-V = \sqrt{gH}\,(1 - \eta) + \frac{3}{4}(U - U_0) - U_0,$$

ou bien, en faisant porter, comme le fait M. Bazin, la correction η non pas sur le premier terme, mais sur le second

$$-V = \sqrt{gH} + \frac{3}{5}(U_0 - U) - U_0 .$$

Cette formule, qui comprend les deux précédentes, a été confirmée par les très nombreuses et très précises observations de M. Bazin, dans ses *Recherches expérimentales sur la propagation des ondes*. La précédente, avec le coefficient correctif η, est donnée par M. Boussinesq au n° 182 de son *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Elles ne tiennent compte, ni l'une ni l'autre, du frottement extérieur qui modifie un peu les résultats.

§ 3.

HOULE

208. Ondes d'oscillation. — Les oudes d'oscillation ou ondes périodiques constituent, pour les liquides, une forme particulière de l'état d'équilibre, si l'on peut appliquer ce nom à un état dans lequel toutes les molécules sont en mouvement. Mais ce mouvement est tout à fait distinct de celui de l'écoulement ; c'est un balancement sur place dans lequel les particulés liquides décrivent des trajectoires fermées autour de leur position d'équilibre ; et il est caractérisé par ce fait que, si l'on fait abstraction des frottements, l'état dont il s'agit, d'une même masse liquide, se perpétuera indéfiniment sans modification,. dans le même espace, comme l'équilibre lui-même.

Les ondes d'oscillation ou périodiques sont de deux sortes : celles qui paraissent courir à la surface de l'eau et qui s'appellent ondes *houleuses ;* celles qui semblent rester sur place, ou ondes *clapoteuses.* Les états correspondants de la masse liquide sont *la houle* et *le clapotis.*

Nous étudierons d'abord la houle, et nous emprunterons la plus grande partie de cette étude à un mémoire de F. Gerstner, dont une traduction a été publiée dans les *Annales des Ponts et Chaussées* 1887, 1er semestre, page 31. Dans tout ce qui va suivre, nous ne considérerons, comme nous l'avons fait dans les ondes de translation, que des ondes *cylindriques,* c'est-à dire telles que toutes les molécules qui se trouvent à la fois sur une même ligne horizontale perpendiculaire au plan vertical des coordonnées aient exactement le même mouvement et restent constamment en ligne droite. Le mouvement de toute la masse sera alors défini par celui des molécules situées dans le plan vertical des coordonnées.

Si, à un moment quelconque, on suppose menées, dans

la masse liquide, les surfaces de niveau, qui seront des cylindres horizontaux, ou bien, ce qui revient au même, si l'on suppose tracées, sur le plan vertical des coordonnées, les bases de ces cylindres, qui seront des courbes de niveau, chacune de ces courbes considérée comme immobile représentera la trajectoire des molécules liquides qu'elle rencontre ; car, une molécule quelconque ne peut s'écarter de cette ligne qui est une ligne d'égale pression en tous ses points.

204. Houle. — L'hypothèse de surfaces de niveau immobiles dans l'espace paraît en contradiction avec celle de la houle, dans laquelle la surface libre, qui est une surface de niveau, change de forme à chaque instant. Mais la propriété des surfaces de niveau subsiste si l'on attribue à ces surfaces et à toute la masse liquide un mouvement de translation commun. Il est alors possible, comme nous le verrons, de représenter les ondes houleuses avec de telles surfaces.

Soit AMB (fig. 98) l'une des courbes de niveau, trajectoire des molécules, A son point le plus élevé. Menons l'horizontale Ax et la verticale Ay que nous prendrons pour axes de coordonnées. Soient M,M′ deux positions infiniment voisines d'une molécule sur sa trajectoire ; appelons m la masse de cette molécule, v_0 sa vitesse lorsqu'elle était au point A, v sa vitesse en M, s la longueur de l'arc AM et ds l'élément MM′. Appliquons le théorème des forces vives à cette molécule entre les deux points A et M, nous aurons :

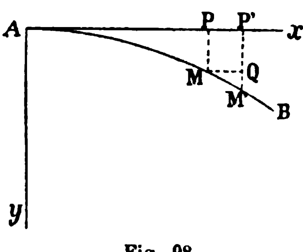


Fig. 98.

$$v^2 = v_0^2 + 2gy. \tag{30}$$

Si R_0 est le rayon de courbure de la trajectoire au point A, la force verticale qui sollicitait la molécule, lorsqu'elle était en ce point, a pour expression $mg - \frac{mv_0^2}{R_0} = m\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)$.

Cette masse m, qui s'est écoulée pendant le temps dt avec la vitesse v_0, occupe sur la trajectoire une longueur v_0dt, de sorte que la force verticale, rapportée à l'unité de longueur est :

$$\frac{m}{v_0dt}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right).$$

Cette force verticale par unité de longueur, appliquée au point A, représente la pression en ce point, et puisque AMB est une courbe de pression, elle représente aussi la pression normale par unité de longueur au point quelconque M. La même masse m, écoulée pendant le temps dt, y occupe une longueur $ds = vdt$, de sorte que la pression normale sur cette molécule est $\frac{mds}{v_0dt}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)$. La pression normale au point M fait avec l'horizontale un angle dont le cosinus est $\frac{dy}{ds}$, et par suite la composante horizontale de cette pression est $\frac{mds}{v_0dt}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)\frac{dy}{ds}$. La somme des impulsions de cette composante horizontale, depuis A jusqu'à M est égale à la différence des quantités de mouvement projetées sur l'axe des x ou à $m\left(\frac{dx}{dt} - v_0\right)$. Or cette somme des impulsions a pour expression $\int\frac{m}{v_0}\frac{ds}{dt}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)\frac{dy}{ds}dt$, ou en réduisant : $\int\frac{m}{v_0}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)dy$ ou enfin $\frac{m}{v_0}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)y$. Ecrivant cette égalité et divisant par m, il vient :

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = \frac{y}{v_0}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right).$$

Désignons, pour abréger par $\frac{1}{b}$ (b étant une longueur), la quantité :

$$\frac{1}{b} = \frac{g}{v_0^2} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{v_0^2}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right), \tag{31}$$

l'équation précédente s'écrira simplement :

$$\frac{dx}{dt} = v_0\left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \tag{32}$$

Pour avoir une relation entre y et le temps t, nous exprimerons, en fonction de y, la composante verticale $\frac{dy}{dt}$ de la vitesse, qui est égale à $\sqrt{v^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$. Mettant pour v et pour $\frac{dx}{dt}$ leurs valeurs données par les équations (30) et (32), nous trouvons :

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{v^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gy - v_0^2\left(1 + \frac{y}{b}\right)^2},$$

ou, après réductions :

$$\frac{dy}{dt} = v_0\sqrt{\frac{2y}{R_0} - \frac{y^2}{b^2}}. \tag{33}$$

L'intégration de cette équation se fait facilement en séparant les variables[1] ; on trouve, en comptant le temps t à partir du moment où la molécule était au point A, ou en faisant $y = 0$ pour $t = 0$:

$$y = \frac{b^2}{R_0}\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{b}\right), \tag{34}$$

ce qui donne :

1. Il est plus simple, au lieu d'effectuer l'intégration, de vérifier le résultat ci-dessus. La substitution de la valeur (34) de y dans l'équation (33) donne en effet :

$$\frac{dy}{dt} = v_0\sqrt{\frac{2\,b^2}{R_0^2}\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{b}\right) - \frac{b^2}{R_0^2}\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{pv_0}{R_0}\sqrt{1 - \cos^2\frac{v_0 t}{b}} = \frac{bv_0}{R_0}\sin\frac{v_0 t}{b},$$

ou précisément l'équation (35).

(35) $$\frac{dy}{dt} = \frac{bv_0}{R_0} \sin \frac{v_0 t}{b}.$$

Substituant la valeur (34) de y dans celle (33) de $\frac{dx}{dt}$, il vient :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \left[1 + \frac{b}{R_0}\left(1 - \cos \frac{v_0 t}{b}\right)\right],$$

ou bien, en raison de la signification de b :

(36) $$\frac{dx}{dt} = \frac{bg}{v_0} - \frac{bv_0}{R_0} \cos \frac{v_0 t}{b};$$

et, en intégrant depuis l'époque $t = 0$ où l'on a $x = 0$:

(37) $$x = \frac{bg}{v_0} t - \frac{b^2}{R_0} \sin \frac{v_0 t}{b}.$$

205. Forme des surfaces de niveau. — Les deux valeurs de x et de y en fonction du temps définissent la trajectoire des molécules ou la forme des surfaces de niveau de la masse liquide en fonction des quantités v_0, R_0 et b qui varieront de l'une à l'autre. Pour étudier plus facilement ces courbes, nous allons remplacer ces quantités v_0, R_0 et b qui sont constantes pour une même courbe, par trois autres, r, V et T liées aux premières par les relations :

(38) $$r = \frac{b^2}{R_0}, \quad V = \frac{bg}{v_0}, \quad T = \pi \frac{b}{v_0}.$$

Alors les expressions de x, y, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ prennent la forme :

(39) $$\left\{ \begin{aligned} x &= Vt - r \sin \frac{\pi t}{T}, & y &= r\left(1 - \cos \frac{\pi t}{T}\right). \\ \frac{dx}{dt} &= V - \frac{\pi r}{T} \cos \frac{\pi t}{T}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\pi r}{T} \sin \frac{\pi t}{T}. \end{aligned} \right.$$

Considérons une circonférence de cercle (fig. 99) tracée dans

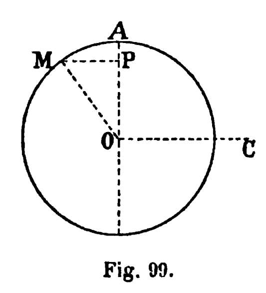


Fig. 99.

un plan vertical avec un rayon r, et parcourue par un point mobile avec une vitesse angulaire constante $\frac{\pi}{T} = \frac{v_0}{b}$; si, à l'époque $t = 0$, ce point mobile était au point A, à l'extrémité supérieure du diamètre vertical, l'angle AOM correspondant à sa position M à l'époque quelconque t sera égal à $\frac{\pi t}{T}$ et l'on aura :

$$AP = OA - OP = r - r\cos\frac{\pi t}{T} = y,$$

$$MP = r\sin\frac{\pi t}{T} = Vt - x.$$

Et si nous supposons qu'en même temps que le point M décrit la circonférence, le centre de celle-ci se meuve, dans la direction OC des x positifs avec une vitesse V, le diamètre vertical OA aura parcouru, depuis l'époque $t = 0$ où son abscisse était nulle, un espace horizontal Vt, et le point M aura alors pour abscisse $Vt - MP$, c'est-à-dire précisément l'abscisse x de la courbe de niveau.

Ainsi, une courbe de niveau quelconque est engendrée par un point mobile parcourant, avec une vitesse angulaire constante, une circonférence de cercle placée dans un plan vertical et animée elle-même d'un mouvement de translation horizontale avec une vitesse constante. La courbe ainsi définie est une *trochoïde*, se transformant en une cycloïde lorsque la vitesse de translation horizontale est égale à la vitesse linéaire du point mobile sur la circonférence.

206. Relation entre la longueur et la vitesse d'une onde. — Pendant le temps 2T que met le point mobile à décrire la circonférence entière, celle-ci s'est avancée horizontalement d'une quantité que nous appellerons 2L et qui est égale à 2T.V ; nous en déduirons :

$$L = TV,$$

et si nous observons que, d'après les deux dernières (38) :

$$V = \frac{gT}{\pi},$$

nous pourrons écrire, entre toutes ces quantités, les relations :

$$(10)\quad L = \frac{gT^2}{\pi}, \qquad T = \sqrt{\frac{\pi L}{g}}, \qquad V = \sqrt{\frac{gL}{\pi}}, \qquad \frac{\pi}{T} = \sqrt{\frac{\pi g}{L}}.$$

Et il nous suffira de connaître une des quantités L, T, V pour en déduire les deux autres. Ces relations, entre la demi-longueur L et la demi-période T des vagues, nous montrent que les vagues de même longueur 2L sont décrites dans le même temps 2T quelle que soit leur hauteur ; la vitesse de translation V et la vitesse angulaire $\frac{\pi}{T}$ ne dépendent que de L[1].

207. Condition de continuité. — Si donc nous superposons des courbes de niveau ayant la même longueur 2L, en les plaçant de manière que tous les sommets soient sur des verticales distantes de 2L, ces trajectoires seront toutes parcourues, dans le même temps 2T, par les diverses molécules liquides. Mais, pour qu'elles puissent l'être simultanément, par des particules faisant partie d'une même masse liquide, il doit exister entre les dimensions de ces courbes et leur espacement des relations nécessaires, que nous allons déterminer en tenant compte de l'invariabilité du volume des éléments de cette masse.

Soient AM, A'M' (fig. 100) deux courbes de niveau infiniment voisines ; BC, B'C' les trajectoires horizontales des centres des cercles générateurs dont les rayons r et $r + dr$ sont BA et B'A'. Au bout du temps t, lorsque les centres des circonfé-

1. Les quantités auxiliaires b, v_0, R_0 dont nous nous sommes servis pour établir les équations peuvent être, si on le veut, calculées d'après les équations (38) en fonction de L, V, T et de r, mais leur connaissance ne présente aucun intérêt.

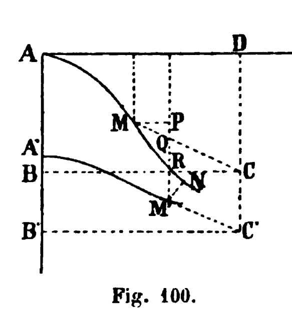


Fig. 100.

rences sont venues de BB′ en CC′, les points mobiles M, M′ ont parcouru des angles égaux, de telle sorte que les rayons CM, C′M′ joignant ces points aux centres C, C′ sont parallèles et font avec la verticale C′CD le même angle $\frac{\pi t}{T}$ que, pour simplifier, nous appellerons φ.

Soit z_0 la profondeur de la ligne BC au-dessous de celle qui correspond à la surface libre, $z_0 + dz_0$ celle de la ligne B′C′. Menons par M une horizontale MP et par M′ une verticale rencontrant aux points R, Q, P, la trajectoire AM, le rayon MC et l'horizontale MP ; enfin, abaissons M′N normale sur la trajectoire AMN. Le volume d'eau qui, dans l'unité de temps, passe entre les deux surfaces de niveau est égal à $v \times$ M′N et il doit être indépendant de la position du point M′, c'est-à-dire de l'angle φ. Les deux triangles semblables M′RN et MRP donnent :

$$M'N = M'R.\frac{MP}{MR} = M'R\,\frac{dx}{ds}.$$

D'autre part :

$$M'R = M'Q + QP - PR = C'C + MQ\cos\varphi - MQ\sin\varphi\,\frac{dy}{dx},$$

$C'C = dz_0$ et $MQ = -\,dr$, ce qui donne :

$$M'R = dz_0 - dr\cos\varphi + dr\sin\varphi\,\frac{dy}{dx},$$

et par suite

$$M'N = M'R\frac{dx}{ds} = (dz_0 - dr\cos\varphi)\frac{dx}{ds} + dr\sin\varphi\,\frac{dy}{ds};$$

multipliant les deux membres par v et remarquant que les produits $v\frac{dx}{ds}$ et $v\frac{dy}{ds}$ sont respectivement, puisque $ds = v dt$, les composantes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ de la vitesse, il vient

$$v \times M'N = (dz_0 - dr \cos \varphi) \frac{dx}{dt} + dr \sin \varphi \frac{dy}{dt};$$

ou bien, en mettant pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs (39) avec φ au lieu de $\frac{\pi t}{T}$:

$$v \times M'N = (dz_0 - dr \cos \varphi)\left(V - \frac{\pi r}{T} \cos \varphi\right) + dr \sin \varphi . \frac{\pi r}{T} \sin \varphi$$

$$= V \left[dz_0 + \frac{\pi r}{L} dr - \left(dr + \frac{\pi r}{L} dz_0\right) \cos \varphi\right].$$

Il faut, d'après ce qui vient d'être dit, que cette quantité soit indépendante de l'angle φ, ce qui exige que :

$$(41) \qquad dr + \frac{\pi r}{L} dz_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dr}{r} + \frac{\pi dz_0}{L} = 0$$

c'est-à-dire que :

$$\text{Log}\, r + \frac{\pi z_0}{L} = \text{constante}.$$

Pour déterminer cette constante, appelons $2h$ la hauteur des vagues, ou h le rayon de la circonférence décrite par les molécules de la surface libre, pour laquelle $z_0 = 0$, la constante sera $\frac{L}{\pi}$ Log h, et l'équation précédente deviendra :

$$\text{Log}\, \frac{r}{h} + \frac{\pi z_0}{L} = 0,$$

ou bien, en passant des logarithmes aux nombres :

$$(42) \qquad r = he^{-\frac{\pi z_0}{L}}.$$

Lorsque la profondeur z_0 croît en progression arithmétique, le rayon r des circonférences décroissent en progression géométrique.

208. État ondulatoire d'une masse liquide. — De ce

qui précède il résulte que si l'on place les unes au-dessus des autres des trochoïdes de même longueur 2L et dont les hauteurs $2r$ varient suivant cette loi, les molécules liquides pourront les parcourir simultanément pendant le même temps 2T en constituant toujours une masse liquide continue.

Cela restera vrai, évidemment, si l'on imprime à l'ensemble de toutes ces courbes et de la masse liquide un mouvement de translation horizontal commun avec une vitesse quelconque — W, et en particulier si cette vitesse est précisément égale et contraire à V. Alors les sommets des vagues, en tant que formes géométriques, marchent avec cette vitesse V vers les x négatifs et les centres des circonférences, trajectoires des points décrivant les trochoïdes, sont immobiles. Les molécules liquides décrivent précisément ces circonférences et tournent ainsi constamment autour de points fixes, avec des vitesses angulaires constantes et les mêmes pour toutes.

On voit d'ailleurs que le sens du mouvement apparent de propagation des vagues est le même que celui de la vitesse des molécules liquides quand elles passent aux points les plus élevés de leurs trajectoires circulaires.

Pour que la masse liquide puisse rester continue dans toutes ses parties et que ses molécules puissent en même temps avoir le mouvement qui vient d'être défini, il faut qu'à une profondeur z_0 quelconque, ces molécules décrivent une circonférence de rayon r donné par l'équation (42). Cette condition est incompatible avec celle d'un fond solide, aussi les lois que nous venons d'établir ne s'appliquent-elles rigoureusement que dans le cas d'une profondeur indéfinie. Si la profondeur est très grande, les rayons des circonférences que devraient décrire les molécules du fond sont très petites et la perturbation que leur immobilité forcée dans le sens vertical apporte aux lois du mouvement est négligeable.

Sous cette restriction, les formules précédentes sont applicables aux ondulations liquides présentant l'aspect de houle ou de vagues courantes. Ainsi, une houle dont les vagues se

succèdent à des intervalles 2T = deux secondes, par exemple, se propage avec une vitesse $V = \frac{gT}{\pi} = \frac{9.81}{3.14} = 3^m12$ par seconde et parcourt 11.240 mètres en une heure. Sa longueur 2L ou la distance entre les sommets de deux vagues consécutives est $2L = \frac{3gT^2}{\pi} = 6^m24$ environ dans une eau d'une profondeur indéfinie.

209. Pression en un point quelconque. — On peut se proposer de calculer la pression en un point quelconque de la masse liquide en état d'oscillation. Nous avons vu plus haut (page 429) que la pression normale, par unité de longueur, sur une molécule de masse m avait pour valeur, en la représentant par dp :

$$dp = \frac{m}{v_0 dt}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right).$$

Or, d'après les relations (38) et (40) nous avons:

$$\frac{v_0^2}{R_0} = \frac{\pi g r}{TV} = \frac{\pi g r}{L};$$

il en résulte que

$$dp = \frac{mg}{v_0 dt}\left(1 - \frac{\pi r}{L}\right).$$

Si nous considérons l'onde qui correspond au cercle générateur dont le centre serait à la profondeur quelconque z_0, le sommet de cette onde sera à la profondeur $(z_0 - r)$ et le volume dont m est la masse aura pour valeur $v_0 dtd(z_0 - r)$. De sorte que, si Π est le poids spécifique du liquide, le poids mg de la masse m sera $mg = \Pi v_0 dtd(z_0 - r)$. Et par conséquent la pression dp sera exprimée par :

$$dp = \Pi d(z_0 - r)\left(1 - \frac{\pi r}{L}\right) = \Pi\left(dz_0 - dr - \frac{\pi r}{L}dz_0 + \frac{\pi r}{L}dr\right)$$

or, nous avons démontré plus haut (41) que $dr + \frac{\pi r}{L}dz_0 = 0$, il reste donc :

$$dp = \Pi \left(dz_0 + \frac{\pi r}{L}\, dr\right) \cdot$$

Et, en intégrant depuis la surface libre où $p = 0$, $z_0 = 0$, $r = h$:

$$p = \Pi \left[z_0 - \frac{\pi}{2L}(h^2 - r^2)\right].$$

Si l'on considère une profondeur assez grande pour que r soit négligeable, la hauteur représentative de la pression est simplement

$$z_0 - \frac{\pi h^2}{2L},$$

et nous allons voir qu'elle aurait la même valeur si le liquide était en équilibre, et immobile.

210. Niveau d'équilibre différent du niveau moyen. — Il nous suffira, pour cela, de chercher quel serait le niveau du liquide revenu au repos.

La forme de la courbe affectée par la surface libre, dont les saillies sont beaucoup moins longues que les creux, fait supposer que le niveau moyen, ou la ligne qui partage en deux parties égales la hauteur des vagues superficielles, se trouve au-dessus du niveau qui correspondrait à l'équilibre ou au liquide immobile.

Menons, à la surface libre, une tangente à son point le plus bas, soit à une distance $2h$ de l'axe des x, et évaluons l'aire comprise entre cette horizontale et la surface libre. Cette aire sera :

$$\int_0^{2L} (2h - y)\, dx.$$

Mettons pour y et x leurs valeurs (39) en remplaçant toujours, pour simplifier, $\frac{\pi t}{T}$ par φ et VT par L, et en prenant d'ailleurs pour r la valeur h qui convient à la surface libre ; nous aurons :

$$y = h\,(1 - \cos\varphi), \qquad dx = \left(\frac{L}{\pi} - h\cos\varphi\right) d\varphi\,;$$

et en effectuant la substitution et l'intégration de 0 à 2π :

$$\int_0^{2L} (2h - y)\, dx = 2h\,L - \pi h^2.$$

Si l'on suppose cette surface répartie également sur la longueur 2L d'une vague, la hauteur du rectangle équivalent sera :

$$h_0 - \frac{\pi h^2}{2L}\,.$$

Par conséquent le niveau d'équilibre se trouve au-dessous du niveau moyen, lequel est à la hauteur h, d'une hauteur égale à $\frac{\pi h^2}{2L}$. La pression que le liquide en équilibre exercerait sur un point placé à une profondeur z_0 au-dessous de l'horizontale partageant en deux la hauteur des vagues serait donc bien mesurée par une hauteur $z_0 - \frac{\pi h^2}{2L}$.

La longueur 2L est toujours notablement plus grande que $2\pi h$ par conséquent la surélévation du niveau moyen au-dessus du niveau d'équilibre est toujours notablement inférieure à $\frac{\pi h^2}{2\pi h} = \frac{h}{2}$ ou au quart de la hauteur $2h$ des vagues[1].

1. Le fait que le niveau moyen (la ligne horizontale qui partage en deux parties égales la hauteur des vagues) est plus élevé que le niveau d'équilibre d'une quantité mesurée par le quotient de l'aire de l'orbite d'une molécule par la longueur 2L de l'onde est une loi géométrique générale, qui s'applique lorsque les molécules décrivent des trajectoires fermées quelconques.

Si un point mobile M parcourt avec une vitesse linéaire constante une trajectoire fermée pendant que celle-ci se déplace avec une vitesse constante V de même sens que la vitesse de la molécule au sommet le plus élevé de sa trajectoire, l'aire comprise entre la trajectoire réelle du point et une horizontale quelconque située au-dessous d'elle, différera de l'aire rectangulaire de la trajectoire du centre de gravité de la courbe fermée d'une quantité égale à l'aire enfermée par cette courbe. Quelle que soit la courbe fermée AB (fig. 101) parcourue avec une vitesse constante pendant qu'elle se déplace horizontalement avec une vitesse V, l'aire OAB'A'X diffère de l'aire OEFX (EF étant me-

211. Déferlement. — Nous avons vu que la forme de la surface libre, de même que celle de toutes les surfaces de niveau, était une trochoïde dont la cycloïde est un cas particulier. La trochoïde se transformerait en cycloïde si la longueur 2L était précisément égale à $2\pi h$, mais alors la forme théorique des vagues serait une pointe aigüe correspondant au contact de deux arceaux successifs de cycloïde, et il est bien évident qu'un pareil résultat est irréalisable : la vague déferlerait bien avant. C'est pourquoi la longueur 2L est toujours beaucoup plus grande que $2\pi h$. Le déferlement se produit lorsque la hauteur h est grande par rapport à L, mais le rapport qui doit exister entre ces deux quantités pour que le phénomène s'observe varie avec les circonstances.

Lorsque des vagues se propagent dans un courant dans lequel la vitesse de l'eau est plus grande à la surface qu'au fond et que le sens de la propagation est inverse de celui du courant, ce qui arrive, par exemple, lorsque les vagues de la mer se propagent dans un fleuve, à son embouchure, les molécules superficielles, rencontrant des vitesses plus grandes que celles qui se trouvent plus bas, sont repoussées en arrière, et les sommets de toutes les courbes de niveau, au lieu d'être situés sur une même verticale, se trouvent reportés sur une ligne inclinée et le déferlement se produit alors vers l'arrière ou en sens contraire du mouvement de propagation. Au contraire,

née par le centre de gravité G de la courbe), d'une quantité mesurée par l'aire fermée AMBM'. Soit, en effet, une ordonnée MP $= z$ se déplaçant de dx sur la

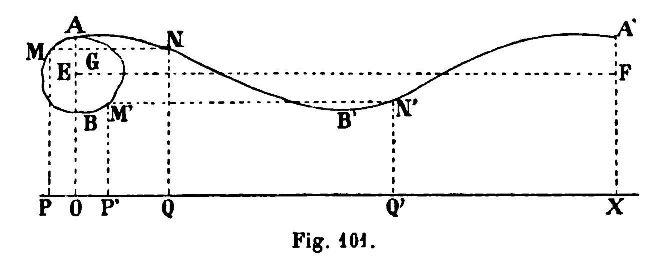


Fig. 101.

courbe fermée, pendant le temps dt. Si cette ordonnée correspond à un point de la courbe où la projection horizontale de sa vitesse soit de sens contraire

le déferlement se produit vers l'avant lorsque les molécules profondes sont ralenties dans leur marche plus que celles de la surface, comme, par exemple, lorsque des ondes se propagent sur une plage en pente douce.

212. Energie totale d'une onde d'oscillation. — Il est facile de calculer l'énergie totale d'une onde d'oscillation.

La hauteur moyenne d'une onde au-dessus de son niveau d'équilibre étant $\frac{\pi r^2}{2L}$, son énergie potentielle, pour une tranche de hauteur dz_0 et de longueur 2L, sera égale à son poids $2\rho g L dz_0$ multiplié par cette hauteur $\frac{\pi r^2}{2L}$ ou bien à $\rho g \pi r^2 dz_0$. En mettant pour r sa valeur $r = e^{-\frac{\pi z_0}{L}}$ et intégrant depuis la surface libre $z_0 = 0$ jusqu'à une profondeur donnée $z_0 = z_1$, on trouve pour cette énergie potentielle : $\frac{\rho g h^2}{2} L \left(1 - e^{-\frac{2\pi z_1}{L}}\right)$.

L'énergie actuelle est la somme des produits $\frac{mv^2}{2}$. La vitesse v est la même pour toutes les molécules d'une couche d'épaisseur dz_0, car la vitesse angulaire d'une de ces molécules est $\frac{\pi}{T}$. On a donc $v = \frac{\pi r}{T}$ et, la masse totale de la couche étant $2\rho L dz_0$, l'énergie actuelle de la couche est $\frac{\rho L \pi^2 r^2}{T^2} dz_0$ ou bien, puisque

à V, le déplacement dx dans la courbe fermée correspondra à un déplacement $Vdt - dx$ au point N de la trajectoire réelle. Si, au contraire l'ordonnée $M'P' = z'$ correspond à un point où les vitesses horizontales soient de même sens, le même déplacement correspondra à $Vdt + dx$, au point N' de la trajectoire.

L'aire de la courbe fermée est $\int (z - z')\, dx = \Omega$. Celle qui est comprise entre la trajectoire AB'A' et OX est $\int z\,(Vdt - dx) + \int z'\,(Vdt + dx) = \int (z + z')\, Vdt - \int (z - z')\, dx = V \int (z + z')\, dt - \Omega$.

Or la courbe fermée étant parcourue avec une vitesse constante, dt est proportionnel aux arcs ds de cette courbe et l'intégrale $\int (z + z')\, dt = \int z_1\, dt$, en appelant z_1 l'ordonnée OE du centre de gravité G de la courbe. Ce qui démontre le théorème.

$\frac{\pi L}{T^2} = g$, elle vaut $\rho g \pi r^2 dz_0$ ou exactement la même chose que l'énergie potentielle.

L'énergie totale sera donc le double de la valeur de celle-ci, ou bien, en la désignant par ρgE comme ci-dessus :

$$\rho g E = \rho g L h^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi z_1}{L}}\right).$$

Si la profondeur z_1 est assez grande pour que l'exponentielle puisse être négligée devant l'unité, on aura :

$$\rho g E = \rho g L h^2$$

ou bien, en mettant pour L sa valeur $\frac{\pi V^2}{g}$:

$$\rho g E = \rho . \pi h^2 . V^2.$$

L'énergie d'une onde est donc égale (ou un peu inférieure) à la masse liquide contenue dans le cercle d'oscillation des molécules superficielles, multipliée par le carré de la célérité apparente de la propagation.

213. Formules applicables aux masses liquides de profondeur limitée. — Lorsqu'au lieu de se propager dans une eau d'une profondeur indéfinie, la houle se produit dans une masse liquide de profondeur H, M. Boussinesq a montré que le mouvement des molécules liquides était encore analogue, seulement, au lieu de décrire des circonférences de cercle de rayons $r = he^{-\frac{\pi z_0}{L}}$, elles décrivent des ellipses dont le demi grand axe horizontal r et le demi petit axe vertical r' ont les valeurs suivantes en fonction de z_0, H et de L, demi-longueur des vagues[1] :

$$r = h \frac{\text{coh}\, \pi \frac{H - z_0}{L}}{\text{sih}\, \pi \frac{H}{L}}, \qquad r' = h \frac{\text{sih}\, \pi \frac{H - z_0}{L}}{\text{sih}\, \pi \frac{H}{L}},$$

1. On trouvera la démonstration de ces formules, ou bien dans le Mémoire de M. Boussinesq sur les ondes liquides périodiques, ou bien dans les *Annales des Ponts et chaussées*, 1888, 1er semestre, pages 782 et suivantes.

et la demi période T de l'oscillation a pour expression :

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{g} \coth \pi \frac{H}{L}}.$$

La célérité V de la propagation est alors :

$$V = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{\pi} \tanh \pi \frac{H}{L}}.$$

Et lorsque la profondeur H est assez petite par rapport à L pour que $\frac{\pi H}{L}$ soit inférieur à $\frac{1}{4}$ par exemple, tah $\frac{\pi H}{L}$ ne diffère de $\frac{\pi H}{L}$ que de moins de $\frac{1}{50}$ de sa valeur et l'on a approximativement :

$$V = \sqrt{gH},$$

formule qui a été donnée par Lagrange et qui est identique à celle que nous avons trouvée pour les ondes de translation dont la saillie h est petite par rapport à la profondeur H.

L'élévation du niveau moyen au-dessus de la surface d'équilibre est $\frac{\pi rr'}{2L}$, et l'énergie de l'onde $\rho\pi rr'V^2 = \rho gh^2 L$ est proportionnelle au carré de la hauteur des vagues et à la première puissance de leur longueur.

Cela suppose, toutefois que les frottements du liquide sur lui-même et sur le fond sont négligés. L'effet de ces frottements modifie un peu ces conclusions. Il a pour conséquence, par exemple, de rapprocher de la forme circulaire les trajectoires elliptiques des molécules, à partir d'une certaine hauteur au-dessus du fond et même de renverser le sens des axes, le grand axe de l'ellipse étant vertical et le petit axe horizontal lorsque l'on est à une distance suffisante du fond[1]. Il a

1. M. de Caligny a observé (*Hydraulique*, 1re partie, page 295) les axes verticaux et horizontaux des trajectoires elliptiques des molécules dans un mouvement de houle ; il a trouvé les valeurs suivantes :

aussi pour conséquence de diminuer un peu les célérités de la propagation et d'éteindre progressivement la houle, c'est-à-dire d'en diminuer la hauteur. Le coefficient d'extinction est inversement proportionnel au carré de la demi-longueur L de la houle, et par suite les houles les plus courtes disparaissent bien plus rapidement que les plus longues. C'est ce qui explique comment, à la suite de mouvements tumultueux produisant des ondes de toutes formes et de toute amplitude, il s'établit souvent, après un certain temps, une houle unique régulière et dont l'amplitude est la plus grande.

§ 4.

CLAPOTIS

214. Effet de la superposition de deux houles se propageant en sens contraire. — Au lieu de considérer une masse liquide indéfinie dans tous les sens, supposons-la limitée par un plan vertical perpendiculaire à l'axe des x et supposons que, sur ce plan, les vitesses des diverses molécules en mouvement se réfléchissent suivant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence et en conservant leurs grandeurs : le mouvement des molécules, après leur réflexion, sera celui d'une houle égale à la première mais se propageant en sens contraire, et ce mouvement se superposera à celui de la première houle. Le mouvement résultant constitue le clapotis. Pour nous rendre compte de ce qu'il peut être, nous allons figurer séparément les trajectoires circulaires des molécules dans

au fond............axe horizontal	$0^m,022$	......axe vertical $0^m,000$
à $0^m,09$ au-dessus du fond.........	0,027	 0,009
à 0,18	0,032	 0,018
à 0,27	0,040	 0,029
à 0,36 (surface)..................	0,055	 0,060

les deux houles qui se superposent. Celles de la houle directe sont celles de la ligne supérieure de la figure 102, et celles de la houle réfléchie sont sur la seconde ligne. Les points marqués des mêmes numéros 0, 1, 2... 11 sur chacune de ces circonférences indiquent les positions simultanées, sur toutes ces trajectoires, de molécules appartenant à la même surface de niveau, la période 2T de leur mouvement orbitaire ayant été divisée en 12 parties égales. Si l'on applique le n° 0 à l'époque à laquelle une même molécule AA′ est au point le plus élevé de sa circonférence dans la houle directe et au point le plus bas dans la houle réfléchie, on voit que cette molécule, à une époque quelconque, sera toujours sur la ligne horizontale de niveau, car les composantes verticales de son déplacement, dans ses deux mouvements simultanés, seront toujours égales et de signes contraires. Pour une autre molécule quelconque BB′, distante de AA′ d'une longueur AB = A′B′ égale à une fraction déterminée $\frac{1}{n}$ de la longueur 2L de l'onde $\left(\text{ici}, \frac{1}{12}\right)$, les positions simultanées de cette molécule se trouvent toujours sur une même parallèle à la ligne B0, B′0 et à égale distance, de part

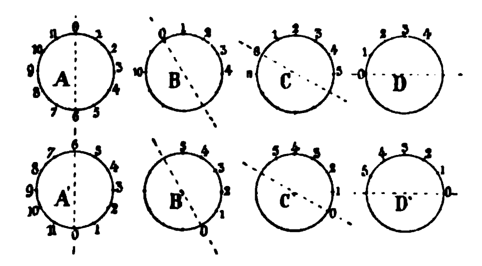


Fig. 102.

et d'autre, de la perpendiculaire à cette ligne menée par B, B′; le déplacement résultant sera donc toujours nul sur la ligne B0, B′0 et il s'effectuera uniquement sur une perpendiculaire à cette ligne, laquelle fait avec l'horizontale un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$; à une époque quelconque, la distance de la molécule à

son centre d'oscillation B, B' sera la même que la distance de la molécule A à son centre d'oscillation, car évidemment la somme des distances, au diamètre passant par les points marqués 0, des deux points portant un même numéro quelconque, est la même pour toutes les circonférences. Il en résulte que, dans le clapotis, les molécules liquides décrivent des trajectoires rectilignes diversement inclinées et qu'à une époque quelconque, toutes les molécules appartenant à un même plan horizontal d'équilibre sont à la même distance de leur centre d'oscillation.

L'angle des trajectoires rectilignes avec l'horizontale, constant pour chaque molécule, croît proportionnellement à la distance horizontale des molécules entre elles.

L'amplitude de l'oscillation est double de celle de chacune des deux houles qui se superposent ; il en résulte que, pour une même longueur 2L de l'onde, la hauteur des vagues du clapotis est double de celle de la houle qui lui a donné naissance.

La surface libre, dans le clapotis, varie de forme à chaque instant, mais les saillies et les creux restent toujours sur les mêmes verticales, les saillies y alternant avec les creux de façon que les ondes s'élèvent et s'abaissent sur place sans présenter l'apparence d'un mouvement de propagation ; toutes les molécules repassent simultanément et à intervalles égaux par leurs positions d'équilibre. A mi-distance des verticales où se produisent les saillies et les creux, il y a un point où les molécules n'éprouvent que des déplacements horizontaux, c'est-à-dire que la surface libre y reste constamment en coïncidence avec celle d'équilibre.

Le clapotis est le mouvement périodique naturel des liquides contenus dans des espaces fermés, de même que la houle est le mouvement naturel des masses liquides indéfinies. Et, les mouvements secondaires s'éteignant, comme nous l'avons dit, bien plus vite que les autres sous l'influence des frottements, les mouvements divers donnent naissance, après un certain

temps, dans un espace fermé, à un clapotis dont la demi-longueur d'onde L est égale à la largeur de cet espace.

La relation fondamentale

$$\pi L = gT^2$$

établie pour la houle, subsiste évidemment pour le clapotis qui se produit dans une eau d'une profondeur infinie. Mais lorsqu'il s'agit d'une profondeur finie H, c'est la formule de Lagrange :

$$V = \frac{L}{T} = \sqrt{gH}$$

que l'on doit appliquer.

215. Seiches des grands lacs. — Un des exemples les plus remarquables et les mieux étudiés des grandes ondes clapoteuses est le phénomène connu sous le nom de *Seiches* des lacs. Les seiches de plusieurs lacs suisses, et en particulier celles du lac Léman, ont été décrites d'une manière très précise et très détaillée par M. Forel, professeur à l'académie de Lausanne, à qui nous empruntons tout ce qui suit.

Nulle part les oscillations du lac, désignées sous le nom de seiches, ne sont plus fortes qu'à Genève où elles ont atteint parfois une amplitude verticale d'un mètre, un mètre et demi et même deux mètres. On constate sur le lac Léman, deux sortes d'oscillations, les unes longitudinales, les autres transversales ; la période des premières est de 72 minutes, celle des secondes de 10 minutes ; l'amplitude de ces dernières n'a jamais dépassé 12 centimètres. Ces durées s'accordent parfaitement avec la formule de Lagrange en prenant pour L soit la longueur, soit la largeur du lac et pour H sa profondeur moyenne, d'environ 200 mètres.

M. Forel indique, comme se rattachant au même phénomène, de magnifiques oscillations rhythmiques, très régulières, atteignant 45 centimètres d'amplitude avec une durée de 20 à 21 minutes, observées par M. Airy sur les tracés du marégraphe de Malte en 1872. Il donne aussi l'exemple de l'Euripe,

détroit qui sépare la Béotie de l'île de Négrepont, dans lequel se produisent des courants assez intenses pour mettre en mouvement des roues de moulins, mais présentant cette particularité de changer de direction plusieurs fois par jour. Ordinairement, ce changement de direction se produit quatre fois par jour lunaire de $24^h\ 50^m$ et correspond à la marée ordinaire, mais quelquefois les changements sont beaucoup plus fréquents et se produisent 12 à 14 fois par jour, soit après une durée de 100 à 130 minutes. D'après M. Forel, ces courants sont dus, alors, à un mouvement d'oscillation des eaux du canal d'Atalante, analogue à celui qui a été constaté dans le lac Léman, c'est-à-dire à un grand clapotis. Le canal d'Atalante, qui s'étend au nord-ouest de l'Euripe, forme un bassin presque absolument fermé d'une longueur de 115 kilomètres et dont la profondeur moyenne est de 100 à 150 mètres.

M. Forel cite encore les seiches observées sur le lac George, en Australie, par M. H. C. Russell. La longueur de ce lac est de 29 kilomètres, sa profondeur moyenne de 5^m50 environ et la durée des oscillations de 131 minutes. Ces chiffres, comme les précédents, sont d'accord avec la formule de Lagrange.

§ 5.

COLONNES LIQUIDES OSCILLANTES.

216. Oscillations de l'eau dans les tubes. — Indépendamment des mouvements oscillatoires de masse, comme ceux que nous venons d'étudier, les oscillations dans les tubes ou tuyaux présentent un grand nombre de particularités intéressantes dont il peut être utile de signaler les principales. L'étude de ces oscillations a été faite, surtout expérimentalement, par M. de Caligny, et l'on trouvera dans ses deux volumes d'hydraulique de très nombreuses expériences dans lesquelles la force vive du liquide en mouvement est transformée

de la manière la plus ingénieuse, pour produire des effets variés.

La première, la plus simple et on pourrait dire l'expérience fondamentale consiste en ceci. Si dans un tube en U (fig. 103) placé comme un siphon renversé, l'on a, dans l'une des deux branches, de l'eau à un niveau A supérieur à celui B auquel elle est maintenue dans la seconde et si on abandonne le liquide à lui-même, le niveau A s'abaissera et le niveau B se relèvera, mais ni l'un ni l'autre ne s'arrêteront lorsqu'ils auront atteint le niveau d'équilibre MN. En vertu de la vitesse acquise alors par le liquide, le mouvement se continuera, et si les frottements sont négligeables, le niveau B remontera en B′ et le niveau A s'abaissera en A′, à des distances du niveau MN égales mais de sens contraire à celles où ils se trouvaient au commencement du mouvement. Puis le mouvement inverse se produira, et ainsi de suite. Les frottements seuls empêchent cet effet de se produire indéfiniment et diminuent chaque fois l'amplitude de l'oscillation.

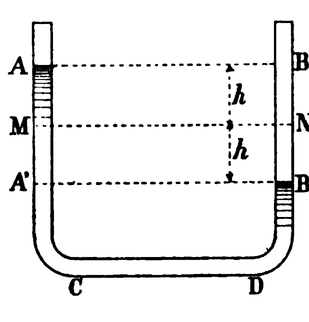


Fig. 103.

Rien n'est plus simple que l'explication théorique de ce fait et le calcul de la durée théorique de l'oscillation. Soit $2h$ la dénivellation primitive, $2x$ cette dénivellation à une époque t quelconque, ω la section transversale du tube, supposée constante et L la longueur ACDB de la colonne oscillante; la force accélératrice à l'époque t considérée sera en valeur absolue $\Pi\omega.2x$. Si l'on compte les x positifs, à partir du niveau MN vers le bas, dans la branche AA′, de manière qu'à l'origine du mouvement l'on ait $x = -h$, la force accélératrice sera positive lorsque x sera négatif et inversement; on devra donc, pour mettre en évidence son signe réel, l'affecter du signe —. Alors, toute la masse $\frac{\Pi}{g}\omega L$ étant animée de la même accéléra-

tion $\frac{d^2x}{dt^2}$, on aura pour l'équation du mouvement :

$$-\Pi\omega . 2x = \frac{\Pi}{g} \omega L \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou bien, en supprimant le facteur commun $\Pi\omega$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{2L} x$$

dont l'intégrale, particularisée pour exprimer qu'à l'époque $t = 0$ la vitesse est nulle et $x = -h$, est :

$$x = -h \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}\, t,$$

C'est bien l'équation d'un mouvement oscillatoire pendulaire dont la période, ou le temps qui s'écoule entre les instants où le niveau parti de A revient à sa position primitive, est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{2L}{g}};$$

cette période dépend de L et nullement de la dénivellation primitive $2h$.

Un résultat analogue s'obtiendrait si le tube CD (fig. 104), qui met en communication les deux tubes verticaux, était d'un diamètre différent de ceux-ci. La durée de l'oscillation serait seule modifiée.

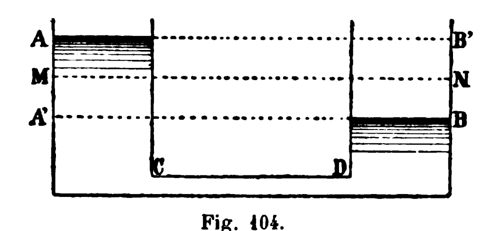


Fig. 104.

Si nous appellons alors Ω l'aire de la section horizontale de chacun des bassins verticaux, H la hauteur du niveau d'équilibre MN au-dessus du tube CD, L et ω la longueur et la section transversale de ce tube, V la vitesse à un instant quel-

conque dans les bassins verticaux, u la vitesse au même instant dans le tube horizontal, nous aurons $u = \frac{\Omega}{\omega} V$.

Appliquons le théorème des forces vives à un déplacement infiniment petit dx du niveau dans les deux bassins, pendant lequel la force motrice égale alors à $\Pi\Omega.2x$ a produit un travail $\Pi\Omega.2xdx$, auquel correspond un accroissement de force vive égal, d'une part, à $\frac{\Pi}{g} 2\Omega H.VdV$ et d'autre part à $\frac{\Pi}{g}\omega udu$. Remarquons d'ailleurs que si x et dx sont de même signe, V et dV sont de signes contraires, ou inversement. Nous écrirons donc l'équation :

$$-\Pi\Omega 2xdx = \frac{\Pi}{g}\Omega . 2HVdV + \frac{\Pi}{g}\omega Ludu.$$

Mettons pour u et du leurs valeurs en V et dV, il viendra :

$$\frac{1}{g}\left(H + \frac{L}{2}\frac{\Omega}{\omega}\right) VdV + xdx = 0.$$

D'où, en intégrant et remarquant que $V = 0$ pour $x = h$:

$$\left(H + \frac{L}{2}\frac{\Omega}{\omega}\right)\frac{V^2}{2g} = \frac{h^2 - x^2}{2}.$$

La même équation, différentiée par rapport à t, donne, puisque $V = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{1}{g}\left(H + \frac{L}{2}\frac{\Omega}{\omega}\right)\frac{d^2x}{dt} = -x;$$

en posant pour abréger :

$$\lambda = H + \frac{L}{2}\frac{\Omega}{\omega},$$

elle devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda}x,$$

identique à celle que nous avons trouvée plus haut, sauf que la longueur $\frac{L}{2}$ est remplacée par λ. La durée de l'oscillation totale sera alors :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g} + \frac{L}{2g}\frac{\Omega}{\omega}}.$$

Cela suppose toujours que l'on néglige les frottements et aussi que les vitesses de tous les points, dans les bassins AA′ et BB′ sont, à une époque donnée, égales entre elles.

Bien que cette hypothèse soit assez éloignée de la réalité, elle donne cependant des résultats d'une approximation suffisante.

217. Colonnes liquides oscillantes pour le remplissage ou la vidange des sas des écluses. — L'emploi de colonnes liquides oscillantes, analogues à celles qui viennent d'être étudiées, a été proposée pour économiser l'eau consommée dans les écluses de navigation pour le passage des bateaux. Si les deux bassins verticaux, AA′, BB′ de la figure précédente représentent deux sas d'écluse accolés ou bien un sas et un bassin d'épargne de même section horizontale, le mouvement alternatif fera passer l'eau du sas dans le bassin ou inversement, et il suffira d'arrêter ce mouvement après la première demi-oscillation pour économiser entièrement toute l'eau des éclusées. Mais cela supposerait que les frottements sont négligables et que la force vive de l'eau qui descend est utilisée tout entière pour remplir le bassin où le niveau s'élève. Il n'en est pas ainsi et on peut se rendre compte facilement que les pertes de force vive susceptibles d'être évaluées ne sont pas négligeables, sans compter celles dont l'évaluation est impossible [1].

Les pertes de charge se composent d'abord de celle qui est due à l'entrée de l'eau dans le conduit CD, égale, d'après ce qui a été dit plus haut (nº 43), à $\frac{1}{2}\frac{u^2}{2g}$; puis de celle qui provient de l'épanouissement dans le second bassin de la veine liquide sortant de CD, égale à $\frac{u^2}{2g}$; et enfin du frottement dans ce conduit CD. Si l'on appelle χ son périmètre mouillé et b_1 le

1. Cette question a été traitée d'abord par M. de Lagrené, dans son *Cours de navigation intérieure*, tome III, pages 135 et suivantes; puis par M. Flamant, dans les *Annales des ponts et chaussées* (1881, 1er semestre, page 81).

coefficient relatif à la nature de ses parois, ce frottement sera exprimé par $L\frac{\chi}{\omega}b_1u^2$ et la perte de charge totale, si on la désigne par ζ, sera ainsi :

$$\zeta=\frac{1}{2}\frac{u^2}{2g}+\frac{u^2}{2g}+L\frac{\chi}{\omega}b_1u^2=u^2\left(\frac{3}{4g}+L\frac{\chi}{\omega}b_1\right),$$

ou bien, en exprimant u en fonction de V et appelant k, pour abréger, le coefficient constant :

$$k=\frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(\frac{3}{2}+2Lg\frac{\chi}{\omega}b_1\right).$$

$$\zeta=\frac{V^2}{2g}\frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(\frac{3}{2}+2Lg\frac{\chi}{\omega}b_1\right)=k\frac{V^2}{2g}\cdot$$

Cette perte de charge correspondra donc à un travail négatif $\Pi\Omega\zeta dx$, pour un déplacement dx de la surface libre de section Ω, et si nous ajoutons ce terme à l'équation du mouvement écrite dans le numéro précédent, elle deviendra :

$$-\Pi\Omega 2xdx-\Pi\Omega\zeta dx=\frac{\Pi}{g}\Omega\,.\,2HVdV+\frac{\Pi}{g}\omega Ludu.$$

ou bien, en divisant par $\Pi\Omega$ et mettant pour ζ sa valeur ci-dessus :

$$\frac{1}{2}\left(H+\frac{L}{2}\frac{\Omega}{\omega}\right)VdV+xdx+k\frac{V^2}{2g}dx=0,$$

ou encore, eu égard à la signification de ce que nous avons appelé λ :

$$\lambda\frac{VdV}{g}+xdx+k\frac{V^2}{2g}dx=0.$$

Si l'on fait $y=\frac{V^2}{2g}$, cette équation prend la forme simple :

$$\lambda\frac{dy}{dx}+x+ky=0\,;$$

et son intégrale générale, en appelant C une constante, est :

$$y=\frac{\lambda}{k^2}-\frac{x}{k}+Ce^{-\frac{k}{\lambda}x}.$$

Et si l'on détermine la constante de manière que pour $x = -h$ la vitesse V soit nulle, ou $y=0$, on trouvera, en définitive :

$$k\frac{V^2}{2g} = \frac{\lambda}{k} - x - \left(\frac{\lambda}{k} + h\right) e^{-\frac{k}{\lambda}(x+h)}.$$

On pourrait, en remplaçant V par $\frac{dx}{dt}$, trouver la loi du mouvement, ou exprimer x en fonction du temps, mais cela ne présente qu'un médiocre intérêt. Ce qui importe davantage, c'est de savoir de combien les résistances passives que l'on a évaluées diminueront l'amplitude de la première oscillation. Or, à la fin de cette première oscillation, la vitesse V s'annule, il faut donc, pour trouver la hauteur à laquelle s'abaissera le niveau A, ou s'élèvera le niveau B par rapport au niveau d'équilibre, chercher la valeur de x pour laquelle V s'annule, ou bien résoudre l'équation :

$$\frac{\lambda}{k} - x - \left(\frac{\lambda}{k} + h\right) e^{-\frac{k}{\lambda}(x+h)} = 0,$$

qui peut s'écrire :

$$\lambda + kh = (\lambda - kx)\, e^{\frac{k}{\lambda}(x+h)}$$

En appliquant cette équation à un exemple donné par M. de Lagrené et pour lequel on avait :

$\Omega = 181^{mq},22$, $L = 100^{m},00$, $H = 3^{m},30$
$\omega = 6^{mq},89$, $\chi = 10^{m},71$, $h = 1^{m},20$

j'ai trouvé pour x' la valeur $x' = 0^{m},76$, soit $h - x' = 0,44$. L'amplitude de l'oscillation serait donc diminuée de $0^{m},44$ au moins, car bien des causes de perte de force vive restent, qui n'ont pas été comprises dans l'évaluation précédente. On devrait donc compter sur une réduction d'environ deux cinquièmes, et l'on n'économiserait, en réalité, que les trois cinquièmes du volume de l'éclusée au lieu de la totalité.

En faisant varier la longueur L de l'aqueduc de communication, l'aire ω de sa section transversale et son périmètre mouillé χ, l'on reconnaît facilement que les pertes de force vive seront d'autant moindres, et par suite l'économie réalisée d'autant plus grande, que la longueur L sera plus grande, que la section ω sera plus grande et que le périmètre mouillé χ sera plus petit. Les aqueducs à oscillations doivent donc être autant que possible longs et de section transversale circulaire très grande. Il y a, d'autre part, utilité évidente à en évaser les extrémités de manière à diminuer les pertes de charge à l'entrée, et il est préférable de n'avoir qu'un seul aqueduc plutôt que deux ou plusieurs présentant ensemble la même section transversale.

218. Appareils de M. de Caligny. — C'est sur des principes analogues que sont établis les appareils proposés par M. de Caligny pour le remplissage et la vidange des sas de navigation et qui ont été expérimentés principalement à l'écluse de l'Aubois, sur le canal latéral à la Loire. Ces appareils ont pour but, en vue d'économiser l'eau : 1° de faire remonter dans le bief d'amont une partie des eaux du sas qui se vide ; 2° de faire entrer, dans le sas qui se remplit, une certaine quantité d'eau provenant du bief d'aval. Je ne puis ici que mentionner très sommairement ces appareils et renvoyer au second volume de l'*Hydraulique* de M. de Caligny, pour le détail des très nombreuses expériences auxquelles ils ont donné lieu, les diverses dispositions proposées par l'auteur, etc.

Voici en quoi ils consistent :

Soit (fig. 105) AA'BB' le sas de l'écluse, AA' le niveau du bief d'amont, BB' celui du bief d'aval. Un aqueduc dit d'aspiration CDE, le plus long possible, vient déboucher dans le sas, généralement dans l'enclave des portes d'aval, en C. A son autre extrémité, en D et en E, l'aqueduc présente à sa partie supérieure deux orifices circulaires sur le pourtour desquels s'ap-

puient deux tubes verticaux FF′ et GG′. Le premier FF′, dit tube d'amont, est placé dans un réservoir communiquant librement avec le bief d'amont et son extrémité supérieure F′ est de quelques centimètres seulement au-dessus du niveau de ce bief. L'autre tube GG′, dit tube d'aval, est de même dans un réservoir communiquant librement avec le bief d'aval au moyen d'un fossé le plus large possible, et son extrémité supérieure G′ s'élève beaucoup au-dessus de celle F′ du premier.

Supposons que, le sas étant plein jusqu'au niveau AA′, il s'agisse de le vider. On soulève le tube GG′, l'eau sort par l'orifice E dans le bief inférieur, et la colonne liquide contenue dans l'aqueduc d'aspiration CDE prend une vitesse croissante. Dès que cette vitesse est devenue assez grande, on laisse retomber le tube GG′. L'eau continue son mouvement en vertu

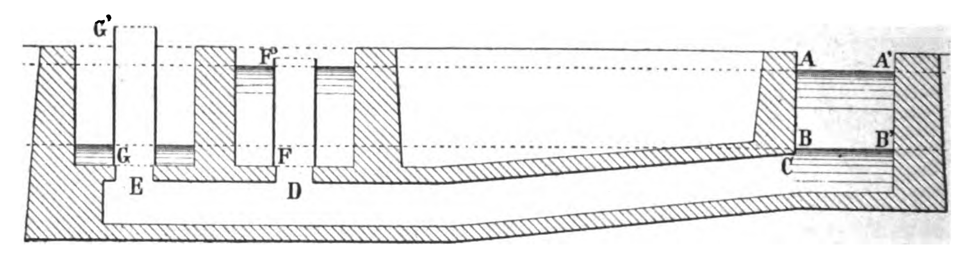


Fig. 105.

de la vitesse acquise et s'élève dans les deux tubes verticaux GG′, FF′; elle dépasse le niveau F′ de ce dernier et se déverse dans le bief supérieur. La vitesse dans l'aqueduc diminue progressivement et finirait par s'annuler, mais on recommence l'opération en soulevant une seconde fois le tube GG′; la vitesse augmente de nouveau et atteint encore une grandeur suffisante pour que, ce tube étant refermé, le niveau s'élève encore dans les deux tubes au-dessus du niveau F′, ce qui correspond encore au déversement dans le bief d'amont d'une certaine quantité d'eau provenant du sas. Et ainsi de suite. Le volume d'eau rejeté dans le bief d'amont va en diminuant à

chaque oscillation, et l'on arrête l'opération dès qu'elle ne donne plus un résultat suffisant ; on achève alors la vidange du sas en maintenant le tube GG′ levé jusqu'à la fin.

Pour opérer le remplissage du sas, on doit faire manœuvrer alternativement les deux tubes. Le niveau dans le sas étant en BB′, on lève le tube d'amont FF′, l'eau d'amont passe par l'ouverture D et se rend dans le sas en faisant acquérir à la colonne liquide contenue dans l'aqueduc DC une vitesse croissante. Dès que cette vitesse est devenue assez grande, on laisse retomber le tube FF′ et on ouvre le tube GG′. Le mouvement de l'eau se continuant dans l'aqueduc DC en vertu de la vitesse acquise, il tend à se produire, en arrière, dans la partie DE, un vide ou une aspiration qui appelle l'eau du bief inférieur par l'orifice E. Lorsque le mouvement s'est arrêté, on abaisse le tube GG′ et on relève le tube FF′, c'est-à-dire que l'on recommence l'opération qui a pour effet, comme on voit, d'entraîner par l'ouverture E, dans l'aqueduc EDC et par suite dans le sas, un certain volume d'eau provenant du bief d'aval.

D'après des expériences très précises faites par M. Vallès, inspecteur général des ponts et chaussées, et dont il a été rendu compte à l'Académie des sciences le 18 janvier 1869, le rendement de cet appareil aurait été de 0,412 pendant le remplissage et de 0,386 pendant la vidange, soit en totalité de 0,798. Cela veut dire que si l'appareil n'avait pas existé, le remplissage de l'écluse aurait exigé un volume V pris au bief d'amont, volume que la vidange du sas aurait ensuite déversé dans le bief d'aval. Avec l'appareil, le remplissage de l'écluse a été fait au moyen de 0,412 V pris au bief d'aval et par conséquent de 0,588 V provenant du bief d'amont. Puis, la vidange du volume V a renvoyé dans le bief d'amont 0,386 V et a laissé écouler dans le bief d'aval 0,614 V. Le bief d'amont n'a donc fourni, en définitive, que $(0,588-0,386)V=0,202\ V$, et le biel d'aval n'a reçu de même que $(0,614-0,412)V=0,202V$. La dépense d'eau se trouve donc réduite au cinquième environ de ce qu'elle aurait été sans l'appareil.

Les manœuvres des tubes peuvent être rendues automatiques, on peut même n'avoir qu'un seul tube mobile, etc. L'étude analytique des oscillations dont il vient d'être parlé conduirait à des équations extrêmement compliquées, desquelles il serait sans doute difficile de tirer des conclusions pratiques intéressantes. La question a, au contraire, été traitée expérimentalement de la manière la plus complète et on peut la considérer comme très suffisamment élucidée pour les applications que l'on voudrait faire des appareils dont il s'agit. Il convient d'ajouter que, moyennant l'adoption d'un diamètre suffisant pour l'aqueduc et les tubes, la durée de la manœuvre peut être réduite de manière à dépasser très peu celle que l'on aurait à faire par les procédés ordinaires.

§ 6.

MARÉES

219. Marées de la mer. — Le phénomène de la marée, que l'on observe dans l'Océan et dans les mers largement ouvertes, est constitué par des ondes périodiques, dont la loi de propagation résulte de l'analyse précédente. La célérité de cette propagation est donnée par la formule de Lagrange :

$$V = \sqrt{gH}$$

dont l'application suppose, à la vérité, la profondeur très grande par rapport à la hauteur de l'onde, mais qui cependant s'accorde assez bien avec l'observation, même dans les mers d'une profondeur relativement faible. Ainsi, d'après M. Comoy [1], la célérité V de la propagation de la pleine mer est de 176 mètres par seconde, entre le cap de Bonne-Espérance et

1. Etudes pratiques sur les marées fluviales et notamment sur le mascaret. Paris, 1881.

Ouessant, ce qui correspond à une valeur de H = 3160 mètres, sensiblement égale à la moyenne des profondeurs observées dans l'Atlantique ; elle n'est au contraire que de 21 mètres par seconde, en moyenne, d'Ouessant à Boulogne, ce qui correspond à une profondeur H = 45 mètres, peu différente de la moyenne donnée par les sondages de la Manche.

La propagation de l'onde-marée entraîne un certain déplacement horizontal du liquide, auquel il faut attribuer les courants alternatifs de marée. Quelquefois, à proximité des côtes, ces mouvements sont giratoires, mais le plus souvent ils changent de sens à chaque marée et présentent un caractère nettement alternatif ou ondulatoire ; ils ne dépendent en rien de la pente superficielle qui dépasse rarement $0^m,01$ par kilomètre, tandis que la vitesse des courants atteint et dépasse souvent deux mètres par seconde. Cette vitesse conserve des valeurs très sensibles alors même que la pente superficielle est tout à fait nulle et elle s'observe même quelquefois en sens inverse de la pente.

Si l'on appelle U la vitesse moyenne du courant et h la hauteur de l'onde, supposée petite par rapport à la profondeur H, on pourra écrire entre ces quantités la relation approximative (8) de la page 407, qui n'exprime rien autre chose que la conservation du volume de la masse liquide. On aura ainsi :

$$\frac{U}{V} = \frac{h}{H}, \tag{43}$$

ou bien, en mettant pour V sa valeur (7),

$$U = h\sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Dans l'hypothèse d'une courbe de marée régulière, ce serait au niveau moyen de la mer que les courants de flot et de jusant devraient se renverser ou, en d'autres termes, c'est à mi-marée que se placeraient les étales de flot et de jusant. En réalité, les courbes de marées sont irrégulières et les étales de flot et de jusant se produisent soit avant, soit après la mi-

marée et toujours à peu près de la même quantité au même lieu. Ainsi, dans la Manche, d'après M. Keller, les courants se renversent exactement à mi-marée en trois points, savoir : au droit d'Eddystone, entre Cherbourg et Barfleur, et vers l'entrée de la Somme. Dans les autres lieux, les étales s'éloignent plus ou moins de la mi-marée.

220. Relation entre la hauteur de la marée et la profondeur de la mer. — Nous avons vu plus haut que l'énergie d'une onde d'oscillation, produite dans une eau de profondeur indéfinie, avait pour expression

$$\rho g \pi h^2 V^2.$$

Si donc, par suite d'une cause quelconque, l'une des deux quantités V ou h, la célérité de la propagation ou la hauteur des vagues, vient à varier, l'autre variera en raison inverse, si la cause dont il s'agit n'est pas accompagnée d'une perte sensible d'énergie. Pour l'onde-marée, on peut dire que la cause qui la produit (l'action combinée de la lune et du soleil) étant la même, l'énergie communiquée à l'onde est indépendante de la célérité de sa propagation ; ou bien encore que si cette onde, par suite de circonstances locales, arrive à se propager plus ou moins vite, sa hauteur diminuera ou augmentera en raison inverse. De la relation :

$$Vh = \text{const.}$$

qui exprime la conservation de son énergie, l'on déduit, en mettant pour V sa valeur en fonction de la profondeur H déduite de la formule de Lagrange :

$$h \cdot \sqrt{H} = \text{const.} \qquad (44)$$

Cette relation a été donnée par M. Comoy (ouvrage cité, p. 103). La hauteur de la marée serait donc, en chaque lieu, et toutes choses égales, inversement proportionnelle à la racine carrée de la profondeur de la mer. Les chiffres qui sont

déduits de la formule (44). dans laquelle on donne à la constante la valeur 20 environ, s'accordent assez bien, d'après M. Comoy, avec les hauteurs des marées observées dans les mers de faible profondeur et avec les rares données que l'on possède sur celles du milieu des mers profondes.

Si l'on considère une molécule superficielle, depuis l'instant de l'étale de jusant, au moment où elle se trouve à mi-marée et sur le point d'être atteinte par l'onde, jusqu'à l'instant de l'étale de flot, au moment où elle se retrouve à mi-marée à son niveau primitif, elle s'est avancée, dans le sens de la propagation, d'une certaine quantité que nous désignerons par l ; sa vitesse moyenne, qui est celle du courant de flot, étant appelée U, le temps qui s'est écoulé entre les instants considérés est $\frac{l}{U}$. D'autre part, la demi-longueur d'onde étant L et V la célérité de la propagation, la surface de l'onde, pour parcourir la longueur $L + l$ aura mis un temps exprimé par $\frac{L+l}{V}$. Egalant ces deux expressions, il vient :

$$l = \frac{LU}{V - U},$$

ou bien, en mettant pour U sa valeur tirée de (43) :

$$l = \frac{Lh}{H - h}. \tag{45}$$

M. Comoy a donné les valeurs de U et de l, d'après les formules (43) et (45), pour diverses profondeurs H et il a trouvé un accord satisfaisant avec les observations.

221. Du flot de fond. — Nous avons dit que, dans les liquides en état d'ondulation, les molécules situées sur le fond se déplaçaient horizontalement avec des vitesses variables : les trajectoires des molécules, circulaires ou elliptiques, s'aplatissent à mesure que l'on s'approche du fond où elles se réduisent à une ligne droite. Lorsque le fond est horizontal, la vitesse du flot de fond est nulle au moment où la hauteur de

l'onde elle-même est nulle ; elle est dirigée dans le sens de la propagation de l'onde dans la période positive de celle-ci et en sens contraire dans la période négative ; elle atteint son maximum, dans un sens ou dans l'autre, au moment même où la molécule du fond est sur la verticale du sommet ou des creux de l'onde. Si le fond n'est pas horizontal, les coïncidences n'existent plus : lorsqu'il est ascendant, dans le sens de la marche des ondes, le maximum de vitesse précède cette verticale et il la suit lorsque le fond est plongeant.

Lorsque le fond est constamment ascendant, la quantité de mouvement des couches profondes se transmet successivement à des masses décroissantes ; elle peut donc donner lieu, en définitive, à des vitesses de fond assez grandes, et en tout cas notablement supérieures à celles qui correspondraient aux mêmes ondulations superficielles se produisant dans une masse de profondeur uniforme. Et l'on comprend que cette augmentation de la vitesse au fond soit d'autant plus grande que l'agitation vient de plus loin. Cela est d'accord avec ce qu'expriment les marins quand ils disent que la mer est *longue*. Cette augmentation de la vitesse au fond ne se produit pas lorsque le fond est toujours horizontal, et elle est remplacée par une diminution lorsque le fond est plongeant, car la quantité de mouvement de chaque tranche doit se communiquer à des masses croissantes. L'accroissement de profondeur éteint non seulement les vitesses au fond, mais aussi l'agitation superficielle : la hauteur des ondes diminue lorsque l'onde passe au-dessus d'un creux. Nous venons en effet de constater, entre la hauteur des ondes et la profondeur, la relation $h\sqrt{\mathrm{H}} =$ constante. Et lorsqu'après avoir passé au-dessus d'un creux, l'onde poursuivra son chemin en avant, sur des parties moins profondes, elle ne reprendra pas immédiatement pour cela sa hauteur primitive ; une grande partie de son énergie, disséminée dans les couches profondes, disparaîtra dans des frottements, des chocs sur le fond, des tourbillonnements.

Le mouvement ondulatoire est généralement produit par

l'action du vent. Si le fond est constamment plongeant, et si la cause déterminante a cessé d'agir, l'ondulation s'effacera rapidement ; mais si, au contraire, cette cause exerce toujours son action, il pourra arriver que l'accroissement d'énergie qu'elle communique à la masse liquide en mouvement compense, et au-delà, l'augmentation de cette masse due à l'augmentation de profondeur et que l'onde progresse, sans s'affaisser et même en s'exhaussant, au-dessus d'un fond plongeant. Si, ensuite, après des espaces assez longs, le fond commence à se relever, on constatera l'accroissement constant de la vitesse de fond en même temps que l'exhaussement de l'onde qui pourra s'élever jusqu'à déferler si la profondeur devient assez petite. Ici encore, une grande partie de l'énergie de l'onde se trouvera détruite par les frottements sur le fond, de telle sorte que si, après s'être exhaussé, le fond recommence à s'abaisser, l'onde s'éteindra de nouveau et ne conservera guère qu'une petite portion de son énergie primitive. C'est ce qui explique comment certaines rades, en apparence découvertes dans la direction d'où proviennent les plus fortes tempêtes, offrent néanmoins aux navires un mouillage sûr, parce qu'elles sont abritées, dans cette direction, par des hauts fonds qui interceptent la propagation du mouvement dans les couches profondes.

223. Vitesse du flot de fond. — Lorsque l'agitation vient de loin et a pu s'étendre à toute la masse liquide, il peut arriver que la vitesse au fond soit grande, même à de grandes profondeurs. Cela n'est pas en contradiction avec ce fait que, sur certaines plages, les plus grandes bourrasques n'arrivent pas à déplacer sensiblement les matières placées sur le fond à une profondeur moindre. Les conditions ne sont pas les mêmes, et d'ailleurs, si ces matières ne bougent presque pas, cela prouve simplement qu'à la profondeur où elles se trouvent l'effet des vitesses alternatives du flot de fond compense exactement la composante de leur poids parallèlement au fond.

La vitesse du flot de fond peut être calculée, lorsque le fond est horizontal, par la formule $\frac{U}{V} = \frac{h}{H}$, rappelée plus haut ; mais lorsque le fond est en pente, le calcul devient plus difficile ; il ne peut se faire que moyennant des hypothèses plus ou moins plausibles sur la manière dont se transmet la quantité de mouvement des tranches successives aux masses croissantes ou décroissantes du liquide. M. Cornaglia a donné, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1881, 1er semestre, page 587, une étude à laquelle nous avons emprunté quelques-unes des considérations qui précèdent et où l'on trouvera des formules établies en vue de ce calcul ; elles sont assez compliquées, mais elles ont donné à l'auteur des résultats qui concordent d'une manière très satisfaisante avec les observations qu'il a faites au port d'Oneille (Oneglia). Nous ne nous arrêterons ni à les discuter ni à les reproduire et nous nous contenterons d'y renvoyer le lecteur.

223. Marées fluviales. — Les marées de la mer se propagent à l'intérieur des embouchures des fleuves et donnent lieu à des phénomènes particuliers, appelés marées fluviales et dont je vais dire quelques mots.

En général, dans les fleuves, les étales de flot et de jusant sont en retard sur l'instant des hautes ou des basses mers, mais ce retard est ordinairement plus faible que dans les courants de la mer ; il est seulement de 30 à 45 minutes d'après Comoy. La durée de l'étale est quelquefois nulle, le plus souvent elle est de 10 à 25 minutes. Pendant l'étale, bien que les eaux paraissent immobiles, tout mouvement n'a pas cessé : la surface libre s'élève pendant l'étale de jusant et elle s'abaisse pendant l'étale de flot.

La marée fluviale a plutôt le caractère d'une onde de translation que d'une onde d'oscillation : elle a en effet pour cause l'afflux progressif d'une certaine quantité d'eau de la mer qui pénètre dans le fleuve et produit à l'embouchure une intumes-

cence qui se propage ensuite en remontant, à la manière de celles que nous avons étudiées au n° 202.

Comoy considère, dans ce phénomène, trois périodes : la première s'étend depuis le moment où l'onde commence à s'introduire dans le fleuve jusqu'à celui où la pleine mer arrive à l'embouchure ; la deuxième, entre les instants où se produisent, à l'embouchure, la pleine mer et l'étale de flot ; la troisième entre ce dernier instant et celui où l'onde disparaît à la limite de la partie maritime du fleuve.

Pendant la première période, les eaux provenant du fleuve viennent remplir l'espace compris entre la tête du flot et l'étale de jusant, et la position de cette étale est déterminée par l'importance du débit du fleuve : elle est d'autant plus éloignée de la tête du flot que le débit est plus considérable. En temps de crue, le jusant ne prend fin que longtemps après l'arrivée de la tête du flot et même, dans les crues très fortes, le courant ne se renverse pas et le jusant règne pendant toute la marée. Dans ce cas, il n'entre pas d'eau de mer dans le fleuve et toute l'intumescence de la marée fluviale est produite par l'eau du fleuve dont l'écoulement se trouve simplement ralenti ou arrêté par la surélévation des eaux de la mer. Mais lorsque, plus ordinairement, il se produit un renversement du courant, ou une étale de jusant, toute la partie comprise entre le point où la vitesse s'annule ainsi, à chaque instant, et l'embouchure du fleuve doit la surélévation de son niveau à l'introduction dans le fleuve d'une certaine quantité d'eau de la mer. Si donc, pendant un intervalle de temps Δt quelconque, on désigne par S la section du fleuve à son embouchure, v la vitesse moyenne de l'eau dans cette section, $Sv\Delta t$ sera le volume d'eau de mer qui se sera introduit dans le fleuve, et si D est la distance moyenne, pendant le temps Δt, de l'étale de jusant à l'embouchure, L la largeur moyenne du fleuve sur cette longueur D et Δh l'augmentation moyenne de la hauteur du niveau dans la même portion, on aura l'égalité :

$$Sv\Delta t = DL\Delta h.$$

Pendant la seconde période, comprise entre les instants où se produisent, à l'embouchure, la pleine mer et l'étale de flot, le niveau baisse à l'embouchure; le sommet de l'onde se trouve dans le fleuve à une certaine distance de l'embouchure, mais il entre néanmoins encore de l'eau de mer dans le fleuve jusqu'au moment de l'étale de flot. Si l'on considère, à une époque quelconque de cette période, la position du sommet de l'onde dans le fleuve et si on appelle D sa distance à la tête de flot, D' sa distance à l'embouchure, L et L' les largeurs moyennes du fleuve dans les parties correspondantes et Δh et $\Delta h'$ les variations moyennes du niveau, le volume total compris entre le sommet de l'onde et la tête de flot s'est accru de $DL\Delta h$, celui qui se trouve entre l'embouchure et le sommet de l'onde a diminué de $D'L'\Delta h'$; l'augmentation définitive du volume total, différence de ces deux quantités, doit être égale au volume d'eau de mer $Sv\Delta t$ qui s'est introduit pendant le temps Δt. On a alors la relation :

$$Sv\Delta t + D'L'Dh' = DL\Delta h$$

applicable à la seconde période de la marée.

Enfin, la troisième période succède à l'instant où l'étale de flot se produit à l'embouchure, instant pour lequel $v = 0$. Dans cette troisième période, l'étale de flot s'avance dans le fleuve. L'onde fluviale se trouve alors entièrement constituée: on peut la diviser en trois parties : 1° celle qui est comprise entre la tête du flot et l'étale de jusant, dont l'accroissement de volume se trouve entièrement rempli par l'eau du fleuve; 2° celle qui est comprise entre l'étale de jusant et l'étale de flot, dont le volume reste constant puisqu'il n'y entre ni n'en sort rien ; 3° celle qui est comprise entre l'étale de flot et l'embouchure dont la diminution de volume correspond à l'eau qui traverse l'embouchure en rentrant dans la mer. On peut écrire, pour chacune de ces trois parties, des égalités analogues aux précédentes.

224. Vitesse de propagation du flot. — La célérité de la propagation de la tête du flot est régie par la formule de Lagrange. H étant la profondeur des basses eaux dans le fleuve et U la vitesse moyenne de leur écoulement, cette célérité V est :

$$V = \sqrt{gH} - U.$$

A mesure qu'on remonte le fleuve, H diminue et U augmente, il arrive un moment où $V = 0$, l'onde cesse d'exister, et elle est remplacée par une suivante et ainsi de suite. La célérité de propagation de la tête du flot diffère notablement de celle du sommet de l'onde à laquelle correspond une profondeur H plus grande. Entre le moment où la tête de flot arrive à l'embouchure jusqu'au moment où y passe le sommet de l'onde, l'ascension continue de la marée, dit M. Bazin [1], peut être assimilée à la formation successive d'ondes de translation qui se propagent les unes après les autres en remontant le fleuve. En raison de l'exhaussement progressif du niveau, ces ondes élémentaires s'avancent avec des vitesses de plus en plus grandes ; elles tendent donc à se rejoindre et se rejoignent en effet.

225. Mascaret. — La réunion et la superposition de ces ondes successives constitue le phénomène connu sous le nom de mascaret. C'est un ressaut brusque qui se produit, sur certains fleuves, à la tête de flot de l'onde marée fluviale. Il a des hauteurs variables suivant le lieu que l'on considère, suivant les différents fleuves, suivant l'importance de la marée, etc. Sa hauteur, sur les fleuves de France, ne dépasse guère trois mètres ; mais on en a signalé de cinq et six mètres de hauteur sur le Gange et sur le fleuve des Amazones. Il atteint son maximum en un certain point du fleuve et diminue ensuite progressivement en remontant. Il occupe presque toujours la

1. Recherches expérimentales sur la propagation des ondes.

largeur totale et présente, en plan, la forme d'une courbe concave vers l'amont du fleuve ; quelquefois, il prend une direction inclinée sur celle du courant.

Il conserve des formes lisses quand il se propage dans des eaux suffisamment profondes, il porte alors quelquefois le nom caractéristique de *rouleau d'eau*. Lorsque la profondeur devient trop faible, le mascaret déferle. Si, au contraire, la profondeur va en augmentant, il diminue, s'affaisse et peut même disparaître.

Quand le mascaret a passé dans un lieu, le lit du fleuve se trouve rempli à une certaine hauteur au-dessus du niveau primitif, mais cette hauteur est généralement inférieure à celle du mascaret. Ce dernier caractère rapproche d'une façon étroite le phénomène du mascaret de l'intumescence que nous avons étudiée au n° 198 et qui était formée d'une lame d'une certaine épaisseur précédée d'une tête plus élevée. Nous avons trouvé que la hauteur de cette tête devait être égale à peu près aux $\frac{3}{2}$ de celle de la lame qui la suit. Or, d'après Comoy (page 180), le mascaret de la Seine s'est élevé à Caudebec, le 19 septembre 1876, à $2^m,17$ au-dessus des basses eaux du fleuve ; et, après le passage du mascaret, le lit du fleuve s'est trouvé exhaussé de $1^m,47$ seulement. Or, les $\frac{2}{3}$ de $2^m,17$ sont de $1^m,45$.

Le mascaret est suivi d'ondes plus ou moins élevées, plus ou moins nombreuses suivant les circonstances et qui portent le nom d'*éteules*. Nous avons dit, à la page 418, comment la formule de la propagation des intumescences dans une eau tranquille de profondeur constante pouvait motiver et expliquer ces ondulations secondaires qui suivent la tête de l'onde principale.

Entre la célérité V de sa propagation, la vitesse v du courant de flot qui la suit, la profondeur primitive H des eaux et leur surélévation définitive h, on a la relation que nous avons

établie (page 407) et qui exprime simplement la conservation du volume des éléments liquides :

$$\frac{v}{V}=\frac{h}{h+H}.$$

Les observations ont montré que cette formule s'accorde avec les faits.

La réunion des ondes successives qui constitue le mascaret ne se produit ni sur tous les fleuves ni à toutes les marées. Elle n'a lieu que dans certaines circonstances qui la rendent possible et qui dépendent de la forme et de la profondeur du lit et particulièrement de son embouchure, de la rapidité de l'élévation de la marée, etc. Elle exige, entre ces divers éléments, des relations qui ne paraissent pas, jusqu'à présent, suffisamment définies pour permettre de prévoir le phénomène et d'en calculer toutes les conséquences autrement que par des formules empiriques.

226. Détermination des vitesses dues aux marées fluviales. — Les marées fluviales, ou plus généralement les courants qui se produisent dans la partie maritime des fleuves, ont été souvent mis à profit pour obtenir une modification du lit, l'enlèvement des hauts fonds, des bancs de sable, qui obstruent les estuaires. Il est utile, pour cela, de pouvoir déterminer les débits et par suite les vitesses moyennes dans diverses sections.

Les vitesses, dans la partie maritime d'un fleuve, varient en chaque point et à chaque instant ; elles changent généralement de sens à chaque marée en s'annulant deux fois, aux étales de flot et de jusant, et il semble impossible de déterminer, par des observations directes, la loi de leur variation dans une section transversale donnée. Voici comment M. Lechalas a résolu le problème [1].

1. Dans un rapport en date du 12 avril 1859, à l'appui du projet d'endiguement de la Basse-Loire, cité par M. Partiot.

Supposons que l'on ait levé exactement la forme d'un profil en travers en un point où l'on veut étudier la variation, avec le temps, des débits du fleuve, et que l'on ait disposé, en aval de ce point jusqu'à l'embouchure, et en amont jusqu'à la limite au-delà de laquelle la marée ne se fait pas sentir, une série d'échelles dont les zéros ont été placés exactement au même niveau. Des observateurs, munis de montres bien réglées, notent les hauteurs d'eau à toutes ces échelles à des époques simultanées, de cinq en cinq minutes par exemple, ou de quart d'heure en quart d'heure, suivant le degré d'exactitude que l'on se propose d'obtenir. On conçoit que si les échelles sont assez rapprochées, si l'on a un plan exact du fleuve indiquant ses largeurs en chaque point et des profils en travers en nombre suffisant, on pourra, après avoir construit le profil longitudinal de la surface libre à chacune des époques d'observation, calculer les variations, pour chaque intervalle de cinq ou de quinze minutes, du volume des eaux entre le point où la marée commence à se faire sentir jusqu'au profil considéré. Le débit fluvial Q étant connu, en divisant, à chaque instant, l'accroissement de volume ΔV correspondant à une de ces périodes par le nombre n de secondes (300 ou 900) qu'elle comprend, le débit D dans le profil d'aval sera $D = Q - \frac{\Delta V}{n}$.

Pendant le jusant, ΔV est négatif et par suite D est positif. Quelque temps après l'arrivée de la tête du flot, ΔV s'annule, et $D = Q$, puis ΔV devient positif, s'accroît peu à peu et lorsque $\frac{\Delta V}{n} = Q$, on a $D = 0$; c'est le moment de l'étale de jusant. Ensuite ΔV continuant à croître, D devient négatif, puis s'annule de nouveau au moment de l'étale de flot et ainsi de suite. On voit que l'on peut ainsi obtenir, au moyen de calculs laborieux il est vrai, les débits D positifs ou négatifs, à chaque instant, dans une section déterminée, et par suite les vitesses moyennes correspondantes dans cette même section.


Courbes des hauteurs et des débits à St-Nazaire, le 9 septembre 1858 (vive-eau).

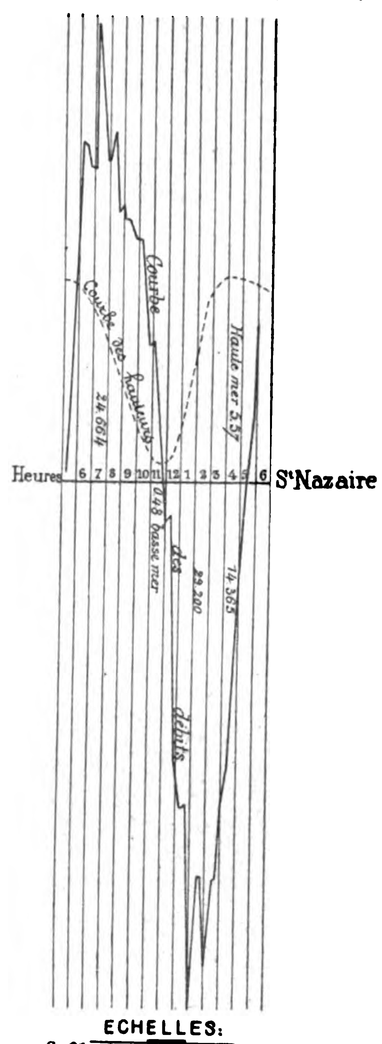


Fig. 106.

227. Exemple. Courbes des débits à Saint-Nazaire. — La courbe ci-contre (fig. 106)[1], obtenue de cette manière, montre comment ont varié les débits de la Loire, à Saint-Nazaire, le 9 septembre 1858, de cinq heures du matin à six heures du soir, pendant une marée de vive-eau. Sur la même figure, on a représenté, aux mêmes heures, les hauteurs du niveau du fleuve au même point. On voit que le débit, d'abord nul un peu après cinq heures du matin, au moment de la plus grande élévation du niveau, a crû rapidement, de manière à atteindre son maximum positif (débit de jusant) un peu après sept heures. Le volume débité atteignait alors 24.664 mètres cubes par seconde. Puis le débit, décroissant un peu moins vite, s'annule de nouveau vers midi, un peu après le moment où la courbe des hauteurs passe par son minimum.[2] Il devient ensuite négatif, c'est-à-dire que la

1. Cette courbe est donnée dans les *Annales des ponts et chaussées*, à l'appui d'un mémoire de M. Lechalas sur l'endiguement de la Basse-Loire, 1865, 1er semestre.

2. « La mer commençait à remonter à 11 h. 1/2, dit l'auteur (page 68),

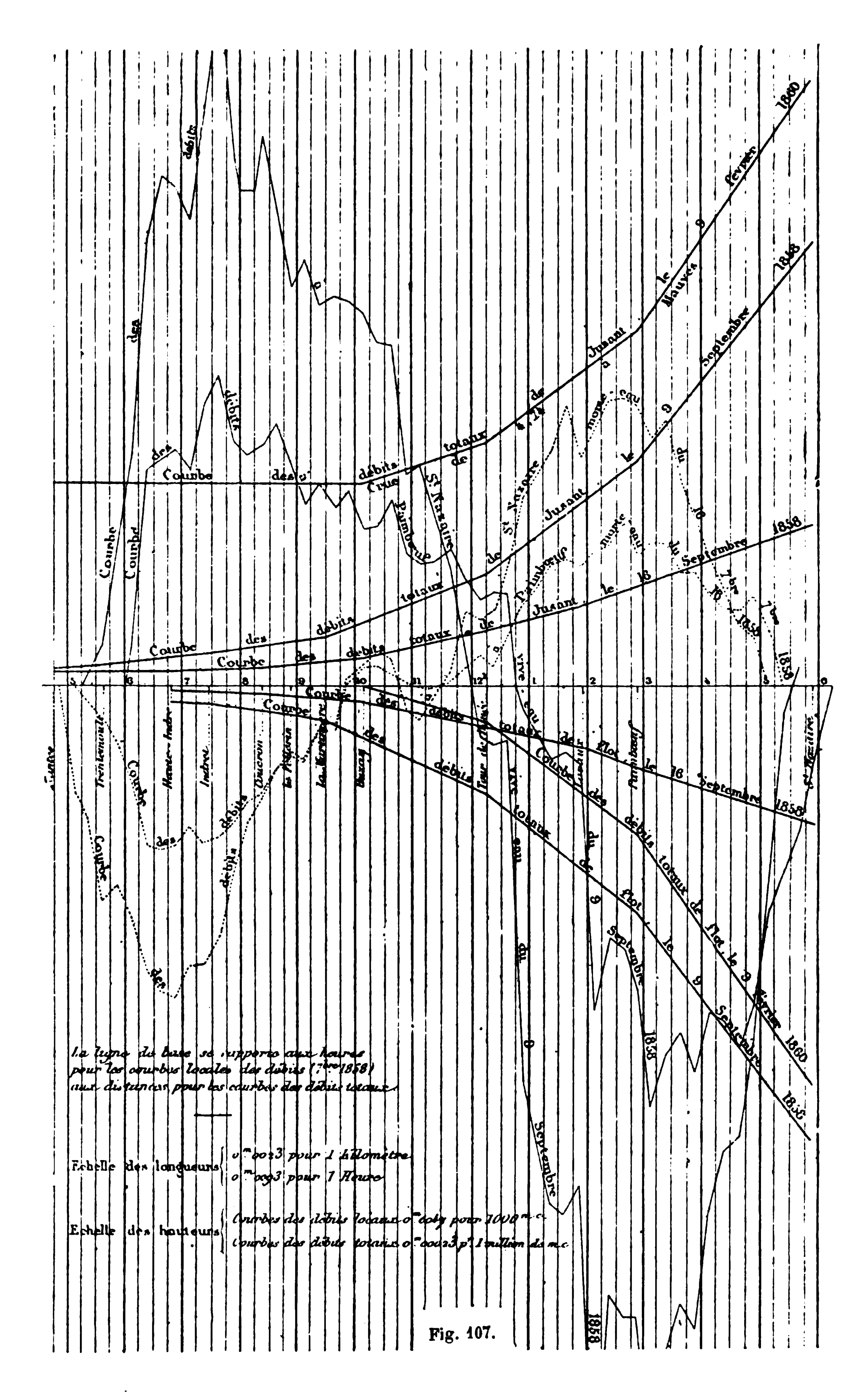

La ligne de base se rapporte aux heures
pour les courbes locales des débits (7bre 1858)
aux distances pour les courbes des débits totaux.
Echelle des longueurs
0m 0023 pour 1 kilomètre
0m 0093 pour 1 Heure
Echelle des hauteurs
Courbes des débits locaux 0m 0069 pour 1000 m.c.
Courbes des débits totaux 0m 0023 pr 1 million de m.c.

Fig. 107.

vitesse se renverse, et c'est le courant de flot qui s'établit jusque vers 5 h. 1/2 du soir, où ce courant s'annule et se renverse de nouveau pour reprendre la direction du jusant. Le maximum du débit de flot a atteint, ce jour là, le chiffre de 29.200 mètres cubes, supérieur au maximum du débit de jusant. On voit, d'autre part, que la courbe des hauteurs présente, sur l'horizontale, une inclinaison plus forte pendant le flot que pendant le jusant : la variation de hauteur étant plus rapide, il est naturel que le débit maximum soit plus élevé. Ce fait ne se produit pas toujours, car la même planche des *Annales des ponts et chaussées*, d'où est extraite la figure précédente, en contient une autre relative au 8 février 1860, où le débit maximum de flot est inférieur au débit maximum de jusant, pendant une grande crue du fleuve.

En temps d'étiage, dans la Loire, le maximum de débit de flot dépasse toujours celui de jusant, à Saint-Nazaire. Dans la morte eau du 16 septembre 1858 qui a suivi la vive eau citée, du 9 septembre 1858, le débit maximum a été, au jusant : 9.930^{mc} ; au flot : 10.930^{mc}.

228. Courbes de débits totaux de flot et de jusant. — On peut ensuite, lorsque l'on a ainsi mesuré les débits en un certain nombre de points d'un fleuve, calculer le débit total de jusant, ou de flot, pendant une marée : cela revient à mesurer au planimètre ou autrement l'aire de la courbe des débits dont on vient de donner un exemple pour Saint-Nazaire. Si l'on porte alors ces débits en ordonnées sur une ligne dont les abscisses sont les longueurs mesurées le long du fleuve, entre chacun des points où les observations ont eu lieu, on obtiendra les courbes des débits totaux de flot et de jusant depuis le point où la marée se fait sentir jusqu'à l'embouchure. La figure 107 donne un exemple de ces courbes pour la basse-Loire ; elle est extraite d'un ouvrage de M. Lechalas,

« mais le courant de jusant ne cessa qu'à midi. La haute mer a été observée « à 4 h. 3/4 ; la fin du courant de flot n'a eu lieu qu'à 5 h. 1/2. »

Nantes et la Loire. Elle montre, entre autres particularités, que le 9 février 1860, jour où se produisait une grande crue du fleuve, le flot s'est arrêté à Buzay, tandis que le 9 septembre 1858 il était remonté à plusieurs kilomètres en amont de Nantes[1].

L'examen de pareilles courbes est indispensable pour l'étude de l'amélioration des estuaires des fleuves.

229. Mélange de l'eau de mer et de l'eau douce. — C'est par des considérations et des calculs analogues que l'on peut se rendre compte de la façon dont se mélangent, dans un fleuve à marées, l'eau de mer et l'eau douce, ou, d'une manière plus générale, les eaux de provenances diverses qu'il reçoit, telles que les eaux d'un égout qui y seraient jetées. Supposons, avec M. le professeur Unwin[2], à qui nous empruntons ce qui suit, que l'on ait levé un assez grand nombre de profils en travers, depuis le point où la marée se fait sentir jusqu'à l'embouchure du fleuve, pour pouvoir calculer très exactement les volumes d'eau qui se trouvent compris entre le profil d'origine A en amont et un certain nombre d'autres points, B, C, D..... aussi bien au moment des basses eaux (étale de jusant) qu'au moment où l'eau atteint sa hauteur maximum dans chacun des profils. Représentons ces volumes respectivement par v_1, v_2, v_3..... pour les basses eaux, et V_1, V_2, V_3... pour les hautes eaux. Sur une ligne horizontale ABCD (fig. 108), où les distances entre les profils seront portées comme abscisses, portons, comme ordonnées, ces volumes, nous obtiendrons deux courbes telles que celles

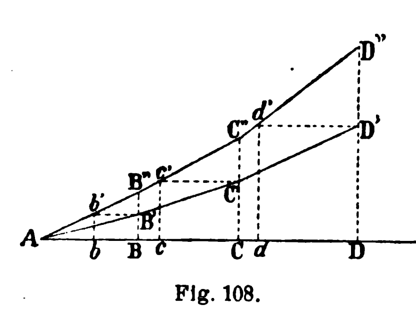


Fig. 108.

1. Le point marqué *Trentemoult* sur la figure 107 correspond à l'extrémité aval du port maritime de Nantes.

2. *On the movement of water in a tidal river, with reference to the position of sewer outfalls*, par W. Cauthorne Unwin, London, 1883.

qui sont représentées sur la figure. Une ordonnée quelconque DD', par exemple, de la courbe inférieure, représente le volume d'eau qui restait dans le fleuve, au moment de la basse-mer, entre les points A et D. A ce moment, les vitesses des molécules dans le profil D étaient nulles ; on peut donc admettre, à titre de première approximation, que l'effet du flot a été de refouler, vers l'amont, toute cette masse d'eau en lui imprimant des vitesses diverses, comme si une vanne, barrant toute la rivière en D, remontait avec le flot. Les différences de vitesse entre la surface et le fond ou les parois, la courbure des rives et les irrégularités du lit donneront au phénomène une bien plus grande complication, et produiront des échanges de liquide de part et d'autre de ce profil, mais l'effet général, considéré dans son ensemble, sera celui qui vient d'être défini. Mais, au moment de l'étale de flot, lorsque le mouvement s'arrêtera, le volume ainsi refoulé étant resté le même, n'occupera plus sur la rivière que la longueur Ad, obtenue en menant par le point D' une horizontale D'd' jusqu'à sa rencontre en d' avec la courbe qui représente les volumes en hautes eaux. L'eau qui provient de la partie en aval du profil D ne remontera donc pas au-dessus du point d; de même, celle qui provient de l'aval du profil C ne remontera pas au-dessus de c, sauf les mélanges partiels dus aux actions secondaires que l'on néglige dans cette approximation.

Ce calcul et cette construction négligent aussi le volume d'eau douce amené par le fleuve. Il suffit, pour en tenir compte, d'augmenter les volumes correspondant à l'eau basse, v_1, v_2, v_3..... ou les ordonnées BB', CC', DD' .... du volume d'eau Q débité par le fleuve pendant la durée du flot. On obtient ainsi, pour chaque profil, l'amplitude de l'oscillation de l'eau due à l'action de la marée. Pour la Tamise, cette amplitude serait de 13 à 17 kilomètres pour les localités en aval de Londres.

On peut se rendre compte de l'importance des mélanges partiels résultant des actions secondaires par la considération de l'état de salure de l'eau. Si les choses se passaient exactement

comme nous l'avons supposé, la partie du fleuve comprise entre les profils A et D, par exemple, recevant, à chaque marée, un volume Q d'eau douce et perdant un volume égal d'eau salée, finirait par devenir entièrement douce. Or, la salure, en un point donné du fleuve reste, lorsque le débit Q est lui-même constant, sensiblement constante ou se retrouve la même à la fin de chaque marée. Soit B le point du fleuve où la salure est nulle, si l'on admet qu'elle croisse uniformément depuis ce point jusqu'à l'embouchure, à une distance l du point B, où elle serait s_1 (chaque mètre cube d'eau contenant s_1 grammes de sel), sa valeur s_x à une distance quelconque x du point B sera $s_x = \frac{x}{l} s_1$. En tous cas, la salure s_x en chaque point du fleuve peut être trouvée, soit approximativement par cette formule, soit par analyse directe. Alors, dans cet espace de longueur x compris entre le point B et un point quelconque, il entre, pendant une marée, Q mètres cubes d'eau douce et il sort, puisque le volume se retrouve le même après la marée, Q mètres cubes d'eau salée, à une salure moyenne entre zéro et s_x ou égale à $\frac{s_x}{2}$. Il est donc sorti de l'espace considéré $\frac{Qs_x}{2}$ grammes de sel qui ont dû y rentrer, puisque la salure est restée la même et qui correspondent à un volume Q_1 d'eau de mer, déterminé par l'équation :

$$Q_1 s_1 = \frac{Qs_x}{2} \qquad \text{d'où} \qquad Q_1 = \frac{s_x}{s_1}\frac{Q}{2} = \frac{Qx}{2l}.$$

On peut calculer ce volume Q_1 pour un certain nombre de profils correspondant à un même nombre de valeurs de x, et le comparer au volume total qui passe à travers ce profil pendant une marée et qui a été déterminé précédemment. On trouve généralement une très petite fraction ; pour la Tamise, par exemple, cette fraction varie de $\frac{1}{220}$ à $\frac{1}{430}$.

Des considérations et des calculs analogues peuvent être

faits pour se rendre compte de la marche des eaux d'égout et de leur mélange progressif avec l'eau du fleuve. On en trouvera un exemple dans la brochure citée de M. Unwin.

230. Amélioration des estuaires. — Le problème de l'amélioration des estuaires des fleuves, au moyen des courants alternatifs de la marée, est un des plus difficiles qui se présentent aux ingénieurs ; il est bien plus compliqué que celui de la correction des rivières dont le courant est constamment de même sens. Les mêmes principes généraux y sont applicables, c'est-à-dire que, par exemple, le courant tend toujours à se porter vers la rive concave, à la creuser, et au contraire à abandonner la rive convexe en y laissant des atterrissements. Mais le changement de sens du courant rend les effets bien plus incertains et moins déterminés. Les matières du fond, entraînées vers la mer par le jusant, sont ramenées en arrière par le flot et se déposent en des points souvent bien éloignés de ceux que les prévisions avaient indiqués. S'il est déjà difficile de formuler des règles à peu près générales pour les rivières ordinaires, la difficulté est bien autrement grande lorsqu'il s'agit de l'amélioration des estuaires, qui est, bien plus encore que celle des fleuves, une question d'espèces. Toutefois, je crois devoir reproduire ici, en partie, quelques-unes des considérations développées sur ce sujet par M. le professeur Franzius au troisième congrès de navigation intérieure tenu à Francfort-sur-le-Mein en 1888.

« Le principe fondamental de toute régularisation dans la « partie maritime d'un fleuve consiste à augmenter le plus « possible la force vive de l'onde-marée, par suite le cube « d'eau à l'entrée et à la sortie et la vitesse de cette eau.

« Plus facilement l'onde-marée se propage en chaque point « du fleuve, plus le cube d'eau qui remonte à chaque marée est « grand, et plus il augmente, tant à l'aller qu'au retour, la force « vive du fleuve, c'est-à-dire la puissance qu'il a de creuser « et d'entretenir un lit plus grand et surtout plus profond. »

Lorsque le fleuve présente une courbe très prononcée, il y a perte de force vive par le changement de direction rapide que doivent y subir les ondes. De plus, toute courbe à petit rayon produit, dans les profils, des irrégularités qui diminuent aussi la force vive. On doit y remédier en reculant la rive convexe et en avançant la rive concave.

L'influence des bras est encore plus désastreuse et il est indispensable de fermer les plus défavorables. En général, ce sont les plus faibles qui sont les moins satisfaisants. La digue de fermeture doit, autant que possible, se trouver à l'amont du bras à fermer; l'ancien bras presque entier sert alors de bassin de chasse à la partie inférieure. En outre, les bras conservés fournissent le moyen le plus simple pour assécher les terres avoisinantes, aussi bien que dans l'ancien état des lieux.

Préalablement à la fermeture d'un bras, il faut constituer l'autre de manière qu'il puisse recevoir seul le volume d'eau nécessaire ; ce résultat est généralement obtenu au moyen de dragages.

Dans la partie correspondant aux hautes eaux, le profil doit être rétréci le moins possible; si les rives sont très irrégulières, il convient de les régulariser, mais il n'est pas indispensable que la régularité du lit supérieur soit très grande, car le courant est faible aux environs des parties hautes.

L'endiguement à basse mer est au contraire fort important, car c'est lui qui renferme le lit permanent du fleuve et le courant le plus fort. L'onde-marée doit, dans cette partie du fleuve, remonter fort loin vers l'amont avec la résistance minimum. L'écartement des rives basses doit augmenter progressivement en descendant.

Si l'on tenait la crête des digues de basses eaux plus haute que le niveau des basses mers, on perdrait le bénéfice de l'avantageuse combinaison des deux profils. En outre, il se formerait des atterrissements en arrière des digues au-dessus

du niveau des basses mers, ce qui produirait bientôt une diminution du cube d'eau entrant dans le fleuve pendant le flot.

Il convient donc d'établir des digues basses arasées au niveau des basses mers; les produits des draguages peuvent alors sans inconvénient être versés dans l'espace compris entre ces digues basses et les rives du fleuve, mais à la condition que les dépôts ne dépassent pas le niveau de la crête des digues basses.

Enfin, parmi les procédés de régularisation, figurent les dragages. Il est toujours difficile de prévoir les cas où les travaux de cette nature seront indispensables.

Ils seront nécessaires si le fleuve doit avoir une profondeur plus grande que celle que permet d'obtenir la régularisation. Ils le sont encore, pendant la régularisation, pour accélérer l'effet des travaux d'endiguement, pour venir en aide, en un point déterminé, à l'action d'un ouvrage voisin et, aussi, quand le fond est trop dur pour être attaqué par les eaux, même régularisées.

Des dragages sont toujours nécessaires pour entretenir une bonne voie navigable, même après une régularisation réussie, et cela parce que des tempêtes, des crues extraordinaires peuvent produire dans le lit des dépôts temporaires dont l'enlèvement doit être immédiat et que le courant n'effectuerait pas assez vite.

En résumé, le résultat doit être poursuivi par tous les moyens de nature à faciliter le plus possible la circulation du plus grand volume d'eau possible; mais ces moyens sont extrêmement variables suivant les circonstances, et pour les déterminer il ne faut pas moins qu'une étude longue et approfondie de l'estuaire particulier que l'on a en vue; ce n'est souvent qu'après de longues années d'observations, d'essais et de réflexions qu'un ingénieur peut se faire une opinion sur le système à choisir, sur le tracé à adopter pour les digues,

etc. On a même, dans ces dernières années, procédé par la méthode expérimentale. M. Osborne Reynolds pour la Mersey, M. Vernon-Harcourt pour la Seine, ont fait des expériences sur des modèles à échelle réduite. M. l'inspecteur général Mengin a entrepris, pour l'estuaire de la Seine, de nouvelles expériences sur une échelle un peu plus grande. Il a fait exécuter un modèle qui comprend toute la côte du Calvados et la Seine maritime à l'échelle de $\frac{1}{5000}$. Les marées y sont produites mécaniquement par un moteur à gaz et un réservoir supérieur fournira un débit correspondant à celui de la Seine fluviale. Le mouvement des eaux produit, dans les sables qui constituent le fond du modèle, des déplacements, des dépressions, des bancs donnant, dans une certaine mesure, l'idée de ce qui se passe à l'embouchure de la Seine. Les résultats de ces expériences ne sont pas encore publiés, mais il semble en tout cas qu'elles ne peuvent manquer de fournir de très utiles indications.

Les travaux d'endiguement exécutés le long de la Seine maritime ont produit des améliorations considérables pour la navigation. En outre l'étiage s'est abaissé de quantités croissantes de l'aval vers l'amont de la partie soumise aux marées, et il en résulte plus de facilités qu'autrefois pour l'assainissement des terrains bas avoisinant le fleuve.

CHAPITRE IX

FLUIDES ÉLASTIQUES

§ 1. *Equations et formules générales.* — § 2. *Réservoirs d'air.* — § 3. *Mouvement des gaz.*

---

§ 1

ÉQUATIONS ET FORMULES GÉNÉRALES

221. Gaz parfaits. — Si, dans les questions concernant l'écoulement des liquides, il est possible, avec une approximation suffisante pour les besoins de la pratique, de négliger les effets des variations de température, cette simplification n'est plus possible dès qu'il s'agit des fluides élastiques. Il faut alors tenir compte de ces variations, des quantités de chaleur qui peuvent être gagnées ou perdues par le fluide et des changements de pression et de volume qui en sont la conséquence. Il faut aussi considérer le changement d'état possible du fluide, lorsqu'on l'étudie au voisinage de son point de liquéfaction ; mais cette étude, plus compliquée, ne rentre pas dans le cadre du présent ouvrage et je me bornerai à celle du mouvement des *gaz permanents*, c'est-à-dire considérés assez loin de leur point de liquéfaction pour que ce phénomène n'ait pas à intervenir et j'étudierai alors simplement, comme on le fait d'ordinaire, un *gaz parfait* auquel les lois de Mariotte et

de Gay-Lussac soient rigoureusement applicables ; cela n'est vrai pour aucun gaz naturel, mais c'est suffisamment approché pour la plupart d'entre eux.

232. Lois de Mariotte et de Gay-Lussac. — Si nous désignons alors par p la pression du gaz, par v le volume correspondant de l'unité de poids de ce fluide, par α son coefficient de dilatation par degré centigrade, et par t la température, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac expriment que la quantité :

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = \text{une constante.}$$

Représentons cette constante par $\frac{R}{\alpha}$. Le coefficient α étant environ $\alpha = 0.003663$, son inverse $\frac{1}{\alpha} = 273$, et l'expression précédente prendra la forme :

$$\frac{pv}{273+t} = R.$$

La quantité $273 + t$ est ce que l'on appelle la température absolue, supposée comptée à partir du zéro absolu, lequel se trouve ainsi au point — 273° de l'échelle centigrade. Appelons T cette température absolue ou posons $T = 273 + t$, l'équation exprimant les lois de Mariotte et de Gay-Lussac sera :

$$(1) \qquad pv = RT.$$

La constante R n'est pas la même pour tous les gaz. Si l'on considère deux gaz différents, à la même pression et à la même température, cette équation montre que R sera proportionnel à v, volume de l'unité de poids, ou inversement proportionnel au poids de l'unité de volume, c'est-à-dire à la densité du fluide.

233. Effet de la chaleur sur un fluide élastique. — Lorsque l'on communique à l'unité de poids d'un gaz une

certaine quantité de chaleur, que je supposerai d'abord infiniment petite, dQ, la température de ce gaz augmente de dT et son volume augmente de dv. On admet que la quantité de chaleur fournie dQ se divise en deux parties produisant ces deux effets. La première partie est proportionnelle à l'élévation infiniment petite de la température ; elle sera donc, en appelant c un coefficient constant, cdT. La seconde est proportionnelle au travail extérieur produit par la variation de volume du gaz ; ce travail est pdv ; elle sera alors, en appelant A un autre coefficient constant, $Apdv$, et l'on écrira :

$$dQ = cdT + Apdv. \tag{2}$$

Supposons $dv = 0$, ou le volume du gaz maintenu constant, on a simplement $dQ = cdT$, ou bien $Q = c(T_1 - T_0)$; le coefficient c mesure donc la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids d'un gaz pour élever sa température d'un degré centigrade, lorsque le volume de ce gaz est maintenu constant. C'est ce que l'on appelle la capacité calorifique du gaz à volume constant, ou bien aussi la chaleur spécifique du gaz à volume constant. Ce coefficient n'est pas le même pour tous les gaz. L'expérience montre qu'il varie très sensiblement en raison inverse de la densité des divers gaz.

Faisons maintenant $dT = 0$, ou supposons que la température du gaz ne varie pas. Nous avons $dQ = Apdv$, ou bien, en intégrant : $Q = A\int pdv$. Si nous admettons que la température du gaz soit la mesure de son énergie interne, à la quantité de chaleur Q absorbée par le gaz correspond un travail extérieur $\int pdv$ effectué par lui. Le coefficient A qui mesure la quantité de chaleur nécessaire pour produire l'unité de travail s'appelle l'équivalent calorifique du travail ; et son inverse $\frac{1}{A}$, qui exprime la quantité de travail correspondant à l'unité de chaleur, s'appelle l'équivalent mécanique de la chaleur. Il est le même, non seulement pour tous les gaz, mais pour tous les modes de transformation de chaleur en travail ou

inversement. Lorsque l'on prend le kilogrammètre pour unité de travail et la calorie (quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température d'un kilogramme d'eau) pour unité de chaleur, on a environ $A = 0,00235$ ou $\frac{1}{A} = 426$.

Maintenant que nous avons défini les coefficients c et A, reprenons l'équation complète :

$$dQ = cdT + Apdv,$$

et supposons que la température et le volume varient simultanément, mais que la pression reste constante. Appelons v_0, T_0, le volume de l'unité de poids et la température dans l'état initial, v_1 et T_1 les mêmes quantités après que le gaz a reçu la quantité de chaleur quelconque Q. Nous aurons, en intégrant :

$$Q = c\,(T_1 - T_0) + Ap\,(v_1 - v_0).$$

Or, d'après l'équation (1), il existe entre les températures T_0 T_1, les volumes v_0, v_1 et la pression p, les relations :

$$pv_0 = RT_0 \quad , \quad pv_1 = RT.$$

D'où, en substituant :

$$Q = (T_1 - T_0)\,(c + AR).$$

La parenthèse $(c + AR)$, qui est un coefficient numérique, représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids du gaz pour élever sa température de un degré centigrade, lorsque la pression reste constante. C'est la capacité calorifique, ou la chaleur spécifique du gaz, à pression constante. On peut l'écrire :

$$c + AR = c\left(1 + \frac{AR}{c}\right).$$

Or, d'après ce qui a été dit, R et c variant tous deux, d'un gaz à l'autre, en raison inverse de la densité, le rapport $\frac{R}{c}$ est le même pour tous les gaz ; et nous pouvons écrire, en appe-

lant k un coefficient numérique constant :

$$1 + \frac{AR}{c} = k, \qquad \text{ou} \qquad \frac{AR}{c} = k - 1.$$

La capacité calorifique à pression constante sera ainsi exprimée simplement par

$$kc.$$

Le coefficient k, le même pour tous les gaz, vaut sensiblement 1,41, soit à très peu près $\frac{7}{5}$ ou encore $\sqrt{2}$. L'équation précédente qui en définit la valeur donne :

$$AR = c(k - 1) = \text{à peu près } \frac{2}{5}c.$$

Je n'ai pas à exposer ici les méthodes au moyen desquelles on est arrivé à déterminer les valeurs numériques des quantités A, R, k et c ; elles sont du domaine de la physique.

384. Transformation adiabatique. — Reprenons encore l'équation générale :

$$dQ = cdT + Apdv,$$

à laquelle nous allons donner une autre forme. L'équation $RT = pv$ étant différentiée donne :

$$RdT = pdv + vdp.$$

Éliminons dT, nous obtenons,

$$dQ = \frac{c}{R}(vdp + pdv) + Apdv\ ;$$

ou bien, en mettant au lieu de $\frac{c}{R} + A$ la quantité égale $\frac{kc}{R}$:

$$dQ = \frac{c}{R}(vdp + kpdv).$$

Cherchons comment varie le volume de l'unité de poids en fonction de la pression, lorsque le gaz ne reçoit ni ne perd de

chaleur, il suffit de faire $dQ = 0$, ou :

$$vdp + kpdv = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0,$$

ou bien en intégrant :

$$pv^k = \text{une constante} = p_0 v_0{}^k. \tag{3}$$

Cette équation a été donnée par Laplace dont elle porte le nom ; on l'appelle aussi équation de Poisson.

La transformation que subit un gaz lorsqu'il n'éprouve ainsi ni gain ni perte de chaleur porte le nom de transformation *adiabatique*. Si, sur deux axes de coordonnées rectangulaires on porte les valeurs correspondantes de la pression p et du volume v de l'unité de poids du gaz, la courbe dont l'équation est $pv^k =$ const. est une *ligne adiabatique*.

Une transformation adiabatique, sans gain ni perte de chaleur, est accompagnée d'une variation de température et d'une production (ou d'une consommation) de travail extérieur. Si le gaz est passé d'un état initial p_0, v_0 à un autre état p_1, v_1 par une transformation adiabatique, on a :

$$p_0 v_0{}^k = p_1 v_1{}^k ;$$

si T_0 et T_1 sont les températures correspondantes, on a aussi :

$$p_0 v_0 = RT_0, \quad p_1 v_1 = RT_1 ;$$

d'où l'on déduit facilement, par division membre à membre :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Une augmentation de température correspond à une augmentation de pression ou à une diminution de volume, et inversement. Par suite de la variation de température, l'énergie interne du gaz a changé et une quantité d'énergie représentée

par R $(T_0 - T_1)$ se trouve rendue disponible ou absorbée ; d'autre part, le travail extérieur correspondant à la transformation est lié à la variation de température par l'équation générale (2) dans laquelle on fait $dQ = 0$, ou bien :

$$cdT + Apdv = 0.$$

d'où l'on déduit, par intégration :

$$c\,(T_1 - T_0) + A\int_{v_0}^{v_1} pdv = 0.$$

Le travail extérieur serait $\int_{v_0}^{v_1} pdv$ s'il n'y avait pas de changement de température, mais ce changement rend disponible un travail $R(T_0 - T_1)$ de sorte que le travail extérieur total W sera :

$$W = \int_{v_0}^{v_1} pdv + R(T_0 - T_1) = \left(\frac{c}{A} + R\right)(T_0 - T_1) = \frac{kc}{A}(T_0 - T_1);$$

ce que l'on peut écrire, eu égard aux relations qui viennent d'être trouvées :

$$(4)\quad W = \frac{kc}{A} T_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) = p_0 v_0 \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Une production de travail extérieur sera donc accompagnée d'une diminution de température, et inversement une augmentation de température accompagnera la consommation d'un travail extérieur.

335. Transformation isothermique ou isodynamique. — Un gaz peut au contraire passer d'un état à un autre en conservant la même température, sa transformation est dite alors *isothermique*. L'équation $pv = RT$, lorsque la température T est constante, donne $pv = \text{const.}$ et les hyperboles équilatères représentées par cette équation sont des *lignes isothermiques*. Il est facile de reconnaître qu'une transformation isothermique est nécessairement accompagnée de gain ou de

perte de chaleur et de production ou de consommation de travail mécanique. Si l'on reprend en effet l'équation générale

$$dQ = cdT + Apdv,$$

et si l'on y suppose T constant, ou $dT = 0$, elle se réduit à :

$$dQ = Apdv\,;$$

ou bien, en y mettant pour p sa valeur déduite de $pv = RT$:

$$dQ = ART\frac{dv}{v}.$$

Et si l'on intègre entre les limites marquées par les états extrêmes, définis comme tout à l'heure par p_0, v_0, et p_1, v_1, la quantité de chaleur qui devra être fournie au gaz, pour qu'il passe du volume v_0 au volume v_1 en restant à la température constante T, sera :

$$Q = ART\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v} = ART\,\mathrm{Log.}\frac{v_1}{v_0}.$$

quantité qui ne peut être nulle si v_1 est différent de v_0. Comme d'ailleurs, on a, la température T étant constante :

$$p_0 v_0 = p_1 v_1 = RT,$$

cette quantité peut s'exprimer comme il suit :

$$Q = Ap_0v_0\,\mathrm{Log.}\frac{v_1}{v_0} = Ap_1v_1\,\mathrm{Log.}\frac{p_0}{p_1}.$$

Le travail extérieur $\int_{v_0}^{v_1} pdv$ a pour expression, en le représentant encore par W :

$$(5)\qquad W = \int_{v_1}^{v_0} pdv = p_0v_0\,\mathrm{Log.}\frac{v_1}{v_0} = p_1v_1\,\mathrm{Log.}\frac{p_0}{p_1}.$$

D'après ce que nous avons admis, la température du gaz étant constante, son énergie interne reste la même ; c'est pourquoi la transformation isothermique et la ligne qui la représente portent le nom de transformation et de ligne *isodynami-*

ques. La coïncidence de la ligne isodynamique avec la ligne isothermique n'a lieu que pour les gaz parfaits. Dans les autres fluides naturels, et en particulier dans les vapeurs, la température n'est pas la seule mesure de l'énergie interne, et les deux lignes ne coïncident pas.

236. Valeurs numériques des coefficients. — Voici, résumées dans un petit tableau, les valeurs numériques des coefficients qui figurent dans les formules précédentes et qui ne sont pas les mêmes pour les différents gaz.

Noms des gaz.	Poids du mètre cube	R	C	Volume d'un kilogramme
Air atmosphérique	1 k 293	29.5	0,168	0mc 781 lit
Azote	1 256	30.1	0,173	0 796
Oxygène	1 430	26.5	0,155	0 699
Hydrogène	0 0896	422.6	2,412	11 160
Acide carbonique	1 977	19 1	0,112	0 506
Gaz d'éclairage (en moyenne).	0 530	71.4	0,418	1 887

Le poids du mètre cube et le volume d'un kilogramme sont pris à la température zéro et sous la pression atmosphérique de 760 millimètres de mercure. Il est rappelé que les coefficients k, A qui figurent aussi dans les formules ont la même valeur pour tous les gaz, soit :

$$k = 1{,}41, \qquad A = 0{,}00235 \qquad \text{ou } \frac{1}{A} = 426.$$

Les unités sont le kilogramme par mètre carré pour les pressions, le kilogramme pour les poids et le mètre cube pour les volumes. Dans ces conditions la pression d'une atmosphère est représentée par 10334 kilogr. par mètre carré, c'est-à-dire par le nombre 10334. Chaque millimètre de mercure correspond, à très peu près, à une pression de 13 k. 6 par mètre carré. Il est bien évident que si, dans une formule, les pressions figu-

rent simplement par leur rapport $\frac{p_1}{p_0}$, le choix de l'unité importe peu, pourvu que cette unité soit la même pour les deux; elles peuvent être toutes deux, par exemple, exprimées en millimètres de mercure. L'unité indiquée doit être conservée dans les formules où les pressions figurent isolément, par exemple dans celle $p_0 v_0 = RT_0$ ou dans les autres analogues.

La pression est souvent exprimée par la quantité dont elle dépasse celle de l'atmosphère. Ainsi, on dira que la pression d'un gaz est de 20 millimètres d'eau; cela veut dire que sa pression dépasse de 20 millimètres d'eau celle de l'atmosphère, qui est de 10334 millimètres d'eau; cette pression serait ainsi exprimée par le nombre 10354.

Les températures T sont celles de l'échelle centigrade augmentées de 273°. Ainsi, la température de 15 degrés centigrades correspond à $T = 273 + 15 = 288$.

L'unité de travail est le kilogrammètre et l'unité de chaleur la calorie; c'est en calories que se trouvera exprimée la quantité Q dans les formules où elle figure. Enfin la vitesse sera exprimée en mètres par seconde, si l'on met pour g la valeur 9^m8088.

287. Application de la formule générale. — Au moyen de l'équation générale (2) on peut résoudre beaucoup de problèmes relatifs aux transformations subies par un gaz permanent.

Supposons, par exemple, un gaz, dont l'état initial est défini par p_0, v_0, T_0, se dilatant en surmontant une pression constante p' inférieure à p_0, jusqu'à occuper un volume v_1, sans perte ni gain de chaleur. On demande de déterminer sa pression p_1 et sa température T_1 après l'expansion.

La pression p' étant constante, le travail extérieur $\int_{v_0}^{v_1} p'dv$ sera simplement $p'(v_1 - v_0)$ et l'équation générale (2), intégrée, donnera, en y faisant $Q = 0$:

$$0 = c\,(T_1 - T_0) + Ap'\,(v_1 - v_0),$$

équation dans laquelle tout est connu excepté T_1 que l'on en déduira. Enfin, ayant calculé T_1, la pression finale p_1 se trouvera par la relation $p_1 v_1 = RT_1$.

Si, au lieu du volume final v_1, on avait donné la pression finale p_1, la même équation aurait fourni la valeur de v_1 en fonction de v_0. En y adjoignant les deux relations $p_0 v_0 = RT_0$ et $p_1 v_1 = RT_1$, ainsi que celle $AR = c(k - 1)$, on trouve :

$$v_1 = v_0 \frac{p_0 + (k-1)p'}{p_1 + (k-1)p'} \cdot$$

On calcule ensuite T_1 au moyen de $p_1 v_1 = RT_1$.

Si, comme cas particulier, on suppose que la pression p', que le gaz doit surmonter pour se dilater, soit nulle, ce qui arrive lorsque l'on fait communiquer un réservoir rempli de gaz avec un autre où l'on a fait le vide, il faut, dans les équations précédentes, faire $p' = 0$. Il en résulte d'abord $c(T_1 - T_0) = 0$, ou bien $T_1 = T_0$: la température du gaz reste constante ; puis $p_1 = \frac{p_0 v_0}{v_1}$. Ces conséquences ont été vérifiées par une expérience bien connue de Joule.

Les expressions (4) et (5) ci-dessus, du travail extérieur, dans les transformations adiabatiques ou isothermiques, résolvent d'ailleurs le problème consistant à chercher quel travail il sera nécessaire de dépenser pour faire subir à un gaz une transformation déterminée, ou inversement. Il est inutile, lorsque la température reste constante, de tenir compte des phases successives de la transformation, et l'on peut alors se borner à comparer l'état final et l'état initial de la masse gazeuse.

Par exemple, s'il s'agit de trouver le travail nécessaire pour comprimer, à une pression effective de 6 kilog. par centimètre carré, un mètre cube d'air aspiré dans l'atmosphère, la pression atmosphérique étant de $1^k,033$ par cmq, la pression réelle à obtenir sera de $7^k,033$. Alors si la transformation est isothermique, on trouvera d'après (5) pour le travail cherché, désigné par W :

$$W = 10330 \times \text{Log}\,\frac{7{,}033}{1{,}033} = 19818 \text{ kilogrammètres.}$$

Si la transformation devait être adiabatique, soit sans gain ni perte de chaleur, la formule (4) fournirait, pour la valeur absolue de ce travail :

$$W = 10330 \times \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{7{,}033}{1{,}033}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right],$$

ce qui, faisant $k = 1{,}41$, donne :

$$W = 26532 \text{ kilogrammètres.}$$

Dans les appareils compresseurs d'air, il est assez difficile de savoir exactement laquelle de ces deux transformations se réalise : la température du gaz que l'on comprime est quelquefois à peu près la même à la fin qu'au commencement, quelquefois un peu plus élevée ; les organes de la machine, en contact avec le gaz, lui cèdent ou lui prennent de la chaleur suivant que, dans les diverses phases du travail, ils se trouvent à une température plus élevée ou plus basse que la sienne ; le plus souvent, dans les grands appareils surtout, on injecte de l'eau pendant la période de compression afin de maintenir la température à peu près constante et d'absorber la chaleur produite par la compression ; il en résulte en somme une transformation dans des conditions en quelque sorte intermédiaires entre celles qui correspondent aux deux hypothèses précédentes. Aussi prend-on, ordinairement, pour la valeur du travail cherché, un chiffre intermédiaire entre ceux que fournissent les deux formules. M. le professeur Riedler prend exactement la moyenne de ces deux chiffres ; dans l'exemple précédent, il admettrait donc :

$$W = \frac{19818 + 26532}{2} = 23175 \text{ kilogrammètres.}$$

M. Kraft, ingénieur en chef des usines de Seraing, admet que la loi de la compression peut se représenter par la formule adiabatique, mais avec une valeur différente pour le coefficient

k, cette valeur étant d'autant plus rapprochée de l'unité que le refroidissement de l'air est plus parfait. D'après des expériences assez nombreuses, faites par M. Joseph François, l'ingénieur bien connu, sur des compresseurs de son système, comprimant l'air à 5 atmosphères, il a été amené à prendre $k = 1,18$ et, appliquant ce chiffre à l'exemple précédent, il trouve alors :

$$W = 23021 \text{ kilogrammètres,}$$

nombre peu différent de la moyenne calculée plus haut. M. Kraft augmente d'ailleurs de 3 0/0 le chiffre obtenu pour tenir compte de l'influence des espaces nuisibles et arrive ainsi, pour cet exemple, à 23711 kgm par mètre cube d'air aspiré [1].

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer ici, à propos de ces compresseurs d'air, que l'on réalise une économie, dans le travail moteur, si, au lieu d'effectuer la compression en une seule fois, on la produit par gradation ou en cascade, c'est-à-dire au moyen de compressions successives. Cette économie serait nulle si la compression s'effectuait suivant la loi isothermique ou si la température du gaz restait rigoureusement constante pendant tout son séjour dans l'appareil ; elle est d'autant plus grande que les conditions de la compression s'écartent davantage de celle-là, ou qu'elles se rapprochent de la loi adiabatique. Il est facile de se rendre compte de la différence.

1. Le travail mécanique ainsi calculé peut servir à trouver la puissance des moteurs destinés à actionner des compresseurs d'air, connaissant le rendement de ces appareils, c'est-à-dire le rapport entre le travail de la compression de l'air et celui du moteur, tous deux étant mesurés par les diagrammes tracés par des indicateurs de Watt placés sur les cylindres. Aux compresseurs installés au lac St-Fargeau par la Compagnie Popp, pour la distribution de la force motrice dans Paris, ce rapport, ou le rendement de ces compresseurs, a été trouvé de 0,85. Dans ces conditions, le travail moteur nécessaire pour comprimer à 6^k de pression effective un mètre cube d'air aspiré est de $\frac{23711}{0,85} = 27874$ kilogrammètres. Il en résulte qu'un cheval-vapeur pourra comprimer $2^{lit}688$ par seconde ou $9^{mc}6795$ par heure.

Dans l'exemple précédent, supposons que la compression, au lieu d'être effectuée en une seule fois, jusqu'à obtenir la pression effective de 6 kilog., s'effectue en deux fois : un premier compresseur prenant l'air à la pression atmosphérique $p_0 = 10,330$ kil., et l'amenant à la pression $p' = 40,330$ kil., soit à une pression effective de 3 kilog.; puis un second compresseur prenant cet air à la pression p' et l'amenant à la pression définitive $p_1 = 70,330$ k, soit 6 kilog. effectifs. Si la transformation est rigoureusement isothermique, le travail W_1, nécessaire pour la première compression, sera, d'après (5) :

$$W_1 = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{p_0}{p'};$$

et le travail W_2, nécessaire à la seconde compression :

$$W_2 = p'v' \operatorname{Log} \frac{p'}{p_1}.$$

De sorte que le travail total $W = W_1 + W_2$ sera, puisque la température étant constante, $p'v' = p_0 v_0 = RT$:

$$W = p_0 v_0 \left(\operatorname{Log} \frac{p_0}{p_1} + \operatorname{Log} \frac{p'}{p_1} \right) = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{p_0}{p_1};$$

comme si la compression s'était effectuée en une seule fois.

Mais si la transformation est adiabatique, ou bien si elle est, comme on vient de le dire, intermédiaire entre l'adiabatique et l'isothermique et exprimée par une relation $pv^k =$ constante, dans laquelle la valeur de l'exposant k est supérieure à l'unité et au plus égale à 1,41, le travail nécessaire pour la première compression sera, d'après (4) :

$$W_1 = p_0 v_0 \frac{k}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p'}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right],$$

et dans la seconde compression :

$$W_2 = p'v' \frac{k}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p'} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Si l'on suppose qu'entre les deux compressions, la température de l'air ait été ramenée à sa valeur initiale, $p'v'$ sera encore égale à $p_0 v_0$ et l'on aura, pour le travail total :

$$W = p_0 v_0 \frac{k}{k-1}\left[2 - \left(\frac{p'}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - \left(\frac{p_1}{p'}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Avec les valeurs numériques précédentes de p_0, p', p_1, ce travail total W prend les valeurs suivantes :

1° Dans l'hypothèse de la transformation isothermique, soit avec une seule, soit avec deux compressions successives. . . . . W = 19818 kilogrammètres ;

2° Dans l'hypothèse de la transformation adiabatique ($k = 1,41$) et d'une seule compression,

W = 26532 kilogrammètres ;

3° Dans l'hypothèse de la transformation adiabatique et de deux compressions successives. W = 23433 kilogrammètres ;

4° Dans l'hypothèse intermédiaire, $k = 1,18$, et d'une seule compression . . . . . . W = 23021 kilogrammètres ;

5° Dans l'hypothèse intermédiaire et de deux compressions successives. . . . . . . W = 21620 kilogrammètres. Dans cette dernière hypothèse, qui paraît correspondre aux conditions pratiques les plus ordinaires, l'économie obtenue en scindant la compression est de 1401 kilogrammètres, soit de plus de 6 0/0.

Il convient d'ajouter que le procédé des compressions successives a encore pour avantage de mieux régulariser le travail des machines motrices et d'éviter que les fortes pressions finales ne s'exercent sur les organes de grandes dimensions nécessaires à l'aspiration de grands volumes d'air à la pression atmosphérique.

§ 2

RÉSERVOIRS D'AIR

238. Réservoirs d'air en communication avec les conduites d'eau. — Lorsqu'une conduite contient une certaine quantité d'eau en mouvement, il arrive que, si l'écoulement

est brusquement interrompu, la force vive de l'eau produit sur les parois de la conduite des pressions qui peuvent devenir assez fortes pour en occasionner la rupture. Cette force vive, en effet, ne peut être détruite que par un travail résistant dû à la déformation élastique des tuyaux, et il peut arriver que cette déformation dépasse les limites de l'élasticité et de la rupture. Le choc qui se produit ainsi et qui s'appelle le *coup de bélier*, peut s'atténuer par une fermeture progressive et non brusque des orifices d'écoulement, mais on a aussi recours dans le même but aux réservoirs d'air. L'emploi de cet appareil a pour effet de remplacer une portion de la paroi du tuyau par une matière élastique qui cède à la pression de l'eau sans danger de rupture. L'air du réservoir se comprime, sa pression augmente et produit le travail résistant nécessaire pour amortir la force vive de l'eau.

Si l'on désigne par D le diamètre de la conduite, par L sa longueur, par U la vitesse moyenne de l'eau, de manière que la demi force vive à amortir soit, en appelant toujours Π le poids spécifique du liquide, $\frac{\Pi}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L \cdot \frac{U^2}{2}$; il faut que cette force vive soit détruite sans que la pression, dans le réservoir d'air, dépasse une valeur p_1 fixée à l'avance et en vue de laquelle on a calculé la résistance des parois.

Soit p_0 la pression dans la conduite et dans le réservoir d'air avant l'interruption de l'écoulement. Négligeons le travail dû à l'action de la pesanteur sur l'eau en mouvement, dans le temps assez court pendant lequel l'eau continue à se mouvoir en pénétrant dans le réservoir et en comprimant l'air qui s'y trouve enfermé; négligeons de même les frottements de l'eau sur les parois de la conduite pendant ce même temps ; nous devrons écrire l'égalité entre la demi - force vive de l'eau, dont l'expression vient d'être donnée, et le travail résistant produit par le gaz lorsque sa pression passe de p_0 à p_1. La valeur de ce travail sera différente suivant les conditions thermiques de la compression ; elle ne sera pas la même si la compression

s'effectue à température constante, suivant la loi isothermique, ou bien si elle s'effectue sans perte ni gain de chaleur, suivant la loi adiabatique. Dans le premier cas, le travail négatif du gaz, par unité de poids, sera exprimé par $p_0 v_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1}$. Cette unité de poids, sous la pression initiale p_0 occupe le volume v_0 ; si l'on désigne donc par V_0 le volume initial de l'air dans le réservoir, son travail négatif sera $p_0 V_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1}$ et l'on aura l'équation :

$$\frac{\Pi}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L . \frac{U^2}{2} + p_0 V_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1} = 0,$$

qui permettra de calculer le volume initial V_0 à donner au réservoir pour que la pression n'y dépasse pas p_1.

Il n'est pas probable que, dans la pratique, la compression du gaz se fasse suivant la loi isothermique. Il faudrait, pour cela, que le gaz cédât à ses parois une quantité de chaleur équivalente au travail qui vient d'être évalué. Il est à croire, au contraire, que pendant le temps très court de la compression, le gaz ne reçoit ni ne cède aucune quantité de chaleur appréciable. Sa température s'élève donc d'abord et il n'abandonne que plus tard la chaleur qui lui a été transmise sous forme de travail mécanique. Si l'on suppose que la compression s'effectue suivant la loi adiabatique, le travail par unité de poids sera exprimé, comme nous l'avons vu plus haut, par la formule (4) du n° 234. Nous avons alors, pour déterminer V_0, l'équation :

$$\frac{\Pi}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} . L . \frac{U^2}{2} + \frac{k p_0 V_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = 0,$$

dont le second terme est obtenu en mettant dans cette formule, au lieu de v_0, volume de l'unité de poids du gaz, le volume initial V_0 du réservoir.

Cette hypothèse d'une compression adiabatique donnera pour V_0 une valeur qui sera, en général, inférieure à celle que

l'on obtiendrait en supposant la compression isothermique. Par exemple, si, pour abréger, on représente par W le premier terme de chacune des deux équations précédentes, ou la demi-force vive à amortir, et si l'on veut que la pression, dans le réservoir, ne s'élève pas au-delà du double de sa valeur initiale, il faudra faire $\frac{p_1}{p_0}=2$, et alors le volume V_0 à donner à ce réservoir sera, dans l'hypothèse isothermique :

$$V_0=\frac{W}{p_0 \operatorname{Log}. 2}=1,45\frac{W}{p_0} ;$$

et dans l'hypothèse adiabatique, en prenant pour k la valeur approximative $\frac{7}{5}$:

$$V_0=\frac{2}{7}\frac{W}{0,22\,p_0}=1,30\frac{W}{p_0}.$$

soit une différence d'environ un dixième en moins. Il est donc préférable de calculer dans l'hypothèse d'une compression isothermique, car il n'y a pas d'inconvénient à ce que le réservoir soit un peu trop grand.

239. Réservoirs d'air placés sur une conduite d'eau alimentée par une pompe foulante. — On calcule de la même manière les réservoirs d'air placés sur les conduites alimentées par des pompes foulantes, afin d'y régulariser le mouvement de l'eau. Entre les pompes et le réservoir, l'écoulement de l'eau est intermittent, le volume fourni oscille entre zéro, si la pompe est à simple effet, et un certain maximum. Le volume total fourni par la pompe dans un temps donné doit être écoulé, au-delà du réservoir, avec une vitesse se rapprochant le plus possible de l'uniformité. On y arrive en faisant en sorte que la pression, dans le réservoir d'air, ne varie qu'entre des limites assez étroites. Si l'on désigne par V_0 le volume d'air lorsque la pression a sa plus faible valeur p_0, et par V_1 ce volume lorsque la pression a atteint sa valeur la plus

grande p_1, une relation entre V_1 et V_0 sera donnée par les conditions d'alimentation de la conduite : la différence $V_0 - V_1$ correspondra à l'excès du volume d'eau fourni par les pompes, dans une période de leur mouvement, sur le volume qui s'est écoulé avec une vitesse moyenne supposée constante. On peut donc admettre que la différence $V_0 - V_1$ est une donnée de la question, il en est de même de la pression initiale p_0. Enfin, d'après le degré de régularité que l'on veut donner à l'écoulement, on limitera arbitrairement la différence $p_1 - p_0$ entre les pressions extrêmes ou plutôt le rapport $\frac{p_0}{p_1}$. Le problème est donc ainsi posé : connaissant ce rapport $\frac{p_0}{p_1}$ et la différence $V_0 - V_1$, calculer V_0. On remarquera, d'ailleurs, que les volumes V_0 et V_1 d'une même masse de gaz sont proportionnels aux volumes de l'unité de poids que nous avons appelés v_0 et v_1. Dans l'hypothèse isothermique, on aura : $p_0 V_0 = p_1 V_1$, ce qui donnera :

$$V_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)} (V_0 - V_1).$$

L'hypothèse adiabatique, où $p_0 V_0^k = p_1 V_1^k$, fournira :

$$V_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}} (V_0 - V_1).$$

L'exposant $\frac{1}{k}$ qui affecte le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ dans cette seconde formule étant plus petit que l'unité, exposant du même rapport dans la première, la seconde valeur de V_0 sera plus grande que la précédente. Lorsque le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ diffère peu de l'unité, ce que l'on doit chercher à réaliser, la dernière valeur de V_0 vaut à peu près :

$$\frac{1}{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)} (V_0 - V_1),$$

c'est-à-dire qu'elle est à peu près égale à la première multipliée par k ou par $\frac{7}{5}$. Il est donc probable que dans les réservoirs calculés d'après l'hypothèse isothermique, la pression varie dans des limites un peu plus étendues que celles que l'on a supposées pour faire les calculs, ou que ces réservoirs sont un peu trop petits. En effet, les conditions doivent être, ici encore, intermédiaires entre celles qui répondent aux deux hypothèses.

§ 3

MOUVEMENT DES GAZ

240. Écoulement par un orifice. — Considérons un réservoir rempli de gaz, et dans lequel la pression soit maintenue constante et égale à p_0 ; supposons que ce gaz s'écoule par un orifice de section ω, muni d'un ajutage cylindrique ou d'un tuyau de même section ω ; admettons aussi que la pression p_1, que ce gaz doit surmonter pour s'écouler ainsi, soit constante. Imaginons, par exemple, que le gaz du réservoir soit pressé par un piston AB (fig. 109) de section Ω qui se déplace sous l'action d'une pression constante p_0 ; et que, de même, dans le tuyau d'écoulement se trouve un autre piston CD qui supporte sur sa face opposée une pression constante p_1 (ces pistons sont, bien entendu, fictifs et simplement supposés remplacer des sections idéales faites à travers le fluide par des plans AB, CD). Désignons par u la vitesse moyenne de l'écoulement dans le tuyau ; cette vitesse sera celle du piston CD. Le piston AB s'étant avancé d'une

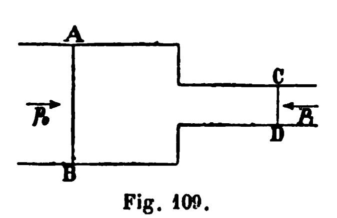


Fig. 109.

quantité telle que l'unité de poids du gaz ait passé par l'orifice, le volume décrit par ce piston est v_0, volume de l'unité de poids dans le réservoir, et le travail extérieur transmis au gaz par le piston AB est égal à p_0v_0. Pendant le même temps, l'unité de poids du gaz qui s'est écoulée a repoussé le piston CD et lui a fait décrire un volume v_1 égal à celui qu'elle occupe dans le tuyau d'écoulement. Le gaz a produit ainsi un travail extérieur p_1v_1, et le travail qui lui a été transmis est, en totalité, la différence $p_0v_0 - p_1v_1$. Mais, pour que l'unité de poids qui occupait le volume v_0 se soit comprimée de manière à ne plus occuper que le volume v_1, il a fallu exercer sur elle un travail égal à $\int_{v_0}^{v_1} pdv$. Ce travail provient de l'énergie interne des éléments voisins qui ont produit la compression dont il s'agit. Le travail communiqué au gaz ou gagné par lui est ainsi :

$$p_0v_0 - p_1v_1 + \int_{v_0}^{v_1} pdv.$$

Ce travail est employé à produire le mouvement. La force vive du gaz s'est augmentée du produit de la masse $\frac{1}{g}$ de l'unité de poids qui s'est écoulée par $\frac{u^2}{2}$. On a ainsi l'équation, dite de Zeuner :

$$\frac{u^2}{2g} = p_0v_0 - p_1v_1 + \int_{v_0}^{v_1} pdv. \tag{6}$$

On a, d'autre part :

$$d(pv) = pdv + vdp,$$

ou bien

$$p_1v_1 - p_0v_0 = \int_{v_0}^{v_1} pd + v\int_{v_0}^{v_1} vdp\ ;$$

d'où, en substituant :

$$\frac{u^2}{2g} = -\int_{v_0}^{v_1} vdp = \int_{v_1}^{v_0} vdp. \tag{7}$$

Cette équation a été donnée par de Saint-Venant bien avant Zeuner.

On peut encore donner à cette équation une autre forme, en y faisant intervenir les conditions thermiques. L'équation générale :

$$dQ = cdT + Apdv,$$

étant intégrée entre les deux états extrêmes désignés par les indices 0 et 1, donne, en appelant Q la quantité de chaleur fournie au gaz dans sa transformation :

$$(8) \qquad Q = c\,(T_1 - T_0) + A\int_{v_0}^{v_1} pdv.$$

D'autre part, l'équation de Mariotte et Gay-Lussac fournit :

$$p_0v_0 = RT_0, \qquad p_1v_1 = RT_1.$$

Si, dans l'équation (6) nous substituons à p_0v_0 et à p_1v_1 ces valeurs, et si, au moyen de la précédente, nous éliminons l'intégrale $\int_{v_0}^{v_1} pdv$, nous obtiendrons :

$$(9) \qquad \frac{u^2}{2g} = R\,(T_0 - T_1) + \int_{v}^{v_1} pdv,$$

ou bien :

$$\frac{u^2}{2g} = R(T_0 - T_1) + \frac{Q}{A} - \frac{c}{A}(T_1 - T_0)$$

ou bien, puisque $c + AR = kc$:

$$(10) \qquad \frac{u^2}{2g} = \frac{Q}{A} - \frac{kc}{A}(T_1 - T_0).$$

Sous l'une ou l'autre des formes précédentes, l'équation dite de Zeuner, qui serait plus justement nommée équation de Saint-Venant, permettra de résoudre les divers problèmes relatifs à l'écoulement d'un gaz sortant d'un réservoir.

Si, par exemple, l'écoulement se fait sans introduction

ni soustraction de chaleur, $Q = 0$, l'équation (10) se réduit à :

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{kc}{A}(T_0 - T_1) = \frac{kc}{A} T_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right).$$

Nous avons vu plus haut que dans une transformation adiabatique on avait :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}};$$

Il en résulte, par conséquent, pour la vitesse u d'écoulement d'un fluide dans ces conditions :

$$(11) \qquad u = \sqrt{2g \frac{kc}{A} T_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]},$$

formule dans laquelle T_0, p_0 et p_1 sont supposées données.

Si l'écoulement se fait à température constante $T_1 = T_0$, l'équation (9) donne simplement :

$$\frac{u^2}{2g} = \int_{v_0}^{v_1} p dv,$$

et nous avons trouvé plus haut que, dans ces conditions, l'on a :

$$\int_{v_0}^{v_1} p dv = p_0 v_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1} = RT_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1}.$$

On trouve alors :

$$(12) \qquad u = \sqrt{2g \, RT_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1}},$$

formule qui donne u, si T_0, p_0 et p_1 sont connus. Cette formule est celle qui a été donnée par Navier, avec $p_0 v_0$ au lieu de RT_0. Elle était appliquée par lui à tous les cas d'écoulement, et l'on voit qu'elle n'est exacte que lorsque la température du gaz reste constante [1].

1. Je dois parler ici, pour mémoire, de deux conséquences paradoxales qui ont été déduites de cette formule de Navier. La première, la plus singulière peut-être, est que, pour $p_1 = 0$, la formule donne $u = \infty$. Un réservoir se viderait instantanément dans le vide. On verra, quelques lignes plus loin, que

En réalité, dans les circonstances les plus ordinaires, c'est plutôt la formule (11) correspondant à l'écoulement adiabatique qu'il faut appliquer[1]. C'est généralement sans perte ni gain appréciable de chaleur que se produit l'écoulement d'un gaz qui sort d'un réservoir. Il se produit alors un abaissement de température et l'on peut calculer la température T_1 de la veine qui s'écoule ; elle est :

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

pour maintenir constante la température, ou pour rendre la formule applicable, il faut fournir au gaz une quantité de chaleur exprimée par A $\frac{u^2}{2g}$, c'est-à-dire infinie elle-même. Il y a donc impossibilité.

La seconde est celle-ci. Calculons le volume de gaz dépensé sous la pression p_1. Si ω est la section de l'orifice, ce volume sera ωu, et si on le ramène à une autre pression donnée constante p_2, ce volume deviendra :

$$\frac{p_1 \omega u}{p_2} = \frac{\omega}{p_2} p_1 \sqrt{2g \mathrm{RT}_0 \operatorname{Log.} \frac{p_0}{p_1}}\ .$$

Le volume de gaz écoulé, mesuré à une pression constante quelconque p_2, est donc proportionnel au produit :

$$p_1 \sqrt{\operatorname{Log.} \frac{p_0}{p_1}}.$$

De sorte que si la pression p_0 à l'intérieur du réservoir est donnée, le volume écoulé sera maximum pour la valeur de la pression extérieure p_1 qui annule la dérivée, par rapport à p_1, de cette expression ou de son carré, ce qui donne :

$$2 \operatorname{Log.} \frac{p_0}{p_1} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{p_0}{p_1} = \sqrt{e}\ .$$

ou encore $p_1 = 0{,}607\ p_0$. L'expérience ne confirme nullement ce résultat paradoxal, elle n'indique aucun maximum de débit pour les diverses valeurs du rapport $\frac{p_1}{p_0}$. Il est évident d'ailleurs que le raisonnement ci-dessus suppose la température constante, ce qui ne pourrait avoir lieu que par une addition de chaleur. Les circonstances de l'écoulement sont fonction de la quantité de chaleur introduite, et si cette quantité est nulle, l'écoulement est réglé par la formule (11) et non par celle de Navier.

1. Il serait sans doute, en tout cas, toujours possible de rendre cette formule (11) conforme aux conditions thermiques de l'écoulement, en y adoptant, d'après les idées de M. Kraft, une valeur intermédiaire entre 1,41 et 1 pour le coefficient k.

Pour que la température restât constante, comme le suppose la formule (12) de Navier, il faudrait fournir au gaz une quantité de chaleur :

$$Q = A \frac{u^2}{2g} = ART_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1}.$$

L'expérience ne confirme pas absolument les résultats du calcul. Il se produit, au pourtour de l'orifice, des frottements qui absorbent une certaine quantité de travail, et la vitesse effective U est inférieure à la vitesse u donnée par la formule. On a ainsi, en appelant γ un coefficient plus petit que l'unité :

$$U = \gamma u.$$

Les expériences de Weisbach ont montré que, pour des orifices en mince paroi, le coefficient γ était environ 0,98. Avec des ajutages cylindriques très courts, sa valeur est descendue au-dessous de 0,80.

241. Contraction de la veine gazeuze et phénomène qui l'accompagne. — Il se produit aussi, lorsque l'orifice est en mince paroi, une contraction de la veine fluide ; la section d'écoulement est inférieure à celle ω de l'orifice, elle n'est qu'une fraction, représentée par un coefficient $\mu < 1$, de celle-ci, et le coefficient de débit, produit des deux coefficients γ et μ, varie, suivant la charge et suivant la forme des orifices, de 0,56 à 0,80. Il augmente avec la charge.

Lorsqu'un gaz sort ainsi d'un orifice en mince paroi ou en paroi épaisse, et débouche dans l'atmosphère ou dans un autre milieu, le frottement des particules en mouvement sur celles qui sont en repos et qui entourent la veine gazeuse entraîne celles-ci et produit un vide relatif ou une diminution de pression analogue à celle que l'on constate dans un ajutage cylindrique où s'écoule une veine liquide. Cet effet d'entraînement est d'autant plus grand que la vitesse du gaz qui sort est plus rapide ou que la pression dans le réservoir est plus considérable.

Une observation qui met ce fait en évidence a été faite ré-

cemment par M. Lauriol, ingénieur des ponts et chaussées [1]. Un entonnoir en métal communique par le bout avec un réservoir contenant de l'hydrogène comprimé à 300 atmosphères. La communication peut être établie ou interrompue à l'aide d'un robinet.

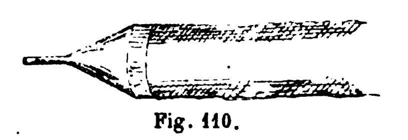


Fig. 110.

Au bout large est adapté un tube en étoffe de soie vernie débouchant dans l'atmosphère ou dans une capacité où la pression est peu différente (fig. 110). Lorsqu'on établit la communication, le tuyau d'étoffe, au lieu de se gonfler sur toute sa longueur, est aspiré vers l'intérieur de l'entonnoir, tout le long du bord, comme on l'a représenté en coupe sur la fig. 111, et ne se gonfle qu'à un mètre environ de l'entonnoir.

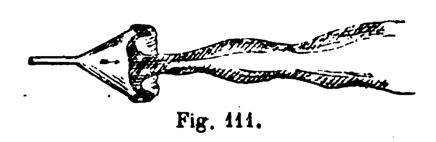


Fig. 111.

212. Écoulement varié des gaz. Remplissage d'un réservoir. — Les formules précédentes (11) et (12), déduites de celle de Zeuner, donnent la vitesse d'écoulement d'un gaz sortant d'un réservoir à pression constante p_0 lorsque la pression d'aval est constante et égale à p_1. Il est assez rare que le problème se présente avec cette simplicité, et le plus souvent le gaz sortant d'un réservoir sert à en remplir un autre où la pression est d'abord inférieure, puis va en croissant. La pression dans le réservoir alimentaire peut être considérée comme constante, soit à cause de ses grandes dimensions par rapport à celle du réservoir alimenté, soit plus ordinairement parce qu'il est maintenu à pression constante par des pompes ou des compresseurs dont le fonctionnement y introduit, à chaque instant, une quantité de gaz égale à celle qui s'en écoule. Le remplissage progressif du

1. *Journal de l'éclairage au gaz*, 20 février 1891.

récipient se fait au contraire à une pression croissante d'abord égale à p_1 (ordinairement la pression atmosphérique), puis augmentant jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle p_0 du réservoir alimentaire. Le remplissage est alors complet.

Ce problème a été traité pour la première fois par M. Haton de la Goupillière dans une note présentée à l'Académie des sciences dans les séances des 18, 26 octobre et 2 novembre 1886, à laquelle nous empruntons ce qui va suivre.

Désignons par V la capacité du récipient, primitivement plein de gaz à la pression p_1 qu'il s'agit de remplir en le mettant en communication avec un réservoir indéfini où la pression est maintenue constante, p_0. Appelons p la pression variable, intermédiaire entre p_1 et p_0, qui se trouve à l'époque t dans le récipient V, et Π le poids de l'unité de volume, également variable, du gaz, à la même époque dans le même récipient. Le poids du gaz qu'il contiendra, à cette époque t, sera $V\Pi$ et pendant un temps élémentaire dt, ce poids s'accroîtra de $Vd\Pi$. D'autre part, en désignant par ω la section de l'orifice, par m le coefficient de débit et par u la vitesse d'écoulement à l'époque considérée, le volume écoulé pendant ce temps dt sera $m\omega udt$ et le poids correspondant sera $m\omega\Pi udt$. Nous avons ainsi l'égalité :

$$Vd\Pi = m\omega\Pi udt.$$

Mais, pour reprendre les notations employées plus haut, nous avons, entre le poids Π de l'unité de volume et le volume v de l'unité de poids du gaz, la relation $v\Pi=1$ ou $vd\Pi+\Pi dv=0$. Cela nous permet de remplacer, dans l'égalité précédente, $d\Pi$ par $-\frac{\Pi dv}{v}$ et de l'écrire :

$$\frac{m\omega}{V} dt = -\frac{1}{u}\frac{dv}{v}.$$

D'autre part, l'équation (7) de St-Venant nous donne la valeur de u :

$$\frac{u^2}{2g} = \int_v^{v_0} vdp = \int_v^{v_0} v\frac{dp}{dv}dv,$$

d'où, en substituant :

$$dt = -\frac{V}{m\omega\sqrt{2g}} \cdot \frac{dv}{v\sqrt{\int_v^{v_0} v\frac{dp}{dv}dv}}$$

Et, pour avoir le temps t qui se sera écoulé depuis l'époque où le volume de l'unité de poids v avait la valeur v_1 dans le récipient, c'est-à-dire depuis le commencement de l'écoulement jusqu'à celle où cette variable a une valeur quelconque v, il suffira d'intégrer cette expression entre les deux limites v_1 et v. Puis, en faisant $v = v_0$, on aura la durée totale du remplissage.

L'intégrale qui figure sous le radical, en dénominateur, dépendra de la loi de variation de p avec v, et cette loi, elle-même, dépendra des conditions thermiques de l'écoulement.

Si, par exemple, l'écoulement est isotherme, c'est-à-dire si l'on fournit au gaz la quantité de chaleur nécessaire pour que sa température T reste constante, on aura toujours :

$$pv = \mathrm{RT}, \qquad p = \frac{\mathrm{RT_0}}{v},$$

$$v\frac{dp}{dv}dv = -\mathrm{RT}\frac{dv}{v}.$$

et par suite :

$$\int_v^{v_0} v\,\frac{dp}{dv}dv = \mathrm{RT}\,\mathrm{Log}\,\frac{v_0}{v}.$$

D'où, en substituant :

$$dt = -\frac{V}{m\omega\sqrt{2g\mathrm{RT}}}\,\frac{dv}{v\sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{v}{v_0}}};$$

et par suite :

$$t = -\frac{V}{m\omega\sqrt{2g\mathrm{RT}}}\int_{v_1}^{v}\frac{dv}{v\sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{v}{v_0}}} = \frac{V}{m\omega}\sqrt{\frac{2}{g\mathrm{RT}}}\left(\sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{v_1}{v_0}} - \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{v}{v_0}}\right)$$

On peut remplacer les rapports $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v}{v_0}$ par les rapports inverses des pressions $\frac{p_0}{p_1}$ et $\frac{p_0}{p}$ et si l'on fait $v = v_0$ (ou $p = p_0$) pour avoir la durée totale $\mathfrak{T}$ du remplissage, on trouvera :

$$\mathfrak{T} = \frac{V}{m\omega}\sqrt{\frac{2}{gRT}\,\text{Log}\,\frac{p_1}{p_0}}.$$

Mais il est rare que l'écoulement suive cette loi isothermique. Bien plus ordinairement, il s'effectue sans perte ni gain de chaleur, c'est-à-dire suivant la loi adiabatique. On a alors, à une époque quelconque :

$$pv^k = p_0 v_0{}^k, \qquad p = \frac{p_0 v_0{}^k}{v^k} = p_0 v_0{}^k v^{-k},$$

$$v\frac{dp}{dv}\,dv = -\,kp_0 v_0{}^k v^{-k},$$

et par suite :

$$\int_v^{v_0} v\,\frac{dp}{dv}\,dv = \frac{k}{k-1}p_0 v_0{}^k(v_0{}^{1-k} - v^{1-k}) = \frac{k}{k-1}\,p_0 v_0\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{1-k}\right];$$

d'où, en substituant :

$$dt = -\frac{V}{m\omega\sqrt{2gRT\,\frac{k}{k-1}\,p_0 v_0}} \cdot \frac{dv}{v\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1-k}}}.$$

Pour effectuer cette intégration, M. Haton de la Goupillière prend comme variable auxiliaire :

$$x^2 = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{1-k}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2dx}{x} = (1-k)\,\frac{dv}{v}.$$

ce qui donne, en substituant après avoir changé de signe :

$$dt = \frac{2V}{m\omega\sqrt{2gH\,kT(k-1)}}\,\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

L'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ étant $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, on en déduit, en intégrant entre les limites v_1 et v et remplaçant dans le résultat le rapport $\frac{v_1}{v}$ par $\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}$:

$$t = \frac{V}{m\omega}\sqrt{\frac{2}{gRTk(k-1)}}\,\text{Log}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}}}}\right]$$

La durée totale $\mathfrak{T}$ du remplissage, obtenue en faisant $p=p_0$, est :

$$\mathfrak{T} = \frac{V}{m\omega}\sqrt{\frac{2}{gRTk(k-1)}}\cdot\text{Log}\left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{2k}}+\sqrt{\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1}\right].$$

Pour un récipient de 1 mètre cube ($V=1^{mc}$) et un orifice circulaire de $0^m,10$ de diamètre $\left(\omega=\frac{\pi}{4}=0^{mq},785\right)$, une température de 20° centigrades ($T=293°$) et un rapport de pression égal à deux $\left(\frac{p_0}{p_1}=2\right)$, M. Haton a trouvé pour la durée du remplissage $4^s,56$. Lorsque, à la même température, le rapport des pressions prend les valeurs suivantes :

$$\frac{p_0}{p_1} = 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 10, \quad 20, \quad 30,$$

la durée du remplissage devient respectivement :

$$\mathfrak{T} = 4^s,56\,;\ 5^s,16\,;\ 5^s,57\,;\ 5^s,88\,;\ 6^s,85\,;\ 7^s,87\,;\ 8^s,49.$$

Lorsque $\frac{p_0}{p_1}$ n'est que de 1,1, la durée du remplissage s'abaisse à six dixièmes de seconde.

La durée $\mathfrak{T}$ est proportionnelle au volume V et les valeurs qui viennent d'être écrites s'appliquent à la valeur $V=1^{mc}$. Elle est inversement proportionnelle à la superficie ω de l'orifice par lequel le gaz s'écoule, ou au carré du diamètre de cet

orifice s'il est circulaire. Les valeurs précédentes de $\mathfrak{C}$ s'appliquent à un orifice circulaire de $0^m,1$ de diamètre.

Enfin, elle varie suivant la nature du gaz en raison inverse de $\sqrt{R}$. Les valeurs ci-dessus se rapportent à l'air atmosphérique. Les variations de la température sont peu importantes en pratique : les valeurs calculées pour la température de 20° centigrades ou pour $T=293$, seraient à peu près applicables aux températures comprises entre 10° et 30°, c'est-à-dire aux valeurs de T comprises entre 283 et 303, lesquelles correspondent à peu près aux cas les plus ordinaires de la pratique.

M. Haton de la Goupillière a traité également le problème qui consiste à trouver la durée de la vidange d'un réservoir dans un espace où la pression est constante, comme l'atmosphère. Ce problème semble avoir moins d'utilité pratique que celui qui vient d'être résolu. L'intégration des équations n'a pu s'y faire qu'en attribuant au coefficient k la valeur approximative $\frac{7}{5}$, et la formule à laquelle on arrive est plus compliquée que les précédentes.

243. Écoulement d'un gaz par une longue conduite. — Le problème de l'écoulement permanent d'un gaz par une longue conduite a une application fréquente dans la distribution du gaz qui sert à l'éclairage. Il ne pourrait se résoudre d'une manière rigoureuse, de même que tous ceux qui précèdent, que si l'on connaissait parfaitement les conditions thermiques de l'écoulement. Mais on peut, lorsqu'il s'agit des applications au gaz d'éclairage supposer, avec une approximation suffisante, que la température du gaz reste constante. A la vérité cette hypothèse entraîne comme conséquence des échanges de chaleur entre le gaz et les parois de la conduite dans laquelle il s'écoule, car, ainsi que nous l'avons vu, toute transformation isothermique est nécessairement accompagnée de gain ou de perte de chaleur, et l'écoulement

du gaz ne peut avoir lieu qu'autant que sa pression et sa densité varient d'un point à l'autre de la conduite. Mais ces variations sont faibles, en général, et s'effectuent lentement ; les petites variations de température, dont elles seraient accompagnées si le gaz ne recevait ni ne perdait de chaleur, disparaissent bien vite par suite du contact du gaz avec les parois de la conduite dont la température est maintenue constante par la terre qui l'entoure. Ces parois cèdent ou prennent au gaz les petites quantités de chaleur nécessaires pour le maintenir à une même température sans que la leur en soit sensiblement affectée.

Avec cette hypothèse de l'écoulement isothermique, le problème de l'écoulement du gaz dans une conduite devient plus facile.

Il reste toujours à déterminer l'action des parois sur le gaz, mais on l'exprime simplement, comme le frottement d'un liquide dans les mêmes conditions, par une fonction de la vitesse moyenne. Le problème peut alors se mettre en équation de la manière suivante :

Supposons que tous les filets du gaz dans une même section transversale aient des vitesses égales à la vitesse moyenne U, et considérons, dans une conduite à diamètre constant D (fig. 112), deux sections transversales infiniment voisines AB, A'B' à une distance $ds = U dt$ l'une de l'autre. Désignons, pour abréger, par ω l'aire $\frac{\pi D^2}{4}$ et par χ le périmètre πD de la section de la conduite, et aussi par p la pression et par Π le poids spécifique du gaz dans l'espace infiniment petit considéré. La masse du gaz comprise entre ces deux sections infiniment voisines sera $\frac{\Pi}{g}\omega ds$, et l'accroissement de la quantité de mouvement de cette masse, rapporté à l'unité de temps, sera, si nous admettons que toutes les molécules passent simultanément de la vitesse U à la vitesse $U + dU$, le

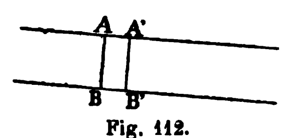


Fig. 112.

produit de cette masse par le rapport de dU à l'élément de temps dt pendant lequel cette augmentation de vitesse a eu lieu. Ce sera ainsi :

$$\frac{\Pi}{g}\,\omega ds \frac{dU}{dt}.$$

Cet accroissement de la quantité de mouvement doit être égal à la somme des projections des forces sur la direction de la vitesse U, ou sur l'axe du tuyau. La pression sur la section AB est $p\omega$, sur la section A'B' elle est $-(p+dp)\omega$; et ces deux forces se projettent en vraie grandeur. La pesanteur, ou le poids de la tranche considérée est $\Pi\omega ds$ et sa projection sur l'axe sera, en appelant dz la différence de niveau des centres de gravité des sections AB, A'B', égale $-\Pi\omega dz$. Enfin le frottement, exprimé par une fonction $f(U)$ de la vitesse moyenne, est proportionnel à la surface χds sur laquelle il s'exerce ; il vaudra donc ainsi $-\chi f(U)ds$ et se projettera en vraie grandeur sur l'axe du tuyau. On aura, en réunissant tous ces termes, l'équation :

$$\frac{\Pi}{g}\,\omega ds \frac{dU}{dt} = -\,\omega dp - \Pi\omega dz - \chi f\,(U)\,ds.$$

ou, remplaçant dans le premier terme, $\frac{ds}{dt}$ par U et divisant tous les termes par $\Pi\omega$:

$$\frac{UdU}{g} + \frac{dp}{\Pi} + dz + \frac{\chi}{\omega}\frac{f\,(U)}{\Pi}\,ds = 0\,;$$

équation tout à fait analogue à celle que nous avons trouvée plus haut pour les liquides.

Les expériences de M. Arson ont montré que, par analogie avec ce que Prony avait indiqué pour l'écoulement de l'eau, le terme $\frac{f(U)}{\Pi}$ qui représente le frottement doit s'exprimer par une fonction du second degré de U et que l'on doit poser :

$$\frac{f(U)}{\Pi} = aU + bU^2,$$

a et b étant des coefficients numériques variables avec le diamètre de la conduite.

244. Formule de l'écoulement. — D'autre part, il y a, entre Π et U une relation nécessaire qui exprime que le poids de gaz débité est le même, à travers toutes les sections de la conduite puisque le mouvement est supposé permanent; ce poids a pour valeur, pendant l'unité de temps $\Pi\omega U$, et ce produit doit être constant; comme d'ailleurs ω est constant, il en résulte :

$$\Pi U = \text{constante}.$$

D'autre part, la température du gaz étant aussi, par hypothèse, la même dans toutes les sections, le poids spécifique Π est proportionnel à la pression; le rapport $\frac{p}{\Pi}$ est constant. Désignons-le par K, ou posons :

$$\frac{p}{\Pi} = K.$$

Le produit ΠU étant constant, il en sera de même du produit pU et nous pourrons écrire, en appelant K′ une nouvelle constante :

$$pU = K'.$$

Il en résulte:

$$U = \frac{K'}{p} \qquad \text{et} \qquad dU = -\frac{K'dp}{p^2}.$$

Substituons ces nouvelles notations dans l'équation précédente; elle devient, après avoir multiplié tous les termes par p^2:

$$\frac{K'^2 dp}{gp} = p^2 dz + Kpdp + \frac{\chi}{\omega}(aK'p + bK'^2)\, ds.$$

Les deux termes p^2dz et pds ne sont pas immédiatement intégrables; on ne pourrait les intégrer que si l'on connaissait

la loi de variation de la pression p avec la longueur s de la conduite ou avec la différence de niveau z des sections successives ; mais, lorsqu'il s'agit de conduites dans lesquelles la pression varie peu, il est permis d'en négliger les variations dans les deux termes dont il s'agit, dont le premier surtout est ordinairement peu important, et d'y substituer, à la pression variable p, la valeur moyenne $\frac{1}{2}(p_0+p_1)$ entre les pressions p_0 et p_1 aux deux extrémités de la portion de conduite à laquelle on applique le calcul. Désignons par L la longueur totale de cette conduite, par h la différence de niveau de ses extrémités, h étant positif si l'extrémité d'aval est plus élevée que celle d'amont et négatif dans le cas contraire, l'intégration, effectuée sur la longueur L aux deux extrémités de laquelle existent les pressions p_0 et p_1, donnera, en mettant pour $\frac{\chi}{\omega}$ sa valeur $\frac{4}{D}$:

$$\frac{K'^2}{g}\,\text{Log.}\,\frac{p_1}{p_0}=\frac{(p_0+p_1)^2}{4}h+K\frac{p_1^2-p_0^2}{2}+\frac{4K'L}{D}\left(a\frac{p_0+p_1}{2}+bK'\right).$$

Suivant que l'on voudra calculer la vitesse moyenne U_0 à l'entrée de la conduite ou U_1 à la sortie, on remplacera, dans cette équation, la constante K' par p_0U_0 ou par p_1U_1.

Si, par exemple, on veut connaître la vitesse U_0 à l'entrée de la conduite, ce qui, dit M. Arson,[1] à qui nous empruntons ce calcul, conduit à une expression qui est en rapport plus direct avec les volumes observés dans les gazomètres, on trouve l'équation :

$$\left(\frac{4bL}{D}-\frac{1}{g}\,\text{Log.}\,\frac{p_1}{p_0}\right)U_0^2+\frac{2aL}{D}\left(1+\frac{p_1}{p_0}\right)U_0=$$
$$=\frac{K}{2}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right]-\frac{h}{4}\left(1+\frac{p_1}{p_0}\right)^2.$$

Au contraire si l'on veut connaître la vitesse U_1 à la sortie,

1. Expériences sur l'écoulement des gaz en longues conduites par M. Arson, ingénieur en chef de la Compagnie parisienne du Gaz. Paris 1867.

ce qui est en rapport plus direct avec les volumes mesurés à la consommation, on trouvera l'équation :

$$\left(\frac{4bL}{D} + \frac{1}{g}\,\text{Log.}\,\frac{p_0}{p_1}\right) U_1^2 + \frac{2aL}{D}\left(1 + \frac{p_0}{p_1}\right) U_1 =$$
$$= \frac{K}{2}\left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^2 - 1\right] - \frac{h}{4}\left(1 + \frac{p_0}{p_1}\right)^2.$$

243. Valeurs des coefficients. — Il convient de remarquer que le coefficient $K = \frac{p}{\Pi}$ représente le produit de la pression p par l'inverse du poids spécifique ou par le volume de l'unité de poids, que nous avons appelé v dans les numéros précédents. On a ainsi, d'après la loi de Mariotte, que nous supposons applicable :

$$K = \frac{p}{\Pi} = pv = RT.$$

La valeur de R a été donnée plus haut pour divers gaz et en particulier pour le gaz d'éclairage, T est la température absolue, ou celle de l'échelle centigrade augmentée de 273°.

Les coefficients a et b ont été déterminés par les expériences de M. Arson. Il a trouvé qu'ils sont variables avec le diamètre des conduites et qu'ils vont en décroissant, d'une manière très appréciable pour les petits diamètres, à mesure que cette dimension augmente. De plus, comme pour les conduites d'eau, la nature de la paroi influe sur la valeur de ces coefficients. Les chiffres ci-après se rapportent aux conduites en fonte, qui sont le plus généralement employées.

Diamètre de la conduite D	Coefficient a	Coefficient b
0,05	0,000702	0,000595
0,081	0,000589	0,000489
0,103	0,000560	0,000480
0,254	0,000237	0,000359
0,325	0,000151	0,000326
0,500	0,000020	0,000246

Dans les conduites en fer blanc, des expériences ont été faites seulement avec des diamètres de 0m05 et l'on a trouvé, pour a et b les valeurs suivantes :

$$a = 0{,}000738, \qquad b = 0{,}000345.$$

Pour les diamètres intermédiaires des conduites en fonte, on interpolerait, afin d'avoir les valeurs correspondantes de a et de b. Pour les diamètres supérieurs à 0m,50, M. Arson pense que l'on peut prendre $a = 0$ et :

$$b = 0{,}000220 \text{ pour } D = 0^{m},60$$
$$b = 0{,}000200 \text{ pour } D = 0^{m},70.$$

D'après la forme de la courbe jointe au travail de M. Arson, et qui représente les variations de b en fonction du diamètre D, on serait sans doute conduit à adopter, pour les diamètres supérieurs à 0m,70, une valeur constante, voisine de 0,000200, pour le coefficient b.

246. Simplification de la formule. — Les formules précédentes, destinées à donner la vitesse moyenne U_0 ou U_1 en fonction des pressions extrêmes p_0 et p_1, sont assez compliquées; on peut en général, dans les applications, les simplifier en leur conservant une approximation suffisante. D'abord, si les pressions p_0 et p_1 sont peu différentes l'une de l'autre, le rapport $\frac{p_1}{p_0}$ est voisin de l'unité, son logarithme est très petit et peut être négligé en présence du terme précédent lorsque la longueur L, qui affecte ce terme, est un peu grande. On peut aussi, dans le terme en U_0 et dans le terme en h, remplacer par l'unité le rapport $\frac{p_1}{p_0}$; et enfin le terme en K, affecté du facteur $1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2$, peut être écrit $\left(\frac{p_1}{p_0} + 1\right)\left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)$ ou à peu près $\frac{2(p_0 - p_1)}{p_0}$. Avec ces simplifications, l'équation en U_0 devient :

$$\frac{4L}{D}(aU_0 + bU_0^2) = K\frac{(p_0 - p_1)}{p_0} - h.$$

L'équation en U_1 donnerait la même chose avec p_1 au lieu de p_0 au dénominateur du premier terme du second membre ; les deux vitesses U_0 et U_1 sont donc elles-mêmes peu différentes.

Dans les applications, on considère qu'elles sont sensiblement égales et on adopte, pour la vitesse moyenne d'un gaz qui s'écoule par une conduite, une valeur moyenne U qui correspond à une pression moyenne intermédiaire entre p_0 et p_1. Dans cette hypothèse simplificative, on remplacera donc, en même temps que U_0 par U, la pression p_0 par cette valeur moyenne, ou le rapport $\frac{K}{p_0}$ par l'inverse du poids spécifique du gaz, mesuré à cette pression moyenne et que nous représenterons par Π. Si, de plus, toujours en vue de simplifier, on suppose que les deux extrémités de la conduite sont au même niveau, $h = 0$; et l'on obtient la formule suivante, qui est suffisante pour les applications à la distribution du gaz d'éclairage :

$$p_0 - p_1 = \frac{4L}{D} \Pi (aU + bU^2).$$

On peut, comme on l'a fait pour les liquides, représenter par J la perte de charge, ou la perte de pression par unité de longueur, et poser $J = \frac{p_0 - p_1}{L}$. La formule devient alors :

$$J = \frac{4}{D} \Pi(aU + bU^2).$$

Cette formule est alors identique à celle de Prony, que nous avons donnée au n° 77 pour l'écoulement de l'eau, le poids spécifique Π étant alors égal à l'unité. On peut même remarquer que les coefficients numériques, proposés par Prony pour l'eau, sont peu différents de ceux que M. Arson a trouvés pour le gaz, lorsque le diamètre est un peu grand. C'est au moyen de cette formule qu'ont été calculées par M. Arson les tables numériques servant à déterminer les diamètres des conduites de gaz qui, sous une pression donnée doivent débiter un volume également donné.

Dans un remarquable travail intitulé : *Étude théorique sur l'écoulement des gaz en longues conduites*[1], M. Lucien Monnier a établi, par des considérations purement théoriques, la formule suivante, pour la perte de charge dans les conduites :

$$J = 2729 \sqrt{\delta} \frac{Q}{D^3},$$

dans laquelle J est la perte de charge en millimètres d'eau par mètre de longueur de la conduite, Q le volume débité en mètres cubes à l'heure, D le diamètre de la conduite en millimètres et δ le poids spécifique du gaz, celui de l'air étant pris pour unité. Appliquée au gaz d'éclairage pour lequel $\delta = 0{,}42$ environ, cette formule devient simplement :

$$J = 2000 \frac{Q}{D^3}.$$

Si l'on y remplace Q par sa valeur $\frac{\pi D^2}{4}$ U, elle devient :

$$J = \frac{500\,\pi}{D} \cdot U = \frac{1571}{D} \cdot U.$$

Elle ne serait donc autre que la précédente dans laquelle on ferait $b = 0$ et où l'on déterminerait a par la relation $4\Pi a = \frac{1570 \times 3600}{10^3}$, ce qui donnerait $a = 0{,}00257$.

Les expériences de M. Arson et les valeurs qu'il a trouvées pour le coefficient b semblent montrer qu'il n'est pas négligeable, bien qu'il diminue lorsque le diamètre de la conduite augmente ; mais elles ont également montré que le coefficient a diminue encore plus rapidement. Ce ne serait donc que pour les petits diamètres, et sans doute surtout alors pour les petites vitesses que la formule de M. Monnier aurait chance de donner des résultats suffisamment approchés. Je ne pense pas qu'elle soit appliquée.

1. Publié dans le compte-rendu du 14e Congrès de la Société technique de l'Industrie du gaz, tenu à Nancy en 1887.

217. Conduites d'air comprimé. — Les formules et surtout les coefficients numériques qui précèdent sont applicables au gaz d'éclairage et en général à tous les gaz dont la pression diffère peu de celle de l'atmosphère. Leurs résultats ne semblent pas concorder aussi bien avec les faits lorsque la pression est différente, et en particulier lorsqu'il s'agit de transporter de l'air comprimé sous une pression de plusieurs atmosphères. Des expériences sur ce sujet ont été faites avant le commencement des travaux de percement du tunnel du Mont-Cenis, par les soins de M. Sommeiller, mais elles n'ont porté que sur des conduites d'un très faible diamètre. Tout récemment, par suite des applications de l'air comprimé au transport et à la distribution de la force motrice, la question a pris une grande importance et de nouvelles expériences ont été entreprises à Paris, à l'usine construite par la Cie Popp à St-Fargeau, et M. le professeur Riedler en a rendu compte dans une brochure dont la traduction française vient de paraître[1]. Les pertes de charge dues au frottement ont été trouvées

Longueur de la conduite de 0,30 de diamètre.	Volume écoulé par heure		Vitesse moyenne de l'air	Pression dans la conduite		Perte de charge	
	à la pression atmosphérique	à la pression moyenne de la conduite		au commencement	à la fin	totale	par kilomètre
mètres	m. c.	m. c.	m.	atmos	atmos.	atmos.	atmos.
16502	13788	2206	8.67	6.25	4.25	2.0	0.12
16502	13833	2100	8.24	6.78	4.36	2.42	0.14
16502	11142	1485	5.83	7.125	5.84	1.285	0.07
16502	8506	1060	4.1	6.9	6.28	0.62	0.03
16502	6576	865	3.4	6.78	6.4	0.38	0.02
4403	10055	1297	5.09	6.9	6.6	0.3	0.07
4403	6767	967	2.8	7.125	6.95	0.175	0.04
4403	13833	1859	7.3	6.78	6.17	0.61	0.14
4403	11142	1408	5.53	7.125	6.7	0.425	0.09
3340	11142	1610	6.32	6.0	5.84	0.16	0.048
8759	8058	1071	4.2	6.65	6.39	0.26	0.029
3340	8058	1102	4.32	6.33	6.29	0.04	0.012
4403	8588	1126	4.42	6.75	6.5	0.[illegible]5	0.056
4403	9099	1249	4.9	6.37	6.2	0.17	0.038

1. *La distribution de la force par l'air comprimé dans Paris* (Procédés Victor Popp). Paris, 1891.

notablement plus faibles que celles qui auraient été déduites des tables de M. Arson.

Le tableau ci-dessus résume les faits principaux observés par M. Riedler ; la publication complète et détaillée de ses expériences et sans doute aussi leur discussion étant annoncée par lui pour une date ultérieure.

D'expériences faites antérieurement, à l'occasion des travaux du tunnel du St-Gothard, M. Stockalper, ingénieur en chef de ces travaux, avait conclu que l'on pouvait prendre, pour calculer la perte de charge dans les tuyaux conduisant l'air comprimé, la *même formule* et *les mêmes coefficients* que pour l'eau. On a remarqué, en effet (nº 247), que les coefficients déduits par M. Arson de ses expériences ne diffèrent pas beaucoup de ceux qui avaient été proposés par Prony pour les conduites d'eau.

M. Kraft, ingénieur en chef des usines de Seraing, a vérifié l'exactitude de l'observation de M. Stockalper, et il propose d'appliquer à la conduite de l'air comprimé la formule et les coefficients de Darcy. Seulement, pour la vitesse moyenne U à introduire dans cette formule, il prend la vitesse à l'*origine* de la conduite, laquelle ne diffère pas notablement de la vitesse à l'extrémité, si la perte de charge totale n'est pas grande et si la conduite n'est pas longue. S'il en est autrement, il propose de diviser la conduite en plusieurs tronçons de petite longueur et de calculer séparément la perte de charge pour chacun d'eux. Cela étant, Π désignant le poids du mètre cube à l'origine de la conduite et J la perte de charge par mètre de longueur, exprimée en hauteur d'air au poids spécifique Π, ou bien $J\Pi$ la perte de charge par mètre exprimée en kilogrammes par mètre carré, il applique la formule de Darcy mise sous la forme :

$$\frac{J}{Q^2} = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5},$$

en prenant, dans la table dressée par Bresse, dont est extraite celle qui porte le nº III à la fin du présent volume, et pour

les divers diamètres, les valeurs de $\frac{J}{Q^2}$ réduites de moitié, c'est-à-dire qu'il les prend dans une table calculée d'après les coefficients proposés par Darcy pour la fonte neuve, tandis que celle de Bresse est applicable aux tuyaux en service.

Par exemple, s'il s'agissait de calculer la perte de charge due à la première des expériences ci-dessus de M. Riedler, on opérerait, d'après les idées de M. Kraft, de la façon suivante :

Le volume d'air écoulé par heure, mesuré à la pression atmosphérique, était de 13788^{mc}. La pression effective étant de $6^{atm},25$, ou la pression totale de $7^{atm},25$, le volume écoulé, mesuré à la pression initiale était, par seconde, de

$$\frac{13788}{7,25 \times 3600} = 0^{mc},528 = Q\,.$$

La table III, pour le diamètre $0^m,30$, donne $\frac{J}{Q^2} = 1,468$, dont la moitié est 0,734. Il en résulte : $J = 0,734Q^2 = 0^m,2048$.

D'autre part, le poids Π du mètre cube d'air, en supposant (ce qui n'est pas indiqué dans la brochure de M. Riedler) la pression atmosphérique à 760^{mm} de mercure ou à 10,330 kil. par mètre carré, et la température à 15°, serait, à la pression effective de $6^{atm},25$, exprimé par :

$$\Pi = \frac{1.293 \times 7.25 \times 273}{288} = 8\,\text{k.}\,886.$$

Par suite, la perte de charge par mètre,

$$J\Pi = 0,2048 \times 8,886 = 1^k,820,$$

ou, par kilomètre, 1820 kilogr. Or, la perte de charge observée a été de 2 atmosphères ou 20.660 kil. pour 16.502^m de longueur, soit 1.252 kilog. par kilomètre.

La différence entre le calcul et l'observation est fort grande, et il convient de faire remarquer que, d'après M. Riedler, il reste quelque incertitude sur les pertes de charge qu'il

a mesurées et qui comprennent, outre la résistance due à la conduite proprement dite, celles qui étaient produites par le passage de l'air dans des réservoirs ou des purgeurs installés sur cette conduite. La perte de charge due au seul frottement serait donc plus faible que celle qui a été constatée, ce qui augmenterait encore l'écart avec les résultats de l'application des coefficients de Darcy. D'autre part, il est difficile de savoir, d'après la brochure de M. Riedler, quel est le degré d'approximation des chiffres qu'il donne ; il est permis de supposer que les erreurs d'observation doivent être assez grandes. Si l'on compare, en effet, l'avant-dernière expérience et l'antépénultième, on remarque que, pour des débits à peu près égaux, des vitesses moyennes et des pressions très peu différentes, les pertes de charge ont été dans l'une de $0^{atm}.012$ par kilomètre et dans l'autre de $0^{atm}.056$, soit plus de quatre fois plus grande, sans que l'on puisse apercevoir le motif de cette grande différence.

Si donc, ce qui semble démontré, les tables de M. Arson ne s'appliquent pas aux conduites destinées au transport de l'air comprimé, il faut reconnaître que l'on ne possède pas, jusqu'à présent, de notions expérimentales suffisantes pour en proposer d'autres à leur place. L'usage des tables de Darcy, et en général de toutes les tables dressées pour le calcul des conduites d'eau [1], pourra fournir une approximation de la perte de charge, dont il faudra bien se contenter en attendant mieux.

248. Cas d'une conduite très longue. — Lorsque la

1. En particulier, on peut remarquer que les tables V et VI proposées au n° 84 fourniraient, pour l'exemple précédent, un résultat beaucoup plus approché que celles de Darcy. La table VI donne, en effet, pour la valeur $Q=0^{m},528$, le rapport $\frac{J}{\gamma}=0,33$ environ, et la table V, pour $D=0,30$, donne $\gamma=0,43$. Il en résulte $J=0,33\times0,43=0,142$.

Par suite, $J\Pi=0,142\times8,886=1^{k},262$, soit 1262^{k} par kilomètre, alors que l'observation a donné 1252 kilogr. L'accord est aussi satisfaisant que possible.

conduite est très longue, on peut, comme il a été dit plus haut, la diviser en plusieurs parties, pour chacune desquelles on calcule successivement la perte de charge ; on trouve ainsi la pression et par suite le volume et la vitesse du gaz au commencement de chacune des sections en lesquelles la longueur a été partagée. Mais on peut aussi, en supposant que la perte de charge s'exprime en fonction du carré de la vitesse moyenne U, soit par la formule de Darcy, soit autrement, adopter le mode de calcul suivant, dont je dois la communication à l'obligeance de M. Kraft.

Soient, à l'origine de la conduite, p_1 la pression, Π_1 le poids de l'unité de volume, U_1 la vitesse moyenne, et $Q_1 = \frac{\pi D^2}{4} U_1$ le volume débité en une seconde. Représentons par p, Π, U et Q les quantités correspondantes, en un point quelconque de la conduite défini par son abscisse x, et par p_2, Π_2, U_2 et Q_2 les mêmes quantités à l'extrémité de la conduite, dont L sera la longueur totale. Nous aurons, entre ces quantités, les relations évidentes :

$$\Pi Q = \Pi_1 Q_1 = \Pi_2 Q_2 ; \qquad \frac{p}{\Pi} = \frac{p_1}{\Pi_1} = \frac{p_2}{\Pi_2}.$$

La perte de charge pour une longueur infiniment petite dx étant représentée par $\frac{dp}{\Pi}$, on aura :

$$-\frac{1}{4}\frac{D\,dp}{\Pi dx} = b_1 U^2 = b_1 \left(\frac{4}{\pi D^2}\right)^2 Q^2,$$

ou, en appelant C le coefficient supposé constant : $C = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5}$,

$$dp = -CQ^2 \Pi dx = -C\frac{p_1}{p}\Pi_1 Q_1^2 dx.$$

Remarquant que C, p_1, Π_1 et Q_1 sont des constantes, on trouvera en intégrant sur toute la longueur L de la conduite :

$$p_1^2 - p_2^2 = 2Cp_1\Pi_1 Q_1^2 L ;$$

ou

$$p_2 = p_1 \sqrt{1 - 2C \frac{\Pi_1}{p_1} Q_1^2 L}.$$

A une température donnée, le rapport $\frac{\Pi_1}{p_1}$ est constant et égal à $\frac{1}{RT}$, soit, par exemple, à 10° et pour l'air atmosphérique :

$$\frac{\Pi_1}{p_1} = \frac{1}{29,9 \times 283} = 0.0001207;$$

alors, la perte de charge totale, $p_1 - p_2$ s'exprime par :

$$p_1 - p_2 = p_1 \left(1 - \sqrt{1 - 0,0002414\ CQ_1^2 L}\right).$$

Le coefficient numérique, sous le radical, varierait un peu avec la température, mais dans de très faibles proportions, et dans la plupart des applications pratiques on pourra lui conserver la valeur indiquée.

Si L n'est pas très grand, et que le dernier terme soit une petite fraction de l'unité, on a, à peu près :

$$\sqrt{1 - 2C \frac{\Pi_1}{p_1} Q_1^2 L} = 1 - C \frac{\Pi_1}{p_1} Q_1^2 L,$$

et par suite $p_1 - p_2 = C\Pi_1 Q_1^2 L$, comme nous l'avons admis dans les calculs approximatifs précédents.

249. Perte d'énergie due au transport de l'air comprimé. — La perte de charge produite par le frottement de l'air dans les conduites ne représente pas, à beaucoup près, la perte d'énergie du gaz. En effet, pendant que la pression diminue, du fait de cette perte de charge, le volume correspondant du gaz augmente et, *si la température du gaz est restée constante*, c'est-à-dire si les parois de la conduite lui ont restitué la chaleur qui correspond à sa détente, le travail mécanique que peut produire un mètre cube d'air à l'extrémité d'une longue conduite différera peu de celui qui a été nécessaire pour le comprimer.

Soit, comme ci-dessus, p_1 et p_2 les pressions à l'origine et

à la fin de la conduite, de telle sorte que $p_1 - p_2$ soit la perte de charge totale et p_0 la pression de l'atmosphère, à laquelle a été pris l'air que l'on a comprimé et où se détendra cet air après avoir été utilisé. Le travail mécanique nécessaire à la compression par unité de poids est, comme on a dit (n° 234) :

$$W_1 = v_1 p_1 \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right];$$

celui qui pourra être fourni par la détente de cet air, d'après la même formule :

$$W_2 = v_2 p_2 \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

La température étant supposée constante, $v_2 p_2 = v_1 p_1$, et par suite le rendement de la conduite sera exprimé par :

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1 - \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Prenons par exemple la première expérience rapportée par M. Riedler, dans laquelle la perte de charge totale a été de 2 atmosphères, soit de 32 pour cent de la pression initiale effective qui était de 6 atm. 25. Nous avons $\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{7.25}$ et $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{5,25}$, et nous en déduisons le rendement :

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1 - 0,617}{1 - 0,562} = 0,875.$$

La perte d'énergie n'est donc que de 12 1/2 pour cent, au lieu de 32.

250. Tables numériques. — On trouvera à la fin de ce volume quelques tables destinées à faciliter les calculs relatifs aux fluides élastiques. D'abord la table XIV est un extrait de celles de M. Arson, dont il a été question plus haut (n° 246).

Elle est à double entrée et donne, pour un certain nombre de diamètres usuels, la perte de charge, exprimée en mètres de hauteur d'eau pour mille mètres de longueur, ou en millimètres pour un mètre, correspondants à divers débits, soit d'air atmosphérique, soit de gaz d'éclairage. Mais comme il a été dit au n° 247, cette table ne paraît devoir donner des résultats à peu près exacts que pour le gaz d'éclairage, ou pour l'air à faible pression. Lorsque le volume débité devient un peu grand et que la vitesse dépasse deux ou trois mètres par seconde, les pertes de charge qu'on en déduit sont beaucoup trop fortes. Il ne faut donc en adopter les résultats qu'à titre d'indication. On obtiendrait en général, comme on a dit, des résultats du même ordre d'approximation en prenant, pour la perte de charge, les résultats donnés par les tables servant au calcul des conduites d'eau.

La table XV donne les valeurs des logarithmes naturels de tous les nombres, de centième en centième, compris entre 1 et 3, et de tous les nombres, de dixième en dixième, compris entre 1 et 10. Pour obtenir, au moyen de cette table, le logarithme naturel d'un nombre quelconque, il faut multiplier (ou diviser) le nombre donné par une puissance de 10 telle que le produit (ou le quotient) soit compris entre 1 et 10 ; puis chercher le logarithme de ce produit (ou de ce quotient) dans la première partie de la table s'il est inférieur à 3 et dans la seconde s'il est compris entre 3 et 10. Au logarithme trouvé, on retranchera (ou on ajoutera) le produit du logarithme naturel de 10, qui est 2,3026, par l'exposant de la puissance de 10 par laquelle on a multiplié (ou divisé) le nombre donné.

Exemple : Trouver le logarithme naturel de 0,0518.

Multiplions ce nombre par $100 = 10^2$, nous obtiendrons 5,18.
La table donne Log. 5,10 = 1,629 et Log. 5,20 = 1,649.
Par interpolation, on trouve donc : Log. 5,18 = 1,645
Retranchons $2 \times 2,3026 =$ — 4,605
La différence sera, Log. 0,0518 = — 2,960

Le logarithme est négatif, le nombre donné étant inférieur à l'unité.

De même, s'il s'agit de trouver le nombre correspondant à un logarithme naturel donné, on ajoutera à ce logarithme (ou l'on en retranchera) autant de fois 2,3026 qu'il sera nécessaire pour obtenir un total (ou un reste) positif compris entre 0 et 2,3026 ; la table donnera le nombre correspondant qu'il suffira de diviser (ou de multiplier) par la puissance de 10 dont l'exposant sera le nombre de fois que l'on aura ajouté (ou retranché) 2,3026.

Exemple : Trouver le nombre dont le logarithme naturel est 5,617.

Divisons ce logarithme par 2,3026, le quotient est 2 et le reste 1,0118 ; c'est-à-dire qu'en retranchant du logarithme donné deux fois 2,3026, il reste 1,012 environ qui est le logarithme de 2,75. Le nombre dont le logarithme naturel est 5,617 est donc $2{,}75 \times 10^2 = 275$.

Les logarithmes naturels figurent dans toutes les formules relatives aux transformations isothermiques des gaz.

Enfin la table XVIII donne les puissances $\frac{k-1}{k}$ des nombres consécutifs, de centième en centième, entre 0 et 1, de dixième en dixième, entre 1 et 10 et d'unité en unité entre 10 et 100. La puissance $\frac{k-1}{k}$ des nombres compris entre 100 et 1,000 s'obtiendrait en multipliant celle des nombres correspondants compris entre 1 et 100 par la puissance $\frac{k-1}{k}$ de 10 qui est 1,953, et ainsi de suite.

La puissance $\frac{k-1}{k}$ se rencontre dans la plupart des formules relatives aux transformations adiabatiques des gaz.

Cette table XVIII, avec la table XVI, qui donne les inverses des nombres, rend les calculs très faciles. Ainsi, par exemple, à la fin du n° 249, nous avons eu à calculer les puissances $\frac{k-1}{k}$ des rapports $\frac{1}{7.25}$ et $\frac{1}{5.25}$. La table XVI donne immédiatement : $\frac{1}{7.25} = 0{,}138$ et $\frac{1}{5.25} = 0{,}190$ environ. La table XVIII donne

0,553 pour 0,13 et 0,565 pour 0,14, soit par interpolation : 0,562 pour 0,138, puis, 0,617 pour 0,190.

L'emploi de la table XVI, des inverses des nombres, exige un peu d'attention pour placer la virgule dans le résultat. On doit faire précéder ce résultat d'autant de zéros (dont le premier précède la virgule) qu'il y a de chiffres avant la virgule dans le nombre donné ; ou réciproquement, s'il y a un certain nombre de zéros au commencement du nombre donné, il y aura dans le résultat le même nombre de chiffres avant la virgule ; ainsi l'inverse de 286 sera 0,003497 et l'inverse de 0,051 sera 19,6 et ainsi de suite.

Cette table des inverses peut être appliquée, bien entendu, à toutes sortes de calculs dans lesquels elle apporte des simplifications.

CHAPITRE X

RÉSISTANCE DES FLUIDES

§ 1. *Etude théorique.* — § 2. *Etude expérimentale.*

---

§ 1.

ÉTUDE THÉORIQUE

251. Action mutuelle des fluides et des solides en mouvement relatif. — Le problème de l'action mutuelle des fluides et des solides en mouvement relatif, qui consiste à déterminer l'effort ou l'impulsion exercée sur un corps solide en repos par un fluide en mouvement, ou, inversement, la résistance opposée par un fluide en repos au mouvement d'un solide qui y est plongé, est un des plus difficiles de l'hydraulique. « Il est étonnant que, dans un siècle aussi éclairé, « on sache si peu de choses sur la résistance des fluides, et « que, tandis que l'on fait tous les jours usage de l'eau et de « l'air pour mouvoir nos machines ou conduire nos vais« seaux, nous n'ayons pas, ou plus d'expériences, si la théo« rie est trop compliquée, ou plus de théorie, si elle doit être « le fruit de l'expérience.[1] » Cette phrase, écrite en 1786, est encore vraie aujourd'hui. Le problème de la résistance des

1. Du Buat, *Principes d'hydraulique*, discours préliminaire.

fluides n'a été résolu théoriquement, par Bernoulli, que dans le cas simple où l'on cherche l'impulsion, contre une surface plane, d'une veine fluide de dimensions notablement plus faibles que l'étendue de cette surface. Lorsqu'il s'agit d'un corps solide plongé dans un fluide indéfini, on ne possède aujourd'hui que des essais de théorie très incomplets, à peine suffisants pour rendre compte des faits d'expérience, en petit nombre, qui ont été constatés.

252. Impulsion d'une veine fluide contre un plan. — Considérons une veine fluide A'B'AB (fig. 113), dont la section transversale est ω et la vitesse v, venant heurter un plan CD. A une certaine distance en avant de ce plan, la veine s'étale, les filets fluides se courbent en tournant leur convexité vers le plan et si celui-ci, comme nous le supposons, est assez étendu, les vitesses des filets deviennent, à une certaine distance, en des points tels que C, D, parallèles à la direction du plan. Ecrivons l'équation qui exprime le théorème des quantités de mouvement projetées sur une direction perpendiculaire au plan heurté, pour la masse fluide comprise entre la section AB, où la veine commence à s'élargir et les points C, D, où les vitesses deviennent ainsi parallèles à l'obstacle. Désignons par P le poids de cette masse fluide et par R la pression normale qu'elle exerce sur le plan, son mouvement étant supposé arrivé à l'état de permanence. La quantité de mouvement de la masse dont il s'agit étant alors constante, l'accroissement de la quantité de mouvement totale se composera de celle du fluide qui sort de l'espace considéré, pendant l'unité de temps, diminuée de celle du fluide qui y entre. Or, la quantité de mouvement du fluide qui sort a, sur la perpendiculaire au plan, une projection nulle, puisque les vitesses aux

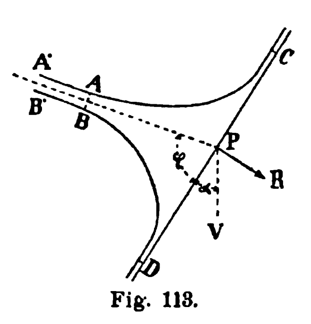


Fig. 113.

points C, D, sont parallèles au plan. La masse fluide qui entre en AB dans l'unité de temps est $\frac{\Pi}{g} v\omega$, sa quantité de mouvement, si l'on suppose tous les filets animés de la vitesse moyenne, vaut $\frac{\Pi}{g} v^2\omega$, et la projection, sur la normale au plan, de cette quantité de mouvement est, en appelant φ l'angle de la veine liquide avec le plan, $\frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin\varphi$.

Les forces extérieures sont la pesanteur ou le poids P de la masse fluide, dont la projection sur la normale au plan sera $P \sin\alpha$, en appelant α l'angle du plan avec la verticale, et la réaction de la surface heurtée, égale et contraire à l'impulsion R cherchée, qui se projette en vraie grandeur. L'équation des quantités de mouvement projetées sera ainsi :

$$0 - \frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin\varphi = P \sin\alpha - R.$$

On en déduit :

$$R = P \sin\alpha + \frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin\varphi. \tag{1}$$

L'impulsion R se compose de deux parties : la première $P \sin\alpha$ est la pression statique due au poids de la masse fluide qui repose sur le plan, l'autre, $\frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin\varphi$, qui dépend de la vitesse, est réellement l'impulsion ou la pression dynamique qu'il s'agit d'évaluer. On peut l'écrire, en faisant abstraction de la première, qui s'annule d'ailleurs dans le cas où le plan est vertical :

$$R = \frac{\Pi}{g} \frac{\omega}{\sin\varphi} (v \sin\varphi)^2.$$

Elle est alors le produit de la densité du liquide, $\frac{\Pi}{g}$, par l'aire de la section faite dans la veine liquide par un plan parallèle à la surface heurtée, $\frac{\omega}{\sin\varphi}$, et par le carré de la composante de la vitesse suivant la normale au plan $(v \sin\varphi)^2$.

Les résultats de cette formule ont été vérifiés par de nombreuses expériences.

Si le plan n'était pas assez large pour que les vitesses à la sortie fussent devenues parallèles à sa direction, ou si la surface heurtée, au lieu d'être plane, était courbe, le premier terme de l'équation ci-dessus, au lieu d'être zéro, devrait exprimer la projection, sur la direction R, de la quantité de mouvement du fluide sortant, de sorte qu'en appelant v_1 la vitesse des filets fluides à la sortie, φ_1 l'angle de cette vitesse (supposé le même pour toutes) avec la direction normale à R, ce terme serait $\frac{\Pi}{g}\omega v v_1 \sin\varphi_1$. L'expression de la résistance R serait alors, en faisant abstraction de sa partie statique $P\sin\alpha$:

$$R = \frac{\Pi}{g}\omega v^2 \sin\varphi\left(1 - \frac{v_1 \sin\varphi_1}{v\sin\varphi}\right).$$

La vitesse v_1 est généralement inconnue, mais on peut admettre, comme approximation, lorsqu'il n'y a pas de frottement, qu'elle est égale à la vitesse initiale v. Alors :

$$R = \frac{\Pi}{g}\omega v^2 \sin\varphi\left(1 - \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\right).$$

Lorsque, par exemple, la veine est reçue par un vase hémisphérique ou lorsque le plan sur lequel elle tombe normalement est muni d'un rebord de hauteur convenable, qui oblige le fluide à retourner en arrière parallèlement à sa direction primitive, $\sin\varphi = 1$ et $\sin\varphi_1 = -1$ et

$$R = 2\frac{\Pi}{g}\omega v^2.$$

L'impulsion est double de celle qui se serait produite sur un plan indéfini.

Ce résultat, donné pour la première fois par Euler, a été vérifié par les expériences de Morosi, de Savart et de Bidone.

253. Impulsion d'un courant indéfini. — Le problème

devient beaucoup plus compliqué lorsque le corps solide, au lieu d'être simplement heurté par le fluide sur une de ses faces, se trouve entouré de toutes parts par un fluide indéfini en mouvement, qui presse aussi bien sur sa face postérieure que sur la face antérieure. Les géomètres du siècle dernier l'ont abordé en vain et se sont heurtés successivement à un résultat paradoxal donnant zéro pour l'impulsion ou la résistance dont il s'agit. Cette difficulté tient à ce que les fluides considérés par ces géomètres étaient des *fluides parfaits* dans lesquels le frottement intérieur est supposé nul, et, dans cette hypothèse, la même difficulté « subsistera toujours, dit Bossut, de quelque manière qu'on détermine les vitesses des « filets du fluide: elle porte sur le principe même que son action contre un corps exposé à son cours provient seulement « de la pression de ce fluide. Si la chose est, en effet, ainsi, il « s'ensuit que toutes les fois que la figure du corps sera telle « que les filets fluides aient la même vitesse le long de la partie postérieure que le long de la partie antérieure (ce qui « peut avoir lieu dans plusieurs cas), le fluide ne tendra à imprimer aucun mouvement au corps. » Bossut ajoute :

« Ce résultat est inadmissible. Il paraît donc qu'outre la « pression, il se fait dans le fluide une perte de mouvement « qui passe au corps exposé à son courant. »

C'est, en effet, que l'impulsion dont il s'agit provient *uniquement* de ce que l'on appelle l'imperfection de la fluidité, c'est-à-dire de la production de frottements surtout intérieurs du fluide.

254. Expression générale de l'impulsion. — Considérons un liquide, ou plus généralement un fluide remplissant un espace indéfini, et animé, en tous ses points, de vitesses horizontales égales et constantes dans toute l'étendue d'un même filet fluide, c'est-à-dire supposons que ce fluide soit en état de mouvement permanent, uniforme, horizontal, afin de faire abstraction de la pesanteur; admettons aussi, pour la

même raison, que le poids du fluide soit négligeable. Dans cette hypothèse, toutes les particules fluides étant animées de vitesses égales et parallèles sont en repos relatif et les pressions sont partout normales aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent. Si, dans une pareille masse fluide en mouvement, nous plaçons un corps de dimensions finies, supposé retenu par un fil dans une position fixe, les filets fluides devront se dévier à la rencontre du solide; mais l'expérience montre qu'à une certaine distance, aussi bien en avant et en arrière que latéralement, le mouvement primitif du fluide ne sera en rien modifié. Si donc, de la masse fluide indéfinie, on abstrait celle qui serait comprise dans un cylindre horizontal CDFE (fig. 114) suffisamment large et long, entourant le corps solide de toutes parts, le mouvement de la masse fluide située en dehors de ce cylindre sera exactement le même que si le corps solide n'existait pas; de sorte que, pour l'étude de l'impulsion qui lui est transmise par le fluide, il suffira de considérer la portion du fluide comprise dans ce cylindre.

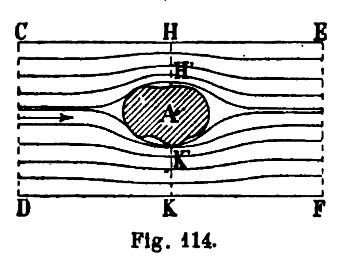


Fig. 114.

Désignons alors par P, P′ les pressions totales qui s'exercent sur les deux sections extrêmes CD, EF de ce cylindre, par ω l'aire commune de ces deux sections, par v la vitesse commune de tous les filets fluides qui les traversent et par R l'impulsion totale, inconnue, exercée par le fluide sur le corps solide que nous supposerons symétrique par rapport au courant, de façon que R soit parallèle à la direction des vitesses v.

Si nous appliquons à la masse fluide considérée le théorème des quantités de mouvement projetées sur la direction de l'axe horizontal du cylindre, nous aurons simplement, puisque nous abstrayons le poids du fluide qui, d'ailleurs, aurait une projection nulle, et que les pressions latérales sur le contour du cylindre, étant normales, disparaissent également :

$$R = P - P'.$$

Appliquons le théorème des forces vives pendant un temps dt, en appelant $-T_f$ le travail total des frottements ou des composantes tangentielles des pressions des filets ou éléments fluides les uns sur les autres, ainsi que sur le corps plongé, pendant l'unité de temps ; ce travail sera, pendant le temps dt, exprimé par $-T_f dt$. Le travail de toutes les autres forces sera nul à l'exception de celui des pressions P et P', lequel sera respectivement $Pvdt$ et $-P'vdt$. Et comme la force vive est restée la même en tous les points, puisque le mouvement est permanent, nous aurons, pour l'équation des forces vives :

$$Pvdt - P'vdt - T_f dt = 0,$$

ou bien, en divisant par dt :

$$(P - P')v = T_f,$$

ce qui, combiné avec l'équation précédente, donne :

$$R = \frac{T_f}{v}. \tag{2}$$

On voit donc bien que l'impulsion R serait nulle si le travail des frottements T_f était lui-même égal à zéro.

Il s'agit d'appliquer ces principes généraux à des exemples particuliers, autant que peut le permettre l'imperfection de nos connaissances sur le frottement dont nous avons appelé T_f le travail pendant l'unité de temps.

Nous pouvons déjà en avoir une expression approchée en appliquant ce que nous avons dit aux nos 42 et 43 au sujet de l'écoulement permanent des fluides. D'après ce qui y est exposé, lorsque les vitesses du fluide vont en croissant graduellement, ce qui arrive lorsque la section transversale à travers laquelle il s'écoule diminue même brusquement, il ne se produit aucune perte de charge sensible, c'est-à-dire que le frottement intérieur est négligeable. Si, au contraire, la section transversale subit un accroissement brusque ou rapide, la vitesse décroissant rapidement, il en résulte une perte de charge ou de force vive égale au produit de la masse écoulée dans l'unité de temps par la moitié du carré de la vitesse perdue.

Mais ces variations de la vitesse, corrélatives à celles de l'étendue de la section d'écoulement, ne peuvent se calculer qu'autant que l'on connaît ces variations de grandeur de la section qui, dans notre hypothèse, serait indéfinie.

Les observations s'accordent à montrer que la déviation des filets fluides, produite dans une masse indéfinie, par un solide qui s'y trouve plongé, ne se fait pas sentir au-delà d'une section transversale d'une étendue qui ne dépasse pas 4 à 8 fois celle du corps solide ; en d'autres termes l'aire ω du cylindre tel que CDEF, qu'il faut considérer autour d'un solide A pour comprendre tous les filets liquides qui sont déviés par la présence de ce solide, est comprise entre 4 et 8 fois l'aire de la section la plus large de ce corps, aire que nous désignerons par A. Ce rapport est le plus ordinairement compris entre 5 et 6,5.

255. Théorie de Poncelet. — Poncelet, en partant de ce fait, est parvenu à établir une théorie dont les résultats s'accordent assez bien avec ceux de l'expérience.

Soit ω la section transversale CD (fig. 114) du cylindre fictif dont nous venons de parler, et ω_1 celle, telle que HH'KK', où les vitesses sont les plus grandes ; si les vitesses moyennes, dans ces deux sections, sont v et v_1, on aura la relation :

$$v\omega = v_1\omega_1$$

exprimant la conservation du volume du liquide. D'après ce que nous venons de dire, le travail des frottements T_f est exprimé par la perte de charge due à l'élargissement brusque ou rapide que subit la section transversale entre HH'KK' et EF, ou en passant de la valeur ω_1 à la valeur ω, et cette perte de charge correspond à la vitesse perdue $(v_1 - v)$; le travail T_f a donc pour valeur, pour l'unité de temps, $\frac{\Pi}{g} v\omega \frac{(v_1 - v)^2}{2}$ et ce travail, divisé par v, est égal à l'impulsion R qui a ainsi pour expression, d'après l'équation (7) du n° 42, page 84 :

$$R = \frac{\Pi}{g} \omega \frac{(v_1 - v)^2}{2}.$$

On peut déduire directement cette équation du théorème de Bernoulli appliqué successivement aux deux portions du fluide comprises : la première entre la section initiale CD$=\omega$ du cylindre fictif et la section la plus étroite HH'K'K$=\omega_1$, et la seconde, entre cette section et l'extrémité EF du cylindre où la section redevient ω. On a, en désignant par p, p_1 et p' les pressions par unité de surface dans ces trois sections où les vitesses sont v, v_1 et v, les deux équations :

$$(3) \qquad \frac{p}{\Pi}+\frac{v^2}{2g}=\frac{p_1}{\Pi}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p'}{\Pi}+\frac{v^2}{2g}+\frac{(v_1-v)^2}{2g}.$$

ce qui donne bien :

$$\frac{p-p'}{\Pi}=\frac{(v_1-v)^2}{2g};$$

et puisque $P=p\omega$ et $P'=p'\omega$:

$$R=P-P'=\frac{\Pi\omega}{g}\frac{(v_1-v)^2}{2}:$$

La perte de charge exprimée par $\frac{(v_1-v)^2}{2g}$ devrait être augmentée du terme correctif $\frac{1}{9}\frac{v^2}{2g}$ destiné à tenir compte de l'inégalité de vitesse des filets fluides et dont la signification a été donnée au n° 42, page 85 ; nous le négligeons provisoirement.

L'expression de l'impulsion R peut se mettre sous la forme :

$$R=\frac{\Pi}{g}A\frac{v^2}{2}\cdot\frac{\omega}{A}\left(\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}\right)^2,$$

ce qui revient à :

$$(4) \qquad R=K\Pi A\frac{v^2}{2g};$$

en désignant par K le rapport :

$$K=\frac{\omega}{A}\left(\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}\right)^2.$$

Le coefficient numérique K mesure ainsi l'impulsion, qui se trouve exprimée par le poids d'une colonne liquide ayant pour base la section transversale maximum A du corps heurté et pour hauteur le produit par K de la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ due à la vitesse des filets liquides en mouvement.

256. Résultats de cette théorie. — Lorsque le corps solide est terminé, vers l'avant, par une proue de forme hémisphérique ou ellipsoïdale, de manière que les filets fluides

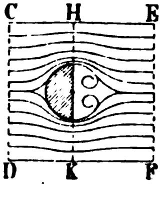


Fig. 115.

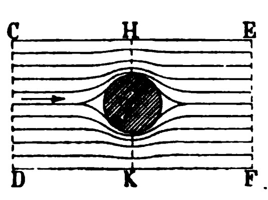


Fig. 116.

se divisent progressivement en restant toujours en contact avec sa surface, la section la plus rétrécie ω_1 est égale à la différence $\omega - A$. Si, au contraire, le solide est terminé, à l'avant, par une surface plane, normale au courant, il se produit,

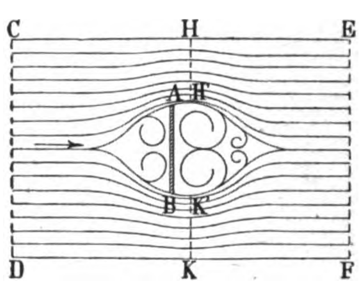


Fig. 117.

au-delà de ce plan, une contraction du courant fluide et la section la plus rétrécie n'est plus qu'une fraction $m(\omega - A)$ de cette différence, le coefficient de contraction m ayant des valeurs variables.

Le coefficient d'impulsion K prend alors la forme suivante, obtenue en mettant dans son expression ci-dessus la valeur $m(\omega - A)$ au lieu de ω_1 :

$$(5) \qquad K = \frac{\omega}{A}\left(\frac{\frac{\omega}{A}}{m\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)} - 1\right)^2.$$

Et l'on voit qu'il ne dépend que des deux quantités m et $\frac{\omega}{A}$, également inconnues. Cette dernière formule s'applique d'ailleurs également au premier cas où il n'y a pas de contraction : il suffit d'y faire $m = 1$.

Il faut alors se servir des valeurs de K données par l'observation et chercher les grandeurs qu'il convient d'attribuer à ces deux quantités pour faire concorder cette formule avec les faits, et l'on pourra en étendre l'emploi à d'autres faits à peu près analogues. Il est bien entendu que les valeurs de $\frac{\omega}{A}$ et de m doivent être comprises dans leurs limites probables, c'est-à-dire entre 4 et 8 environ pour la première et entre 0,70 et l'unité pour la seconde.

Lorsque le corps plongé a la forme d'une demi-sphère ou d'un demi-sphéroïde (fig. 115) tournant sa convexité vers l'amont, ou bien la forme d'une sphère entière (fig. 116) ou d'un sphéroïde entier, la valeur du coefficient K a été trouvée, expérimentalement, comprise entre 0,50 et 0,60, plus voisine de ce dernier chiffre. La formule (5) donne $K = 0,56$ pour $m = 1$ et $\frac{\omega}{A} = 3,50$. La valeur $m = 1$ suppose qu'il n'y a aucune contraction, ou que les directions des filets épousent exactement le contour du sphéroïde, ce qui semble assez probable. Pour $m = 0,96$, qui correspond à une très faible contraction, on a $K = 0,60$ avec $\frac{\omega}{A} = 4$; toutes valeurs qui se trouvent à peu près dans les limites indiquées.

Lorsque le corps plongé a la forme d'une plaque mince pla-

cée dans une direction perpendiculaire au courant (fig. 117), le coefficient m devient nécessairement plus petit et se trouve probablement voisin de 0,80. La valeur de K, pour une pareille plaque, a été trouvée de 1,80 à 1,90, et c'est ce que donne la formule (5) lorsque l'on y met pour m la valeur 0,80 et pour $\frac{\omega}{A}$, 3,80 environ. Cette formule peut donc s'accorder assez bien avec les observations, mais il semble difficile d'en étendre l'emploi à des exemples qui différeraient un peu de ceux qui ont servi à déterminer les coefficients, car on est forcé de faire alors des hypothèses sur les valeurs de m et de $\frac{\omega}{A}$; et un très petit changement dans celle de m en produit un grand dans celle du coefficient cherché K : par exemple, pour $\frac{\omega}{A}=6$, la formule donne $K=1,10$, lorsque $m=0,84$, et $K=0,67$ avec $m=0,90$.

257. Utilité d'une seconde approximation. — Il serait donc utile d'avoir une formule qui, dans une certaine mesure, pût tenir compte de la forme du solide, car c'est cette forme seule qui fournit des indications sur la valeur à attribuer à ce coefficient m. D'après sa définition, il ne dépend que de la forme du solide en avant de la section la plus large A, ou de la *proue* ; si la forme de cette proue présente des courbures telles que les filets fluides ne s'écartent pas de sa surface, m a des valeurs voisines de l'unité ; il décroît au contraire en se rapprochant de 0,80, qui paraît être sa limite inférieure, à mesure que la proue se raccourcit et disparaît, ce qui arrive quand le solide se termine, à sa face antérieure, par un plan perpendiculaire au courant. Mais ce n'est pas la proue seule qui influe sur la grandeur de l'impulsion du fluide, la configuration du solide, en arrière de sa section la plus large, la forme et les dimensions de la *poupe* peuvent modifier, dans des proportions très notables, l'effort exercé par le liquide et la formule (5) est absolument impuissante à rendre compte de

ces effets. La nécessité d'une formule plus complète n'est donc pas contestable. La seule tentative, à ma connaissance, qui ait été faite à ce sujet, est celle de Saint-Venant, dont je vais donner ici un aperçu sommaire[1].

258. Théorie de Saint-Venant. — De Saint-Venant a eu surtout en vue d'exprimer l'influence de la longueur du solide et de la poupe, qui est complètement laissée de côté par la formule précédente. Il examine, pour cela, deux cas extrêmes :

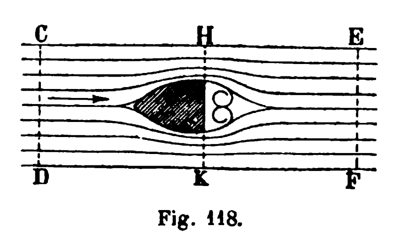


Fig. 118.

1° Le corps solide, dont la forme, vers l'amont, peut être quelconque, se termine, à l'arrière, par un plan qui coïncide avec sa section la plus large ; il est donc absolument dépourvu de poupe et sa longueur, abstraction faite de la proue, est aussi réduite que possible (fig. 118);

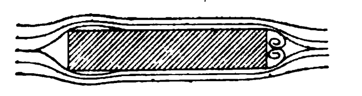


Fig. 119.

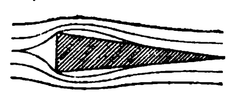


Fig. 120.

2° Le corps solide, avec ou sans proue, présente, au-delà de sa section la plus large, ou bien une forme prismatique à section constante sur une longueur supérieure à deux ou trois fois sa largeur (fig. 119); ou bien des dimensions décroissantes suivant une loi quelconque (fig. 120).

1. *Résistance des fluides. Mémoires de l'Académie des sciences,* tome XLIV 1887.

259. Cas d'un solide sans poupe. — Le raisonnement qui a été fait plus haut (n° 255) pour établir la formule (4) s'applique alors sans modification. Pour rendre cette formule plus rigoureuse, il suffit d'y ajouter ce qui a été négligé alors, savoir : 1° le terme correctif, égal à peu près à $\frac{1}{9} \cdot \frac{v^2}{2g}$, destiné à tenir compte de l'inégalité de vitesse des filets fluides; 2° un terme destiné à évaluer les frottements sur la surface de la proue et qui s'ajoutent à l'impulsion proprement dite.

Pour le premier terme correctif, $\frac{1}{9} \cdot \frac{v^2}{2g}$, qui doit être ajouté à $\frac{(v_1 - v)^2}{2g}$, il pourra être fondu avec celui-ci en faisant, sur le rapport des vitesses v et v_1, une hypothèse probable, au moins comme moyenne ou approximation. Le rapport de ces deux vitesses est l'inverse de celui des sections ω et $\omega - A$ ou $m(\omega - A)$. On peut admettre, d'après ce qui a été dit, que lorsque $m = 1$, ou qu'il n'y a pas de contraction, $\frac{\omega}{A}$ est à peu près égal à 3,50; il en résulte alors $\frac{\omega}{\omega - A} = \frac{7}{5}$. La même valeur $\frac{7}{5}$ se trouve, pour le rapport $\frac{\omega}{m(\omega - A)}$, avec $m = 0{,}90$ et $\frac{\omega}{A} = 5$. Si on la considère comme une moyenne applicable à tous les cas, on aura $\frac{v_1}{v} = \frac{7}{5}$, ce qui donne $v = \frac{5}{2}(v_1 - v)$. Le terme correctif $\frac{1}{9}\frac{v^2}{2g}$ vaudrait ainsi :

$$\frac{25}{36}\frac{(v_1 - v)^2}{2g} = 0{,}70\,\frac{(v_1 - v)^2}{2g}.$$

La formule ainsi corrigée deviendrait, en désignant par R_1 la première partie de l'impulsion du liquide, due à la pression proprement dite, abstraction faite du frottement du liquide sur la proue :

$$R_1 = 1{,}70\frac{\Pi}{g}\,\omega\,\frac{(v - v_1)^2}{2g} = \Pi A\frac{v^2}{2g} \cdot 1{,}7\frac{\omega}{A}\left(\frac{\omega}{m(\omega - A)} - 1\right)^2;$$

c'est-à-dire que le coefficient K_1, qui mesure cette impulsion partielle R_1, a pour expression :

$$K_1 = 1,7 \frac{\omega}{A} \left[\frac{\frac{\omega}{A}}{m\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)} \right]^2.$$

Par une discussion très détaillée et délicate d'un certain nombre de faits d'expérience, de St-Venant a trouvé que le coefficient numérique qui affecte cette formule est le quotient de deux nombres qu'il appelle N et q' ; le premier, N, celui par lequel il faut multiplier les forces vives dues aux différences des vitesses moyennes du fluide dans deux sections pour avoir les sommes des forces vives dues aux différences des vitesses réelles, a des valeurs comprises entre 1,80 et 2,10 et vaut, en moyenne, à peu près 1,9 ; le second, q', celui par lequel il faut diviser ces sommes de forces vives pour tenir compte des variations des pressions sur les poupes fluides vaut à peu près 1,11, ce qui donne, pour le quotient, $\frac{N}{q'}$, 1,71 environ, au lieu du chiffre 1,70 qui vient d'être trouvé autrement, d'une façon bien moins rigoureuse.

Comme d'ailleurs cette valeur peut être variable, nous la représenterons par la lettre n et nous écrirons la première partie R_1 de l'impulsion et le coefficient K_1 correspondant sous la forme :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} R_1 &= n \frac{\Pi}{g} \omega \frac{(v_1 - v)^2}{2g}, \\ K_1 &= n \frac{\omega}{A} \left[\frac{\frac{\omega}{A}}{m\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)} \right]^2 ; \end{aligned} \right.$$

étant entendu que le coefficient n vaut environ 1,70.

260. Influence du frottement. — Il faut, à cette première partie, ajouter l'impulsion due au frottement, que nous

désignerons par R_2. Elle est généralement faible et peut, en tout cas, être regardée comme proportionnelle à la surface, S, sur laquelle s'exerce ce frottement et qui, dans le cas d'un corps formé d'une simple proue, sera égale à toute la surface de cette proue ou à la surface entière du solide, à l'exception du plan par lequel nous le supposons terminé à sa partie postérieure. Cette impulsion R_2, produite par le frottement du fluide, sera ainsi le produit par S d'un certain nombre, qui variera avec la vitesse et sera probablement proportionnel au carré de la vitesse ou à $\frac{v^2}{2g}$. On peut alors représenter ce coefficient de frottement par ΠK_f et écrire :

$$R_2 = \Pi K_f \frac{v^2}{2g} \cdot S = K_f \frac{S}{A} \cdot \Pi A \frac{v^2}{2g} \cdot$$

Je renverrai le lecteur au mémoire cité de St-Venant, pages 119 à 130, pour la discussion des faits d'expérience desquels il a déduit la valeur du coefficient numérique K_f, dont le produit par $\frac{v^2}{2g}$ exprime la hauteur d'une colonne fluide, dont le poids est égal à la force de frottement sur l'unité de surface. Pour l'eau, cette valeur a été trouvée [1], en moyenne, égale à 0,0031.

Alors, en adoptant ce chiffre, l'impulsion totale $R = R_1 + R_2$ a pour expression :

$$(7) \qquad R = \Pi A \frac{v^2}{2g} \left[1,7 \left(\frac{\frac{\omega}{A}}{m\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)} - 1 \right)^2 + 0,0031 \frac{S}{A} \right].$$

Le dernier terme, dû au frottement sur la proue, est souvent négligeable par rapport au premier, à moins que la proue

1. La valeur numérique 0,0031, donnée par St-Venant pour le coefficient de frottement K_f, a été déduite par lui d'observations faites dans un tout autre but. Il est probable que cette valeur aurait besoin d'être confirmée ou rectifiée par de nouvelles expériences instituées spécialement en vue de la déterminer.

ne soit très effilée et allongée, de façon que le rapport $\frac{S}{A}$ soit grand. Pour une demi-sphère, par exemple, $\frac{S}{A} = 2$, et ce terme ne vaut que 0,006, tandis que le premier, en y mettant pour $\frac{\omega}{A}$ les valeurs 4,5 et 5 et pour m l'unité, vaut respectivement 0,628 et 0,534. D'après les expériences les plus précises faites par M. le colonel Duchemin, le rapport $\frac{\omega}{A}$ serait supérieur à 4, par conséquent cette formule donne des résultats qui concordent avec les observations, puisque l'impulsion sur une demi-sphère a été trouvée en moyenne de 0,58 environ.

261. Formule applicable à une plaque mince. — La même formule, dans laquelle on supprimera le terme relatif au frottement, et où l'on donnera à m la valeur convenable, s'appliquera au cas d'une plaque mince placée normalement au courant.

L'impulsion sera exprimée par :

$$R = 1,7 \frac{\Pi}{g} \omega \frac{(v_1 - v)^2}{2g}$$

ou

$$R = \Pi A \frac{v^2}{2g} \cdot 1,7 \frac{\omega}{A} \left[\frac{\frac{\omega}{A}}{m\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)} - 1 \right]^2.$$

En mettant la valeur 0,83 pour m et 8,50 pour $\frac{\omega}{A}$ on trouve pour le coefficient K, dont le produit par $\Pi A \frac{v^2}{2g}$ donne la valeur de l'impulsion, $K = 1,90$. Les expériences ont donné des résultats qui s'approchent beaucoup de ce chiffre. Le rapport $\frac{\omega}{A}$ est ici bien supérieur à celui qui correspond au

cas de la demi-sphère ou du corps avec proue ; cela tient à ce que la section ω devrait être comparée, non pas à la surface A qui est celle de la plaque, mais à celle, plus grande, qui comprend toute la partie du liquide en état de tourbillonnement, dans la section la plus contractée. Le rapport de la section ω ou CD (fig. 121) à la portion H'K' de cette section où l'eau n'a pas d'écoulement

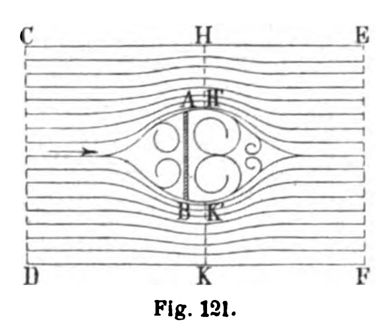


Fig. 121.

est alors $\frac{\omega}{\omega - m(\omega - A)}$ et, avec les valeurs $m = 0,83$, et $\frac{\omega}{A} = 8,5$, ce rapport n'est que de 3,75 environ, ce qui paraît à peu près d'accord avec l'observation.

L'accord serait peut-être encore plus parfait si l'on diminuait légèrement le coefficient 1,7 qui affecte la formule précédente. De nouvelles expériences seraient nécessaires pour déterminer la véritable valeur de ce coefficient, ou la manière dont il varie avec les diverses circonstances.

La même formule s'appliquera encore au cas où la plaque mince, au lieu d'être placée normalement au courant, fera un angle φ avec sa direction (fig. 122). On devra simplement y remplacer A par A sin φ. On aura ainsi, pour l'impulsion sur une plaque oblique faisant un angle φ avec la direction du courant, cette impulsion étant estimée elle-même dans le sens du courant :

$$R = K\Pi A \sin \varphi \cdot \frac{v^2}{2g}$$

avec :

$$K = 1,70 \frac{\omega}{A \sin \varphi} \left(\frac{\omega}{m(\omega - A \sin \varphi)} - 1 \right)^2.$$

Cette expression fournit, pour des valeurs de l'angle φ comprises entre 90 et 45 degrés, des résultats à peu près conformes à ceux des expériences, lorsque l'on y met pour m et pour

$\frac{\omega}{A \sin \varphi}$ les mêmes valeurs que plus haut pour m et pour $\frac{\omega}{A}$. Lorsque l'angle φ est plus petit que 45 degrés, il faut augmenter la valeur du coefficient m. Alors, en effet, la contraction est moindre et elle s'annule même tout à fait pour les petites valeurs de l'angle φ, la perturbation apportée à l'écoulement du liquide n'ayant lieu que d'un seul côté de la plaque. Il faudrait alors faire $m = 1$.

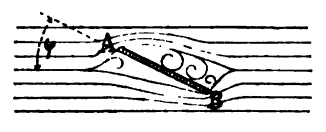
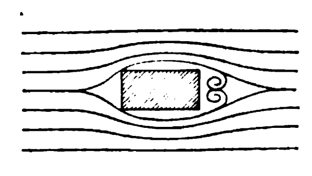


Fig. 122.

262. Cas d'un corps prismatique court. — Lorsque le corps, terminé à son avant par un plan perpendiculaire au courant, a une forme prismatique dont la largeur ne dépasse pas deux fois environ sa plus grande dimension transversale (fig. 123), il se comporte à peu près comme une plaque sans épaisseur : les filets liquides, déviés, se rejoignent seulement au-delà de ce corps qui se trouve tout entier dans la portion morte du courant, où l'eau ne coule pas. Toutefois, l'expérience montre que l'impulsion sur un prisme est un peu moindre que sur une plaque, ce qui tient sans doute à ce que la pression, en arrière du corps, est alors un peu plus grande que derrière la plaque. Le coefficient mesurant l'impulsion devrait alors être diminué dans une proportion qui n'est pas déterminée et qui doit dépendre de la longueur du corps dont il s'agit.


Fig. 123.

Pour un cube, par exemple, le coefficient K aurait pour valeur 1,45, tandis que pour une plaque mince, nous avons dit qu'il était compris entre 1,80 et 1,90.

La théorie de St-Venant, qui est ici exposée, est impuissante à rendre compte de cette différence. On verra plus loin comment Du Buat en a donné une explication plausible.

263. Cas d'un prisme allongé. — Les choses se passent

différemment si la longueur du corps est assez grande pour que les filets liquides, après en avoir quitté la surface, la rejoignent avant son extrémité d'aval (fig. 124).

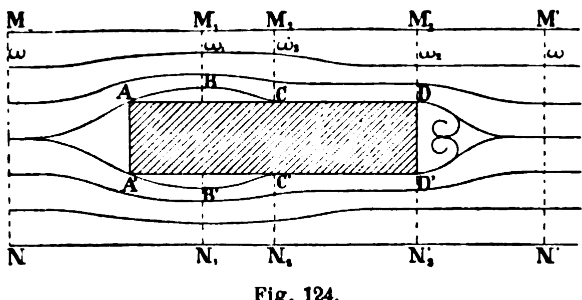


Fig. 124.

Considérons un pareil corps que nous supposerons d'abord avoir la forme prismatique ; les filets liquides écartés par la section AA', ayant quitté la surface latérale en BB' et l'ayant rejointe un peu plus loin en CC', ne la quitteront plus ensuite jusqu'à son extrémité DD'. Appelons, comme tout à l'heure, ω la section totale MN du cylindre comprenant tout le liquide dont le mouvement est troublé par la présence du corps, ω_1 la section la plus contractée en $M_1BB'N_1$ et ω_2 la section d'écoulement $M_2CC'N_2$ autour du prisme, m le coefficient de contraction, c'est-à-dire posons, en appelant A l'aire de la section transversale du prisme :

$$\omega_1 = m(\omega - A) \quad , \quad \omega_2 = (\omega - A).$$

Appelons v, v_1, v_2 les vitesses moyennes dans ces trois sections. D'après ce qui a été dit plus haut, l'impulsion totale R est égale au quotient, par v, du travail des frottements du liquide sur lui-même et sur le corps :

$$R = \frac{T_f}{v}.$$

Le travail des frottements du liquide sur lui-même est le produit de la perte de charge par le poids du liquide qui s'écoule, soit, pour l'unité de temps, par $\Pi\omega v$. La perte de charge

totale se compose de deux parties : celle qui correspond à l'élargissement de BB′ en CC′, et celle qui correspond à l'élargissement de DD′ en M′N′ de la section d'écoulement. La première a pour expression $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$ et la seconde $\frac{(v_2 - v)^2}{2g}$, auxquelles il faut ajouter les deux termes correctifs que nous avons représentés en général par $\frac{1}{9}\frac{v_2^2}{2g}$ et $\frac{1}{9}\frac{v^2}{2g}$ et destinés à tenir compte de l'inégalité des vitesses dans les sections. La répartition des vitesses dans les sections BB′ et CC′ est très sensiblement la même et l'on peut, sans grande erreur, négliger la correction qui, alors, serait certainement fort inférieure à la valeur moyenne $\frac{1}{9}\frac{v_2^2}{2g}$ que nous avons indiquée. Entre les sections DD′ et M′N′, la répartition des vitesses change au contraire d'une manière beaucoup plus appréciable et cette variation est sensiblement la même que celle qui se produisait, dans les mêmes circonstances, à l'arrière d'une plaque mince ou du corps sans poupe que nous avons considéré d'abord. Nous devrons donc multiplier la première de ces deux pertes de charge par un nombre n' égal ou peu supérieur à l'unité, et la seconde par un nombre n voisin de celui, 1,70, que nous avons trouvé dans le premier cas, et plutôt un peu inférieur. Nous prendrons approximativement 1,6 et nous renverrons au mémoire cité de St-Venant pour la justification détaillée et complète de la valeur de ces deux coefficients correctifs ; nous les adoptons ici comme résultats d'expérience sans attacher aucune importance au raisonnement sommaire qui nous a renseignés sur leur grandeur.

Enfin l'impulsion doit être complétée par l'addition de l'effet du frottement sur les parois du corps qui comprendra d'abord le frottement sur la face d'amont, négligeable, et ensuite le frottement sur les parois latérales du prisme, de CC′ en DD′, c'est-à dire sur toute la surface latérale de ce prisme comprise entre son extrémité d'aval et une section CC′, menée à une distance de son extrémité amont égale à deux fois environ sa di-

mension transversale. Cette surface étant désignée par S, l'impulsion totale sur le prisme sera :

$$(9)\qquad R = n'\Pi\omega\,\frac{(v_1-v_2)^2}{2g} + n\Pi\omega\,\frac{(v_2-v)^2}{2g} + \Pi A\,\frac{v^2}{2g}\,.\,K_f\,\frac{S}{A}.$$

En tenant compte des relations nécessaires :

$$v\omega = v_1\omega_1 = v_1 m(\omega - A) = v_2\omega_2 = v_2(\omega - A),$$

on obtient :

$$(10)\quad R = \Pi\omega\,\frac{v^2}{2g}\left[\left(\frac{\omega}{\omega-A}\right)^2\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 n' + \left(\frac{A}{\omega-A}\right)^2 n\right] + \Pi A\,\frac{v^2}{2g}K_f\,\frac{S}{A}$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$R = K\,.\Pi\,A\,\frac{v^2}{2g}.$$

en appelant K le coefficient :

$$(11)\qquad K = \frac{\frac{\omega}{A}}{\left(\frac{\omega}{A}-1\right)^2}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\left(\frac{\omega}{A}\right)^2 n' + n\right] + K_f\,\frac{S}{A},$$

ou bien, en mettant pour n, n' et K_f les valeurs numériques que nous avons données : $n = 1{,}6$, $n' = 1$, $K_f = 0{,}0031$:

$$(12)\qquad K = \frac{\frac{\omega}{A}}{\left(\frac{\omega}{A}-1\right)^2}\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\left(\frac{\omega}{A}\right)^2 + 1{,}6\right] + 0{,}0031\,\frac{S}{A}.$$

Les deux nombres m et $\frac{\omega}{A}$ sont toujours inconnus et c'est de leur grandeur que dépend celle du coefficient K. Les quelques faits d'expérience que l'on possède sont assez bien représentés par cette formule dans laquelle on donne à m une valeur comprise entre 0,75 et 0,80, et à $\frac{\omega}{A}$ une valeur comprise entre 4 et 6 Ainsi, du Buat a trouvé pour l'impulsion sur un

prisme carré dont la longueur était triple du côté de la base, le nombre $K = 1,323$. La formule, avec $m = 0,75$, $\frac{\omega}{A} = 6$, et $\frac{S}{A} = 4$ donnerait $K = 1,356$. L'accord est donc à peu près satisfaisant et il pourrait l'être absolument si l'on modifiait légèrement la valeur de m[1].

Si nous admettons le chiffre trouvé par du Buat comme représentant l'impulsion sur un prisme à base carrée d'une longueur égale au triple du côté de la base, côté que nous appellerons $a = \sqrt{A}$, l'impulsion sur un prisme carré dont la longueur L serait plus grande que $3a$ serait supérieure à celle-ci du frottement correspondant à la longueur $L - 3a$, soit à une surface $S = 4a(L - 3a)$. Le rapport $\frac{S}{A} = \frac{S}{a^2}$ serait alors $4\left(\frac{L}{a} - 3\right)$ et l'impulsion sur le prisme de longueur L :

$$R = K\Pi A \frac{v^2}{2g}$$

aurait pour son coefficient la valeur :

$$K = 1,323 + 0,0031 \times 4\left(\frac{L}{a} - 3\right)$$
$$= 1,230 + 0,0124\frac{L}{a}.$$

Cette même formule s'appliquerait à un corps solide de forme cylindrique à base circulaire ; la dimension a devrait alors être remplacée par le diamètre d du cercle de base. Le rapport $\frac{S}{A}$ est alors, pour le cylindre entier, $\frac{4\pi d L}{\pi d^2} = \frac{4L}{d}$, ce qui donne encore 0,0124 pour le coefficient numérique du dernier terme.

On pourrait l'appliquer sans doute aussi, par extension, à

1. D'après la discussion de quelques expériences, de St-Venant a trouvé que la valeur de m qui s'accordait le mieux avec leurs résultats était $m = 0,757$, ce qui donne $\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 0,10$.

un prisme d'une autre forme quelconque, en lui laissant la forme générale :

$$K=1,323+0,0031\,\frac{S}{A};$$

mais le coefficient 1.323 ne présente plus alors aucune garantie d'exactitude. On aurait besoin d'en déterminer la valeur par de nouvelles expériences.

264. Prisme muni d'une proue. — Si le prisme, carré ou circulaire, est muni d'une proue, assimilable à une demi-sphère qui supprime la contraction, le premier terme de la formule précédente (9) s'annule puisque v_1 devient égal à v_2 et le terme suivant prend la valeur $0,58\,\Pi\,A\,\frac{v^2}{2g}$ qui résulte de l'expérience pour le cas d'une demi-sphère et qui correspond à une valeur du rapport $\frac{\omega}{A}$ comprise entre 4.5 et 5, comme nous l'avons dit. La résistance d'un prisme carré ou d'un cylindre de longueur L, muni d'une proue, a donc pour coefficient :

$$K=0,58+0,0124\,\frac{L}{a},$$

a étant le côté du carré ou le diamètre de la circonférence de la base du cylindre.

On voit, en rapprochant cette formule de la précédente, quelle diminution considérable produit, sur la résistance, l'addition d'une proue convenablement tracée. Il est même probable que le chiffre 0,58, qui s'applique à la demi-sphère, pourrait être diminué sensiblement si la forme de la proue était plus effilée.

265. Influence de la poupe. — Mais l'influence de la poupe n'est pas moindre. Pour l'apprécier, autant que peut le permettre la complication du phénomène, nous supposerons que les filets fluides, déviés par la proue et ayant passé la section AB=A la plus large du corps solide (fig. 125), s'en écartent d'a-

bord un peu et viennent le rejoindre un peu plus loin en CD, la

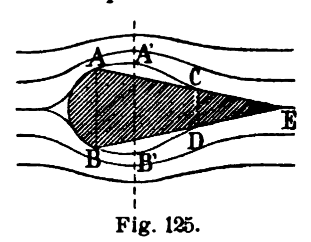


Fig. 125.

la section du corps, en ce point, étant désignée par A′, et que ces filets accompagnent ensuite la poupe solide jusqu'à son extrémité en se raccordant avec le sens du mouvement général. Nous admettrons que dans l'élargissement graduel de la section d'écoulement, depuis CD jusqu'à l'extrémité E, il ne se produit, dans le liquide, aucune perte de force vive et que la seule perte de charge provienne de l'élargissement que nous supposons plus rapide, entre la section A′B′ où les vitesses sont les plus grandes et la section CD où les filets fluides rejoignent la surface latérale du corps solide. L'impulsion du liquide sera due alors à la perte de charge dont il s'agit, au frottement sur la proue, qui sera souvent négligeable, et au frottement sur la poupe, entre CD et l'extrémité E. Le coefficient de ce dernier frottement sera sans doute différent de celui qui correspondrait à une surface parallèle au courant. En raison de l'élargissement, même graduel et lent de la section d'écoulement, le mouvement du liquide est nécessairement moins régulier, il est accompagné de petits tourbillonnements partiels, et la perte d'énergie ou le frottement est plus grand que si la section restait constante. Le coefficient de frottement, que nous avons dit être de 0,0031 pour le cas ordinaire, devrait donc être augmenté dans une proportion inconnue mais probablement assez grande.

Alors, si nous désignons le coefficient inconnu par K'_f et par S la surface de la poupe entre CD et l'extrémité E, le frottement dont il s'agit s'exprimera par $K'_f \frac{S}{A} \Pi A \frac{v^2}{2g}$.

Pour estimer l'impulsion due à la perte de charge entre A′B′ et CD, nous supposerons que la section d'écoulement en A′B′ a sensiblement la même valeur, $\omega - A$, qu'en AB. En CD, cette section d'écoulement est $\omega - A'$ et les vitesses v_1 et v_2,

dans ces deux sections, sont liées à la vitesse v par la relation :

$$v\omega = v_1(\omega - A) = v_2(\omega - A').$$

La perte de charge entre A′B′ et CD est ainsi :

$$\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{\omega v}{\omega - A} - \frac{\omega v}{\omega - A'}\right)^2,$$

De sorte que l'impulsion R aura pour expression :

$$(13) \qquad R = n\Pi\omega \frac{1}{2g}\left(\frac{\omega v}{\omega - A} - \frac{\omega v}{\omega - A'}\right)^2 + K_f' \Pi A \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{S}{A}$$
$$= K \,.\, \Pi A \frac{v^2}{2g}$$

en désignant par K le coefficient :

$$(14) \qquad K = n\frac{\omega}{A}\left(\frac{\omega}{\omega - A} - \frac{\omega}{\omega - A'}\right)^2 + K'_f \frac{S}{A} \cdot$$

Dans cette formule, on pourra donner à n la valeur 1,7, à $\frac{\omega}{A}$ une valeur voisine de 4,5 ou 5, comme nous l'avons trouvé plus haut. Quant à A′, on ne peut faire que des hypothèses ; sa grandeur, par rapport à A, sera d'autant plus élevée que la poupe sera plus allongée et aussi que la distance AC sera plus petite, c'est-à-dire que les filets fluides auront été moins déviés par la proue. Si, par exemple, on suppose qu'au point C, où les filets rejoignent la surface latérale du corps, les dimensions transversales de celui-ci soient les $\frac{2}{3}$ de celles de la section A, on aura $A' = \frac{4}{9}A$ et, alors, avec $\frac{\omega}{A} = 5$:

$$(15) \qquad K = 0{,}20 + K'_f \frac{S}{A}.$$

Des expériences faites par Bossut, d'Alembert et Condorcet sur un corps en forme de navire ont donné, en moyenne :

$$K = 0{,}25.$$

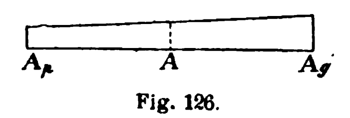
En prenant donc une valeur plausible pour le coefficient K'_f qui exprime le frottement sur la poupe (et qui doit être plus grand que 0,0031), la formule (15) pourrait fournirdes résultats conformes à ceux de l'expérience.

La formule (13) pour R ou celle (14) pour K s'étendrait même au cas où la poupe serait extrêmement allongée et très bien raccordée avec la proue. Alors A′ devrait être pris égal à A, le premier terme disparaîtrait et devrait être remplacé par le frottement sur la proue qui pourrait n'être plus négligeable. Il ne resterait, pour l'impulsion, que l'effet du frottement du liquide contre les parois du corps. Le coefficient de ce frottement serait $K_f = 0,0031$ pour la proue, et K'_f supérieur à cette valeur pour la poupe. On pourrait adopter un coefficient moyen, applicable à toute la surface et qui ne serait sans doute pas très éloigné de 0,004. Alors, si la surface totale S exposée au frottement atteint 40 fois celle A du maître couple, on obtient $K = 0,16$, valeur à laquelle on arrive, en effet, pour les navires dont les formes sont très bien étudiées. Il est bien entendu que le chiffre de 0,004 n'est donné ici qu'à titre d'exemple et n'est basé sur aucune observation. Le coefficient $K = 0,16$ se rapporte, d'ailleurs, à des navires ou à des corps flottants, tandis que les autres chiffres donnés plus haut sont relatifs à des corps entièrement plongés, ce qui doit, probablement, donner lieu à de petites différences, comme il sera dit plus loin, au n° 272.

266. Pyramides ou cônes tronqués. Pièces de bois en grume. — La formule (9) et le raisonnement d'où on l'a déduite peuvent donner l'explication de ce fait, bien connu dans les chantiers des ports, qu'une pièce de bois, ayant la forme d'un tronc de cône ou de pyramide très allongé, étant tirée dans l'eau, offre moins de résistance quand on la tire par le gros bout que lorsqu'elle présente, au contraire, son petit bout en avant.

Soient A_g et A_p (fig. 126) les sections extrêmes d'une pareille

pièce de charpente, A sa section moyenne $= \frac{A_p + A_g}{2}$ et α la demi différence de ces deux sections extrêmes, de sorte que $A_g = A + \alpha$ et $A_p = A - \alpha$. La différence $A_g - A_p = 2\alpha$ est assez petite, eu égard à la longueur L de la pièce, pour que, sur une petite étendue, près de chacune de ses extrémités, cette pièce puisse être regardée comme prismatique. Alors, si nous appelons R_p et R_g la résistance que rencontre la pièce suivant que c'est le petit ou le gros bout qui est exposé au courant, nous devrons, dans la formule (10), pour avoir R_p, remplacer, dans le premier terme qui se rapporte à l'extrémité d'amont, A par A_p et dans le second, au contraire, A par A_g. Inversement, pour obtenir R_g, nous remplacerons, dans le premier terme, A par A_g et dans le second, A par A_p. Admettons encore, pour faciliter la comparaison, que le terme provenant du frottement, $\Pi A \frac{v^2}{2g} K_f \frac{S}{A}$, soit le même dans les deux cas, et désignons-le simplement par R_f; l'application de cette formule (10) nous donnera :


Fig. 126.

$$R_p = \Pi\omega \frac{v^2}{2g}\left[\left(\frac{\omega}{\omega - A_p}\right)^2\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 n' + \left(\frac{A_g}{\omega - A_g}\right)^2 n\right] + R_f$$

$$R_g = \Pi\omega \frac{v^2}{2g}\left[\left(\frac{\omega}{\omega - A_g}\right)^2\left(\frac{1}{m} 1 -\right)^2 n' + \left(\frac{A_p}{\omega - A_p}\right)^2 n\right] + R_f$$

et. par suite, la différence :

$$R_p - R_g = \Pi\omega \frac{v^2}{2g}\left[\left\{\left(\frac{\omega}{\omega - A_p}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega - A_g}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 n' + \left\{\left(\frac{A_g}{\omega - A_g}\right)^2 - \left(\frac{A_p}{\omega - A_p}\right)^2\right\} n\right]$$

Mettons pour n' et n leurs valeurs données plus haut, savoir $n' = 1$, $n = \frac{5}{3}$ environ; remplaçons A_p et A_g par $A - \alpha$ et $A + \alpha$ et réduisons, il viendra, en définitive :

$$R_p - R_g = \Pi\omega \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{4\omega^2\alpha(\omega - A)}{[(\omega - A)^2 - \alpha^2]^2}\left[\frac{5}{3}\left(\frac{A}{\omega} + \frac{\alpha^2}{\omega(\omega - A)}\right) - \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2\right]$$

Le dernier terme, négatif, de la parenthèse, $\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2$, vaut $\frac{1}{16}$ lorsque $m = \frac{4}{5}$ et $\frac{1}{9}$ lorsque $m = \frac{3}{4}$. D'après ce qui a été dit des valeurs probables de m, on doit donc regarder ce terme comme restant toujours compris entre ces deux limites : $\frac{1}{9} = 0,1111$ et $\frac{1}{16} = 0,0625$. Le terme précédent renferme d'abord $\frac{5}{3}\frac{A}{\omega}$, qui pour les valeurs de $\frac{\omega}{A} = 4,5$ ou 6, vaut $\frac{5}{12} = 0,4166..$ $\frac{5}{15} = 0,3333..$, $\frac{5}{18} = 0,2777$; cette première partie est donc toujours supérieure au terme négatif; et il faut y ajouter encore la quantité $\frac{5}{3}\frac{\alpha^2}{\omega(\omega - A)}$, toujours positive. La différence $R_p - R_g$ sera donc positive, c'est-à-dire que R_p sera toujours plus grand que R_g, ce qui est conforme à l'observation.

Cette différence, en mettant pour m et $\frac{\omega}{A}$ les valeurs les plus probables $m = 0,757$, $\frac{\omega}{A} = 5$, atteint :

$$R_p - R_g = \Pi A \frac{v^2}{2g} \times 1,80 \frac{\alpha}{A} \cdot$$

ce qui revient à dire que le coefficient de résistance est augmenté de $1,80\frac{\alpha}{A}$ lorsque l'on tire la pièce par le petit bout au lieu de la tirer par le gros. En désignant par K (sans indice) le coefficient de résistance d'une pièce prismatique dont la section transversale serait égale à la moyenne $A = \frac{A_p + A_g}{2}$ des deux sections extrêmes, par K_p et K_g les coefficients de résistance de la pyramide tronquée lorsque c'est le petit bout ou le gros bout qui se trouve exposé au courant, on aurait ainsi :

$$K_p = K + 0,90\frac{\alpha}{A} = K + 0,90\frac{A_g - A_p}{A_g + A_p},$$

$$K_g = K - 0,90\frac{\alpha}{A} = K - 0,90\frac{A_g - A_p}{A_g + A_p}.$$

Le coefficient K a pour valeur 1,32 environ lorsqu'il s'agit de prismes coupés perpendiculairement à leur longueur, sans proue ni poupe[1].

On trouvera, dans le mémoire cité de Saint-Venant, une autre application de la même formule à un corps ayant la forme d'un tronc de pyramide suivi d'une partie prismatique de dimensions transversales moindres; mais cette application ne semble pas avoir un grand intérêt pratique.

§ 2

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

267. Recherches de Du Buat. — Après cet exposé d'une théorie qui ne donne, en définitive, qu'une solution incomplète du problème, je crois utile de rappeler quelques-uns des résultats expérimentaux constatés par Du Buat et certaines des conséquences qu'il en avait déduites. Cet exposé

1. De Saint-Venant, dans son mémoire cité, pages 184 et suivantes, compare les coefficients K_g et K_p à celui K' qui correspondrait à un prisme tronqué ayant la section la plus grande $A_g = A + \alpha$ du gros bout de la pyramide. Il trouve alors :

$$K_g = K' - 2.60 \frac{\alpha}{A},$$

$$K_p = K' - 0.80 \frac{\alpha}{A}.$$

La différence entre K_p et K_g est bien de $1.80 \frac{\alpha}{A}$, mais les deux coefficients de résistance sont, comme on pouvait le prévoir, inférieurs à celui du prisme qui sert de comparaison. Il m'a paru plus simple de comparer avec le prisme ayant pour section la section moyenne A de la pyramide. On trouve alors qu'à des termes près de l'ordre de $\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2$ qui sont négligeables, le coefficient K correspondant à ce prisme est la moyenne arithmétique de K_p et de K_g. Le calcul, qui ne présente aucune difficulté, est seulement un peu long, c'est pourquoi je ne le donne pas ici.

complètera, sur quelques points, la théorie précédente et montrera surtout dans quel sens elle devrait être rectifiée pour se rapprocher encore davantage des données de l'expérience.

Les recherches de Du Buat se sont portées principalement sur l'impulsion exercée, par un courant indéfini, sur des corps prismatiques, c'est-à-dire à section constante, terminés à l'avant et à l'arrière par des plans perpendiculaires à la direction du courant, c'est-à-dire sans proue ni poupe, mais de longueur variable, cette définition comprenant le cas d'une longueur très petite ou de la plaque mince.

268. Pression vive et non-pression. — Faisant abstraction du frottement du liquide sur la surface latérale du prisme, Du Buat remarque d'abord que l'impulsion du liquide est due à la différence des pressions exercées par ce liquide sur les deux bases du prisme. La pression sur la base d'amont est plus grande et la pression sur la base d'aval est plus faible que celle que l'on observerait au même point du courant si le prisme n'existait pas. Les différences ont été désignées par lui sous les noms de *pression vive* et de *non-pression*. Si l'on appelle p la pression moyenne dans le courant, le prisme étant enlevé, que Du Buat appelle la pression *morte*, p_1 la pression moyenne sur la base d'amont et p_2 la pression moyenne sur la base d'aval, on a $p_1 > p > p_2$, et $A(p_1 - p)$ est la pression vive sur le prisme, $A(p - p_2)$ la non-pression ; l'impulsion totale R est la somme de la pression vive et de la non-pression[1] :

$$R = A(p_1 - p) + A(p - p_2) = A(p_1 - p_2).$$

1. On trouve, dans certains traités d'hydraulique, une détermination analytique de la pression vive et de la non-pression, dans le cas d'une plaque mince, d'après l'équation (3) ci-dessus en supposant que la pression sur la face aval, ici appelée p_2, est celle appelée plus haut p_1, qui existe dans la section la plus contractée, et que la pression morte, ici appelée p, est celle, appelée plus haut p', qui existe dans la section d'aval où les vitesses sont redevenues parallèles. Mais ces hypothèses sont probablement loin d'être exactes et le calcul dont il s'agit ne présente aucun intérêt.

Les hauteurs représentatives des pressions dont il s'agit peuvent s'exprimer en fonction de la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ due à la vitesse v du courant, et l'on peut écrire en appelant m et q deux coefficients numériques qui mesureront respectivement la pression vive et la non-pression :

$$\frac{p_1 - p}{\Pi} = m\frac{v^2}{2g}; \qquad \frac{p - p_2}{\Pi} = q\,\frac{v^2}{2g}.$$

Alors, l'impulsion totale :

$$R = (m + q)\,\Pi A\,\frac{v^2}{2g}\cdot$$

Cela revient à dire que le coefficient d'impulsion K est la somme des deux coefficients m et q de la pression vive et de la non-pression.

Du Buat a déterminé séparément les valeurs de ces deux coefficients. Il a constaté d'abord que la pression sur la face d'amont du prisme était loin d'être constante en tous les points. Au centre de la base, quelle que soit la dimension de celle-ci, elle est toujours à peu près égale à une fois et demie la pression morte $\Pi\frac{v^2}{2g}$; elle décroît d'une façon régulière depuis le centre jusqu'aux bords où elle devient inférieure à cette pression morte. La théorie du mouvement des filets liquides pourrait rendre compte de ce fait : ceux-ci tournent, en effet, leur convexité vers le centre de la plaque, tandis que, près des bords, ils deviennent concaves. La valeur moyenne de m, pour une surface normale au courant, a été trouvée par Du Buat de 1,186. Elle est, comme on pouvait le supposer, indépendante de la longueur du prisme dont la surface heurtée forme la base.

Il n'en est pas de même de la non-pression. A mesure que le corps s'allonge, les filets liquides, qui ont été déviés et qui ont pris des vitesses obliques plus grandes que celles du fluide ambiant, s'étendent de plus en plus à travers ce fluide et y perdent peu à peu leur excès de vitesse ; quand ils viennent à

passer en face de la base postérieure du prisme, cet excès de vitesse aura été d'autant plus atténué que le prisme sera plus long. Or, la non-pression est due uniquement à la vitesse des molécules fluides qui passent à l'angle de cette base postérieure ; elle sera donc d'autant plus grande que le prisme sera plus court. La théorie exposée plus haut ne tient pas compte de cet épanouissement progressif des filets fluides et de la diminution qui en résulte pour la vitesse, lorsque le prisme s'allonge : ce n'est pas par un cylindre, mais par un cône que devrait être limitée la masse liquide dont le mouvement est influencé par la présence du solide. Il est évident, en effet, que si l'on considère un prisme extrêmement long, on rencontrera, à une distance assez grande de sa base d'amont, une section transversale du courant liquide dans laquelle toutes les vitesses seront devenues sensiblement égales dans une très grande étendue. A l'extrémité d'aval d'un pareil prisme, les filets latéraux n'exerceront, sur la masse fluide formant en quelque sorte la poupe fluide, qu'une action d'entraînement très réduite, la laisseront sensiblement en repos et ne se rejoindront qu'à une distance beaucoup plus grande que s'ils étaient passés en face de cette extrémité avec des vitesses plus grandes, ou si le prisme avait été plus court.

Il résulte de là que, toutes choses égales, la valeur de la non-pression, ou du coefficient q qui la mesure, est d'autant moindre que la longueur L du prisme est plus grande. D'ailleurs ce n'est pas la seule longueur L qui doit entrer en considération, mais le rapport de cette longueur à la dimension transversale du prisme, laquelle est proportionnelle à $\sqrt{A}$. La grandeur du coefficient q varierait donc en sens inverse du rapport $\frac{L}{\sqrt{A}}$. Du Buat, d'après des expériences peu nombreuses, indique, sans y attacher d'importance, une relation de la forme $\frac{0,10}{q} = \log. \left(\frac{L}{\sqrt{A}} + 1,42\right)$, le logarithme étant vulgaire. Il a trouvé, pour une plaque mince de forme carrée, $q = 0,67$,

pour un prisme carré de forme cubique ($L = \sqrt{A}$), $q = 0{,}271$ et pour un prisme carré d'une longueur triple du côté de la base ($L = 3\sqrt{A}$), $q = 0{,}153$. Si, à ces valeurs de q, on ajoute celle de m indiquée plus haut, $m = 1{,}186$, qui est indépendante de la longueur du prisme, on trouve ainsi :

pour la plaque carrée, mince ; $K = m + q = 1{,}856$,
pour le cube, $K = 1{,}457$,
pour le prisme carré, $K = 1{,}339$.

La non-pression, comme la pression vive, n'est pas la même en tous les points de la surface postérieure du corps heurté ; elle est plus grande près des bords et moindre vers le centre.

269. Variation avec la vitesse. — Les chiffres qui précèdent ont été déterminés avec des vitesses d'environ un mètre par seconde ; ils ne semblent exacts que pour les vitesses s'écartant peu de cette valeur. Le coefficient de pression vive, m, paraît à peu près constant, c'est-à-dire que la pression vive varie à peu près comme le carré de la vitesse ; mais il n'en est pas de même du coefficient de non-pression, q, qui augmente avec la vitesse. Presque nul quand la vitesse est faible, puisqu'alors le liquide situé en arrière du corps est à peine entraîné et exerce une pression à peu près égale à la pression hydrostatique, il peut atteindre l'unité lorsque la vitesse est assez grande pour que ce liquide soit complètement entraîné et que le vide se fasse derrière le corps. La loi de la variation de ce coefficient q avec la vitesse v n'a pas été déterminée, mais quelle qu'elle soit, on peut conclure de ce qui vient d'être dit que la non-pression croît plus rapidement que le carré de la vitesse, au moins jusqu'à la valeur limite à laquelle le vide complet se produit. A partir de ce moment, si la vitesse continue à augmenter, le coefficient de non-pression reste constant et égal à l'unité.

Il en résulte que le coefficient K exprimant l'impulsion est lui-même fonction croissante de la vitesse, ou, ce qui revient au même, que l'impulsion d'un fluide en mouvement sur un

corps prismatique doit s'exprimer par une fonction de la vitesse croissant plus rapidement que la seconde puissance. Cette fonction est encore inconnue, et les faits d'observation que l'on possède jusqu'à présent sont insuffisants pour la déterminer.

Le coefficient de pression vive, lui-même, m, n'est pas absolument constant; les expériences de Du Buat ont montré qu'il est un peu plus grand pour les très faibles vitesses, mais, d'après ces expériences, la variation de ce coefficient serait beaucoup moins appréciable que celle du coefficient de non-pression q.

270. Différence entre l'impulsion d'un liquide en mouvement sur un solide en repos et la résistance opposée au mouvement d'un solide par un liquide en repos. — Ces observations, ainsi que les chiffres qui ont été donnés plus haut s'appliquent à l'impulsion exercée par un liquide en mouvement, animé d'une vitesse constante, sur un solide en repos. Les résultats sont différents lorsque c'est le solide qui se meut dans un liquide immobile.

Ce fait, bien qu'il ait été constaté de la façon la plus formelle par divers observateurs, semble paradoxal, et les savants ne l'ont pas admis sans réserves. De St-Venant, par exemple, à la page 161 de son *Mémoire* cité *sur la Résistance des fluides*, dit : les expériences « donnent des résultats généralement « moindres, souvent d'un quart, lorsque le corps se meut que « lorsque c'est le fluide, ce qui doit tenir à quelque source « d'erreur dans le mode d'appréciation de l'impulsion ou de « la résistance, ou à quelque cause étrangère et très influente; « en sorte que l'on ne sait auquel des deux résultats expéri- « mentaux on doit croire, et il y a lieu de douter de tous deux. « Il serait, en effet, contraire aux principes fondamentaux de « la dynamique et aux faits astronomiques ou terrestres les « mieux avérés, de penser qu'en communiquant au corps et « au fluide une vitesse uniforme commune, égale et contraire « à celle que possède l'un ou l'autre, on change par cela seul

« leur action mutuelle, ce qui ferait dépendre l'impulsion de « l'eau des fleuves de l'orientation de leurs cours, etc. Tant « que l'on n'aura pas mis complètement d'accord les expérien- « ces d'impulsion des fluides en mouvement et les expérien- « ces de résistance des fluides en repos, c'est vainement que « l'on tentera d'attribuer des valeurs définitives aux quantités « indéterminées dont nous parlons. »

Ce raisonnement serait exact si les vitesses de toutes les molécules fluides étaient rigoureusement égales et parallèles entre elles. Mais même dans un courant indéfini dont le régime est uniforme, ce ne sont que les vitesses moyennes locales qui satisfont à cette condition ; les vitesses réelles sont à chaque instant divergentes et variables d'un instant à l'autre. Le liquide qui s'écoule à travers une section A, égale à celle du corps solide, possède en réalité, pour un même débit, une force vive notablement plus grande que si toutes les vitesses étaient égales et parallèles. C'est cette force vive qui se détruit en partie par les chocs contre le solide, sous forme de frottement, et qui produit autour du solide une agitation d'autant plus grande qu'elle a, elle-même, une valeur plus élevée. Cette agitation, presque entièrement perdue pour l'écoulement, donne lieu au frottement du liquide sur lui-même, ou au travail négatif (désigné plus haut par T_f) qui, divisé par la vitesse moyenne, est la mesure de l'impulsion du liquide sur le solide. Il n'est donc pas surprenant, et il est au contraire conforme à l'examen théorique du phénomène, que l'impulsion d'un courant sur un solide en repos soit, pour une même vitesse, supérieure à la résistance éprouvée par le solide en mouvement dans le fluide en repos.

Du Buat a trouvé que, lorsqu'une surface mince se meut dans l'eau, à une vitesse voisine d'un mètre par seconde, le coefficient de pression vive m est à peu près égal à l'unité, et le coefficient de non-pression q, à 0,433. La résistance totale $K' = m + q$ est donc alors de 1,433, tandis que l'impulsion est de 1,856 sur la plaque immobile.

Le rapport de ces deux nombres est sensiblement celui de 10 à 13, mais il n'est pas constant et il augmente à mesure qu'on considère des corps plus longs, ce qui peut être attribué, en partie, à l'influence du frottement sur les parois.

Du Buat a aussi mesuré la résistance au mouvement, dans l'eau en repos, d'un corps sphérique et il a trouvé, pour des vitesses ne s'écartant pas beaucoup d'un mètre, une résistance exprimée par :

$$R = 0{,}50\ \Pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Le coefficient de résistance est donc 0,50. Borda avait trouvé 0,55, et la discussion d'observations faites par Newton sur la durée de la chute de sphères solides dans l'eau a donné comme moyenne, pour ce coefficient, la valeur 0,523. Cette valeur augmenterait avec la vitesse, ainsi qu'il vient d'être dit plus haut pour les corps prismatiques.

271. Résistance ou impulsion des fluides élastiques. Pression du vent. — Les mêmes coefficients s'appliquent, à très peu près, à tous les fluides dont la résistance ou l'impulsion sont, toutes choses égales, sensiblement proportionnelles au poids spécifique Π, qui figure dans la formule. Pour ce qui est, par exemple, de la pression du vent sur une plaque mince normale à sa direction, on aurait comme ci-dessus :

$$R = 1{,}856\ \Pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Le poids spécifique de l'air, à la température de la glace fondante et sous la pression de 760 millimètres, est de $1^k.293$; à 12 degrés centigrades, et sous la pression de $0^m,750$, conditions qui se rapprochent plus de celles des tempêtes, il est de $1^k.222$. Il vient ainsi en substituant :

$$R = 0{,}116\ Av^2,$$

pour les vitesses d'environ un mètre par seconde ; le coefficient 0,116 devant être un peu augmenté pour les vitesses

plus grandes. On prend ordinairement, en moyenne, et en nombre rond :

$$R = 0,125\, Av^2 = \frac{1}{8} Av^2.$$

Certaines expériences de Borda et de Hutton avaient montré que l'impulsion de l'air n'était pas proportionnelle à la surface A de la plaque heurtée et avaient amené ce dernier à proposer d'affecter cette surface A de l'exposant 1,1. La pression augmenterait ainsi plus vite que la surface. Cette conséquence est tout-à-fait contraire à l'analyse du phénomène faite d'après les idées de Du Buat. Si l'on admet, avec lui, que la pression vive soit sensiblement proportionnelle à la surface heurtée, on ne peut faire la même hypothèse pour la non-pression. Celle-ci, en effet, se produit surtout le long du périmètre de la face postérieure de la plaque, elle est presque nulle vers le milieu lorsque cette plaque est très étendue ; il en résulte que, toutes choses égales, la non-pression doit être plus grande, proportionnellement, sur les petites plaques que sur les grandes. On comprend, en effet, que la vitesse limite susceptible de faire le vide complet derrière une plaque heurtée doive être beaucoup moindre lorsque cette plaque est de petites dimensions. Par conséquent, pour une même vitesse, l'impulsion totale du vent doit être plus grande, par unité superficielle, sur de petites surfaces que sur des surfaces étendues.

Cela est tout à fait d'accord avec les très nombreuses observations faites, dans l'île de Garvie, pendant la construction du pont sur le Forth, sous la direction de M. Benjamin Baker. Les pressions du vent y ont été observées simultanément sur une large plaque rectangulaire de $6^m,00$ sur $4^m,50$ et sur une petite plaque circulaire de $0^m,39$ de diamètre. La pression sur la petite plaque a toujours été beaucoup plus élevée, par unité superficielle, que celle sur la grande plaque. Le rapport des deux chiffres varie de 1,27 à 2,83 ; il est, en moyenne de 1,70 environ, pour les observations correspondant aux coups de vent violents. La grande amplitude des variations de ce rap-

port met d'ailleurs en évidence le fait bien connu de l'irrégularité de la pression du vent qui se fait sentir par rafales.

272. Résistance au mouvement des corps flottants. — Tout ce qui précède s'applique exclusivement à des corps solides entièrement immergés dans un fluide indéfini qui les environne de toutes parts. La question de la résistance au mouvement des corps flottants à la surface de l'eau, bien qu'elle s'y rattache assez étroitement, en diffère toutefois assez pour que les coefficients numériques trouvés dans le premier cas ne soient pas applicables au second. Les conditions du mouvement relatif ne sont pas, en effet, exactement les mêmes. Si l'on suppose, par exemple, une plaque mince placée en travers et à la surface d'un courant, il se produira en amont de cette plaque un bourrelet liquide, en aval, surtout vers les angles, une dépression qui mettront en évidence la pression vive et la non-pression ; mais les trajectoires des molécules superficielles sont alors très différentes de ce que seraient celles des molécules déviées par la plaque si celle-ci était entièrement immergée.

Les données expérimentales manquent tout autant, sinon davantage, pour les corps flottants que pour les corps immergés ; en laissant de côté, toutefois, les très nombreuses observations faites sur les navires de mer, pour des formes tout-à-fait spéciales.

273. Influence de la largeur du canal. — Un élément important de la résistance est le rapport de la section transversale A du corps flottant, à celle du courant, lorsque celle-ci ne peut être considérée comme indéfinie. Il a été montré par Du Buat que la résistance au mouvement d'un corps flottant augmente lorsque diminue la section transversale du canal, rempli d'eau en repos, sur lequel il flotte. Si l'on appelle Ω cette section transversale, A étant toujours celle du corps flottant, mesurée, bien entendu, au-dessous de la flottaison, le coefficient de résistance K du corps flottant sur le canal serait

lié à celui K_1 du même corps sur un liquide indéfini par la relation

$$K = \frac{8,46}{\frac{\Omega}{A} + 2} \cdot K_1$$

Si l'on suppose que la section transversale Ω du canal soit égale à 6,46 fois celle A de la section mouillée du corps flottant, la formule donne $K = K_1$: la résistance est la même que sur un fluide indéfini ; elle ne diminue pas, bien entendu, au-delà de cette limite, c'est à dire que cette formule ne s'applique qu'à des valeurs de Ω inférieures ou au plus égales à 6,46 A.

Si l'on suppose, au contraire, Ω égal à A ou à peine plus grand que A, la formule donne, pour $\frac{\Omega}{A} = 1$,

$$K = 2,82\ K_1,$$

ce qui veut dire que pour faire mouvoir un corps solide dans un canal qu'il remplirait entièrement, il faudrait un effort 2,82 fois plus grand que pour le mouvoir avec la même vitesse dans un fluide indéfini. Sans aller jusqu'à cette limite extrême une expérience de Du Buat où le rapport $\frac{\Omega}{A}$ est descendu jusqu'à 1,50 a donné un résultat très sensiblement d'accord avec la formule.

Les variations des coefficients de résistance ne sont pas d'ailleurs les mêmes dans un canal étroit ou sur un fluide indéfini : une proue effilée, ajoutée à un bateau prismatique, diminue d'autant moins sa résistance que le canal est plus étroit. « En effet, quand le corps en occupe toute la capacité, la résistance se réduit à refouler le fluide en avant ; et dans ce cas, la forme de la partie antérieure est absolument indifférente à cet effet.[1] » Ne serait-ce pas à l'observation peut-être instinctive de ce fait que l'on pourrait attribuer l'adoption, pour la

1. Du Buat, *Principes d'hydraulique,* IIIe partie, no 584.

plupart des bateaux de canaux, de formes à peu près rectangulaires, occasionnant une grande résistance au mouvement, mais qu'il n'y avait pas d'intérêt réel à modifier tant que ces bateaux devaient parcourir des canaux à section rétrécie ?

274. Nouvelles expériences. — La question de la meilleure forme à donner aux bateaux de navigation intérieure est d'ailleurs à l'étude et des expériences ont été entreprises, par l'ordre de l'administration, en vue de la déterminer. Elles s'exécutent, en ce moment, sous l'habile et intelligente direction de M. B. de Mas qui a, dans sa première campagne, combiné et installé les appareils les plus ingénieux et les plus précis pour leur donner toute l'exactitude désirable. Les premiers résultats viennent d'être publiés [1], mais ils sont encore trop peu nombreux pour que l'on puisse en tirer des conclusions certaines. Toutefois, et sans préjuger en rien des lois que l'on pourra déduire de la suite de ces expériences, je crois qu'il est intéressant de les faire connaître.

Les expériences de la campagne 1890 ont porté sur six bateaux : deux péniches flamandes, une toue de la Saône et trois flûtes de la Haute-Seine. Les dimensions essentielles de ces six bateaux et les résistances à la traction, à diverses vitesses, sont données dans les tableaux suivants.

Le « coefficient de déplacement » que l'on peut appeler aussi *coefficient d'affinement* d'un bateau est le quotient, toujours inférieur à l'unité, de son déplacement réel par le volume du parallélépipède rectangle circonscrit à la partie immergée ; ce coefficient donne, en somme, la mesure du sacrifice fait à la forme dans la construction du bateau.

La largeur au maître couple, qui figure à la seconde ligne du tableau, est la largeur moyenne Le déplacement D est exprimé en mètres cubes ou en tonnes de poids total : c'est le produit des quatre nombres donnant la longueur L, la largeur

1. *Recherches expérimentales sur le matériel de la batellerie*, par F.-B. de Mas, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 1er fascicule, Paris, 1891.

moyenne au maître couple l, l'enfoncement t, et le coefficient de déplacement δ de chaque bateau : $D = Llt\delta$.

Dimensions des bateaux	Péniches		Toue	Flûtes		
	1ère	2e		1ère	2e	3e
Longueur L	$38^m,19$	$38^m,00$	$36^m,08$	$37^m,44$	$34^m,49$	$28^m,73$
Larg. au maître couple. l	$5^m,00$	$4^m,97$	$5^m,02$	$5^m,02$	$5^m,95$	$5^m,02$
Enfoncement.......... t	$1^m,81$	$1^m,81$	$1^m,36$	$1^m,47$	$1^m,43$	$1^m,66$
Coefficient de déplacem. δ	0,99	0,99	0,97	0,94	0,95	0,95
Déplacement.......... D	342^t	338^t	240^t	260^t	279^t	226^t

Les expériences ont été faites sur la Seine, à l'amont du barrage de Port-à-l'Anglais, dans une section où le cours du fleuve est sensiblement rectiligne, et où la largeur est de plus de 135 mètres et la profondeur moyenne supérieure à $3^m,47$. La surface mouillée du profil transversal dépasse 500 mètres carrés. On peut donc considérer les dimensions de ce profil comme indéfinies par rapport à celles des bateaux. La vitesse de l'eau, pendant les expériences, ne dépassait pas $0^m,10$ à $0^m,15$ par seconde, de sorte que l'eau pouvait être regardée comme à peu près immobile.

Dans ces conditions, voici les résistances à la traction qui ont été constatées, aux diverses vitesses, ces résistances étant rapportées au mètre cube ou à la tonne de déplacement.

Vitesses par seconde	Résistance par tonne de déplacement					
	Péniches		Toue	Flûtes		
	1ère	2e		1ère	2e	3e
$0^m,50$	0^k336	0^k356	0^k145	0^k292	0^k358	0^k318
$1^m,00$	0.994	1.023	0.416	0.761	0.878	0.883
$1^m,50$	2.257	2.329	0.979	1.384	1.738	1.880
$2^m,00$	4.275	»	1.979	2.595	3.100	3.562
$2^m,50$	»	»	3.312	4.269	5.268	5.951

Ces premières expériences, dit M. de Mas, font nettement ressortir un point important qui n'était pas évident *à priori*,

qui était même mis en doute par certains spécialistes et qui justifie pleinement les recherches entreprises, à savoir : « *A* « *des vitesses modérées, pratiquées couramment sur nos ri-* « *vières, pour des bateaux dont le coefficient de déplacement,* « *très voisin de l'unité, varie dans des limites fort restreintes,* « *l'effort de traction par mètre cube de déplacement, soit par* « *tonne de poids total (poids mort et poids utile ensemble),* « *varie encore dans des proportions très étendues, qui peuvent* « *dépasser celle du simple au double.*

On voit en effet, dans le tableau ci-dessus, qu'à la vitesse de $1^m,50$ par seconde (5 k. 400 à l'heure), très couramment pratiquée sur la Seine, la résistance à la traction de la toue n'atteint pas les 43 centièmes de celle des péniches, bien que ce bateau n'ait aucune forme à l'arrière et que son coefficient de déplacement (0,97) se rapproche beaucoup de celui des péniches (0,99).

275. Comparaison avec les formules précédentes. — Pour faire la comparaison des chiffres précédents avec les formules que nous avons données plus haut, il faut rapporter l'effort de traction, non pas au mètre cube de déplacement, mais au mètre carré de la section du maître couple, que nous avons appelé A dans ces formules et qui est ici exprimé par le produit *lt*. C'est ce qu'a fait M. de Mas pour les chiffres relatifs à la vitesse d'un mètre par seconde. Les résistances, à cette vitesse, sont alors, respectivement, pour les six bateaux expérimentés :

$37^k,7$; $38^k,4$; $15^k,0$; $27^k,0$; $28^k,4$; $24^k,1$.

Si l'on prend la formule théorique :

$$R = K\Pi A \frac{v^2}{2g}$$

dans laquelle on fera $v = 1^m,00$ et $A = 1^m,00$, et si l'on y met pour Π, et g leurs valeurs : $\Pi = 1,000^k$ et $g = 9^m,81$; en donnant d'ailleurs à R les valeurs qui viennent d'être écrites, on en déduira respectivement, pour le coefficient K, les nombres :

0,74 ; 0,75 ; 0,29 ; 0,53 ; 0,56 ; 0,47.

Bien que la formule (12) ci-dessus, pour le coefficient K, ne s'applique qu'à un corps de forme prismatique, sans proue ni poupe, il peut cependant être intéressant de chercher à y rattacher les valeurs expérimentales qui viennent d'être écrites. D'après cette formule, le coefficient K se compose de deux termes : le premier exprimant la résistance proprement dite, et le second la résistance due au frottement. Ce dernier terme qui, si l'on adopte la valeur 0,0031 pour le coefficient de frottement, est $0,0031\,\frac{S}{A}$, peut être immédiatement calculé, Le rapport $\frac{S}{A}$, d'après les notations précédentes, vaut à peu près $\frac{L(l+2t)}{lt}$, soit, pour les six bateaux expérimentés :

36,4 ; 36,3 ; 40,9 ; 40,4 ; 35,7 ; 28,8.

De sorte que le terme exprimant le frottement, dans la formule (12), aurait pour valeurs respectives :

0,11 ; 0,11 ; 0,13 ; 0,125 ; 0,11 ; 0,09.

Il reste alors, pour être exprimé par le premier terme, représentant la résistance proprement dite, les nombres suivants :

0,63 ; 0,64 ; 0,16 ; 0,405 ; 0,45 ; 0,38.

Lorsque, dans le premier terme de la formule (12) on fait $m = 0,88$ et $\frac{\omega}{A} = 5$, valeurs qui restent dans les limites probables des variations de ces quantités, on trouve, pour ce premier terme, 0,64, c'est-à-dire à peu près les deux premiers chiffres ci-dessus, relatifs aux péniches. De même, avec $\frac{\omega}{A} = 6$ et $m = 0,98$, ce premier terme prend la valeur 0,405, égale au quatrième des chiffres d'expérience ; et il serait facile de retrouver aussi les deux derniers 0,45 et 0,38.

Mais il n'en est pas de même du troisième, 0,16. La formule ne pourrait le donner qu'en y faisant $m = 1$, ce qui n'aurait rien d'invraisemblable, et $\frac{\omega}{A} = 12$, valeur tout à fait inadmis-

sible. Cela n'a rien qui doive surprendre, car la formule n'est applicable qu'à un corps terminé à ses deux extrémités par des faces planes normales au courant, et entièrement immergé ; tandis que le chiffre expérimental s'applique à un corps flottant à la surface de l'eau, et assez effilé à l'avant. La formule devrait sans doute recevoir quelque modification dans sa forme, ou tout au moins dans la valeur numérique des coefficients qui y figurent. Les expériences ne sont pas assez nombreuses pour que l'on puisse tenter de faire ces modifications.

Mais il est une autre observation que l'on peut faire, sur les premiers résultats des expériences de M. de Mas, c'est que le coefficient K n'est pas indépendant de la vitesse, comme le supposent les théories développées dans la première partie de ce chapitre. Si, en effet, on calcule, d'après les chiffres du tableau précédent, mis dans la formule :

$$R = K\Pi A \frac{v^2}{2g},$$

les valeurs de ce coefficient K, pour les diverses expériences rapportées par M. de Mas, on trouve les valeurs suivantes ;

Vitesses par seconde	Valeurs du coefficient de résistance K					
	Péniches		Toue	Flûtes		
	n° 1	n° 2		n° 1	n° 2	n° 3
0m,50	1.00	1.05	0.40	0.81	0.92	0.68
1m,00	0.74	0.75	0.29	0.53	0.56	0.47
1m,50	0.74	0.76	0.30	0.42	0.50	0.45
2m,00	0.79	»	0.34	0.45	0.50	0.48
2m,50	»	»	0.36	0.47	0.54	0.51

Ce qui frappe tout d'abord, à l'examen de ce tableau, c'est que le coefficient de résistance est beaucoup plus grand pour la vitesse de 0m,50 que pour les vitesses de 1m,00 et au-dessus. Du Buat avait bien (fin du n° 269) déjà constaté quelque chose d'analogue, mais les variations qu'il avaient trouvées étaient beaucoup plus faibles. On voit aussi que la décroissance rapide du coefficient de résistance lorsque l'on passe de la vi-

tesse de $0^m,50$ à la vitesse de $1^m,00$, ne se continue pas beaucoup au-delà. Elle se constate encore, bien que très atténuée, pour les trois derniers bateaux, jusqu'à la vitesse de $1^m,50$, mais elle disparaît entièrement pour les vitesses supérieures et au contraire, elle est remplacée alors par un accroissement de ce coefficient dans le même sens que la vitesse.

A quoi faut-il rattacher ce fait qui semble absolument démontré par la concordance des six expériences? Il est difficile, en l'état de la question, de se prononcer. Ce que l'on peut dire c'est que peut-être on a, à tort, supposé que le frottement était proportionnel au carré de la vitesse, puisqu'on l'a représenté par un coefficient constant, 0,0031, qui se trouve en facteur de $\frac{v^2}{2g}$. Si l'on admet, au contraire, comme l'avait proposé Prony, que le frottement s'exprime par un coefficient de la forme $\left(\frac{a}{v} + b\right)$ multiplié par le carré de la vitesse on trouvera proportionnellement une valeur plus grande pour les faibles vitesses et l'on arrivera peut-être à rendre compte de la variation dont il s'agit.

Quant à l'accroissement que prend le coefficient K lorsque la vitesse dépasse $1^m,00$ ou $1^m,50$, il faut, je crois, en rattacher l'explication à celle que donne Du Buat de l'augmentation de la non-pression lors que la vitesse augmente. Il y aurait alors, dans le coefficient K, un terme inversement proportionnel à la vitesse et provenant du frottement, un terme croissant avec la vitesse et provenant de la non-pression, et enfin un terme constant provenant du frottement et de la pression vive.

Ces hypothèses sont, comme on voit, bien loin d'être déterminées ; mais les expériences de M. de Mas permettront certainement d'élucider la question et d'établir des formules pratiques.

ANNEXES

DOCUMENTS LÉGISLATIFS ET ADMINISTRATIFS

CONCERNANT L'UTILISATION DES EAUX [1]

A. Lois et arrêtés généraux.

I. Loi en forme d'instruction, des 12-20 août 1790. — Les administrations de département doivent rechercher et indiquer le moyen de procurer le libre cours des eaux, d'empêcher que les prairies ne soient submergées par la trop grande élévation des écluses des moulins et par les autres ouvrages d'art établis sur les rivières ; de diriger enfin, autant qu'il sera possible, toutes les eaux de leur territoire vers un but d'utilité générale d'après les principes de l'irrigation.

II. Loi du 6 octobre 1791. — *Titre* I. *Section* I. *Article* 4. — Nul ne peut se prétendre propriétaire exclusif des eaux d'un fleuve ou d'une rivière navigable ou flottable ; en conséquence, tout propriétaire riverain peut, en vertu du droit commun, y faire des prises d'eau [2] sans néanmoins en détourner ni embarrasser le cours d'une manière nuisible au bien général et à la navigation établie.

Titre II. — *Art.* 15. — Personne ne pourra inonder l'héritage de son voisin, ni lui transmettre volontairement les eaux d'une manière

1. Ces documents s'appliquent principalement aux retenues établies en vue de créer la force motrice d'une usine, ou d'ouvrir une prise d'eau destinée à l'irrigation ou à un autre usage quelconque.
2. Voir ci-après l'article 10 de l'arrêté du 19 ventôse an VI qui indique les conditions dans lesquelles ces prises d'eau doivent être effectuées.

nuisible, sous peine de payer le dommage et une amende qui ne pourra excéder la somme du dédommagement.

Art. 16. — Les propriétaires ou fermiers des moulins ou usines construits ou à construire seront garantis de tous dommages que les eaux pourraient causer aux chemins et aux propriétés voisines, par la trop grande élévation du déversoir ou autrement. Ils seront forcés de tenir les eaux à une hauteur qui ne nuise à personne et qui sera fixée par le directoire du département, d'après l'avis du directoire de district. En cas de contravention, la peine sera une amende qui ne pourra excéder la somme du dédommagement [1].

III. Arrêté du gouvernement du 19 ventôse an VI. — *Art.* 9. — Il est enjoint aux administrations centrales et municipales, et aux commissaires du Directoire exécutif établis près d'elles, de veiller avec la plus sévère exactitude à ce qu'il ne soit établi par la suite aucun pont, aucune chaussée permanente ou mobile, aucune écluse ou usine, aucun batardeau, moulin, digue ou autre obstacle quelconque au libre cours des eaux dans les rivières navigables ou flottables, dans les canaux d'irrigation ou de dessèchement généraux, sans en avoir préalablement obtenu la permission de l'administation centrale, qui ne pourra l'accorder que de l'autorisation expresse du Directoire exécutif.

Art. 10. — Ils veilleront pareillement à ce que nul ne détourne le cours des eaux des rivières et canaux navigables ou flottables, et n'y fasse des prises d'eau ou saignées pour l'irrigation des terres, qu'après y avoir été autorisé par l'administration centrale, et sans pouvoir excéder le niveau qui aura été déterminé.

B. Documents législatifs spéciaux aux irrigations.

IV. Code civil. — *Art.* 644. — Celui dont la propriété borde une eau courante autre que celle qui est déclarée dépendance du domaine public par l'art. 538, au titre de la Distinction des biens, peut s'en servir à son passage pour l'irrigation de ses propriétés. Celui dont cette eau traverse l'héritage peut même en user dans l'intervalle qu'elle y parcourt, mais à la charge de la rendre, à la sortie de ses fonds, à son cours ordinaire.

Art. 645. — S'il s'élève une contestation entre les propriétaires auxquels ces eaux peuvent être utiles, les tribunaux, en prononçant,

1. Ces pénalités sont modifiées par l'article 457 du Code pénal.

doivent concilier l'intérêt de l'agriculture avec le respect dû à la propriété; et, dans tous les cas, les règlements particuliers et locaux sur le cours et l'usage des eaux doivent être observés.

V. Loi du 29 avril 1845. — *Art.* 1. — Tout propriétaire qui voudra se servir, pour l'irrigation de ses propriétés, des eaux naturelles ou artificielles dont il a le droit de disposer, pourra obtenir le passage de ces eaux sur les fonds intermédiaires, à la charge d'une juste et préalable indemnité.

Sont exceptés de cette servitude les maisons, cours, jardins, parcs et enclos attenant aux habitations.

Art. 2. — Les propriétaires des fonds inférieurs devront recevoir les eaux qui s'écouleront des terrains ainsi arrosés, sauf l'indemnité qui pourra leur être due.

Seront également exceptés de cette servitude les maisons, cours, jardins, parcs et enclos attenant aux habitations.

Art. 3. — La même faculté de passage sur les fonds intermédiaires pourra être accordée au propriétaire d'un terrain submergé en tout ou en partie, à l'effet de procurer aux eaux nuisibles leur écoulement.

Art. 4. — Les contestations auxquelles pourront donner lieu l'établissement de la servitude, la fixation du parcours de la conduite d'eaux, de ses dimensions et de sa forme, et les indemnités dues, soit au propriétaire du fonds traversé, soit à celui du fonds qui recevra l'écoulement des eaux, seront portées devant les tribunaux qui, en prononçant, devront concilier l'intérêt de l'opération avec le respect dû à la propriété.

Il sera procédé devant les tribunaux comme en matière sommaire, et, s'il y a lieu à expertise, il pourra n'être nommé qu'un seul expert.

Art. 5. — Il n'est aucunement dérogé, par les présentes dispositions, aux lois qui règlent la police des eaux.

VI. Loi du 11 juillet 1847. — *Art.* 1. — Tout propriétaire qui voudra se servir, pour l'irrigation de ses propriétés, des eaux naturelles ou artificielles dont il a le droit de disposer, pourra obtenir la faculté d'appuyer sur la propriété du riverain opposé les ouvrages d'art nécessaires à sa prise d'eau, à charge d'une juste et préalable indemnité.

Sont exceptés de cette servitude, les bâtiments, cours et jardins attenant aux habitations,

Art. 2. — Le riverain sur le fonds duquel l'appui sera réclamé pourra toujours demander l'usage commun du barrage, en contribuant pour moitié aux frais d'établissement et d'entretien; aucune indemnité ne sera respectivement due dans ce cas, et celle qui aura été payée devra être rendue.

Lorsque cet usage commun ne sera réclamé qu'après le commencement ou la confection des travaux, celui qui le demandera devra supporter seul l'excédant de dépense auquel donneront lieu les changements à faire au barrage pour le rendre propre à l'irrigation des deux rives.

Art. 3. — Les contestations auxquelles pourra donner lieu l'application des deux articles ci-dessus seront portées devant les tribunaux.

Il sera procédé comme en matière sommaire, et s'il y a lieu à expertise, le tribunal pourra ne nommer qu'un seul expert.

Art. 4. — Il n'est aucunement dérogé, par les présentes dispositions, aux lois qui règlent la police des eaux.

C. Circulaires et Instructions ministérielles

CONCERNANT LE RÈGLEMENT DES RETENUES D'EAU.

VII. Instruction du 19 thermidor an VI. — Depuis la promulgation de l'arrêté du Directoire exécutif du 19 ventôse dernier, plusieurs demandes m'ont été adressées à l'effet d'obtenir l'autorisation exigée par l'article 9 de cet arrêté pour l'établissement des usines, écluses, batardeaux, moulins, digues, ponts et chaussées permanentes ou mobiles, sur les rivières navigables et flottables, canaux d'irrigation ou de desséchement généraux. J'ai été dans le cas d'observer que ces demandes varient dans leur forme; que souvent les précautions nécessaires à leur préparation étaient négligées ou incomplètes, ou bien que le vœu des administrations n'était point assez formellement prononcé pour déterminer une décision. J'ai pensé qu'il était à propos de fixer une marche simple et régulière qui, en remplissant l'objet de l'arrêté, pût être facilement connue des administrés et suivie par les corps administratifs. Voici quelles sont les dispositions qui m'ont paru les plus importantes pour établir l'ordre et l'uniformité.

Toute personne qui désirera former un établissement de la nature de ceux énoncés dans l'article 9 précité, devra donner sa demande motivée et circonstanciée à l'administration centrale du départe-

ment du lieu de l'établissement projeté. L'administration départementale, après avoir examiné la pétition, en ordonnera le renvoi à l'administration municipale du canton, à l'ingénieur ordinaire de l'arrondissement et à l'inspecteur de la navigation, partout où il y en aura d'établi. L'administration municipale aura à examiner les convenances locales et l'intérêt des propriétaires riverains; et afin d'obtenir à cet égard tous les renseignements, et de mettre les intéressés à même de former leurs réclamations, elle ordonnera l'affiche de la pétition à la porte principale du lieu de ses séances; cette affiche devra demeurer posée pendant l'espace de deux décades, avec invitation aux citoyens qui auraient des observations à proposer, de les faire au secrétariat de la municipalité dans les dites deux décades ou au plus tard dans les trois jours qui suivront l'expiration du délai de l'affiche.

L'admistration municipale formera alors son avis; et indépendamment de la précaution ci-dessus indiquée, elle ne négligera aucune des connaissances qu'elle pourra acquérir par elle-même, soit par son transport sur les lieux, soit par la réunion des propriétaires d'héritages riverains et de ceux des usines inférieures et supérieures, soit enfin par le concours des ingénieur et inspecteur, si elle peut les réunir.

Si l'ingénieur opère séparément, afin de le faire en plus grande connaissance de cause, il attendra l'expiration des délais indiqués et la formation de l'avis de l'administration municipale, qui lui sera remis avec toutes les pièces. Il examinera, par les règles de l'art, les inconvénients ou les avantages de l'établissement, et pèsera sous ce rapport la valeur des objections qui auront pu être faites. Lorsqu'il n'y aura pas d'inspecteur de la navigation dans l'arrondissement, il s'aidera des observations des mariniers instruits, sur l'effet que pourra produire, quant à l'action des eaux, l'établissement projeté, et prescrira la manière dont cet établissement devra se faire, ainsi que l'étendue et la proportion des vannes, écluses, déversoirs, etc.; il fera du tout un plan qu'il joindra à son rapport. La formation du plan sera aux frais de la partie requérante.

L'inspecteur de la navigation se concertera, autant que possible, avec l'ingénieur ordinaire qui, dans tous les cas, devra lui donner communication des pièces; il examinera l'objet sous le rapport de la navigation; il pourra faire son rapport séparément : cependant, lorsque l'ingénieur et l'inspecteur seront d'accord, rien n'empêchera que la rédaction ne soit commune; dans ce dernier cas, il sera formé une double minute dont l'une restera entre les mains de l'ins-

pecteur, l'autre en celles de l'ingénieur. L'ingénieur en chef donnera son avis sur le rapport de l'ingénieur ordinaire. Quant à l'inspecteur de la navigation, soit qu'il opère seul ou divisément, il devra toujours adresser une expédition de son rapport au bureau de la navigation, indépendamment de celle qu'il remettra pour l'administration centrale. Aussitôt la clôture des visites et rapports, toutes les pièces seront remises à l'administration centrale du département, pour former son arrêt motivé, lequel, par une disposition expresse, portera surséance d'exécution jusqu'à l'intervention de la sanction du Directoire.

Conformément à l'arrêté du Directoire exécutif du 29 floréal an VI, tous les arrêtés d'autorisation des administrations centrales doivent contenir :

1° L'obligation expresse aux ingénieurs de surveiller immédiatement l'exécution des travaux indiqués aux plan et devis ;

2° Celle au concessionnaire de faire, à ses frais après les travaux achevés, constater leur état par un rapport de l'ingénieur, dont une expédition sera déposée aux archives de l'administration centrale, et l'autre adressée au ministre de l'intérieur ;

3° D'insérer la clause expresse que dans aucun temps, ni sous aucun prétexte, il ne pourra être prétendu indemnité, chômage, ni dédommagement par les concessionnaires ou ceux qui les représenteront, par suite des dispositions que le gouvernement jugerait convenable de faire pour l'avantage de la navigation, du commerce ou de l'industrie, sur les cours d'eau où seront situés les établissements.

L'arrêté de l'administration étant formé, il sera adressé avec les pièces au ministre de l'intérieur, bureau de la navigation, 4° division, pour, d'après l'examen, être présenté s'il y a lieu à l'homologation du Directoire exécutif.

Faute par le requérant de se conformer exactement aux dispositions de l'arrêté de concession qu'il aura obtenu, l'autorisation sera révoquée et les lieux remis au même état où ils étaient auparavant, à ses frais ; il en sera usé de même dans le cas où le concessionnaire, après avoir exécuté fidèlement les conditions qui lui auront été imposées, viendrait par la suite à former quelque entreprise sur le cours d'eau, ou changer l'état des lieux sans s'y être fait autoriser.

Les mêmes règles que celles ci-dessus prescrites pour les nouveaux établissements, auront lieu toutes les fois qu'on voudra changer de plan les anciens ou y faire quelque innovation importante. On ob-

servera de plus, à l'égard de ceux-ci, l'examen des titres de jouissance, pour connaître si ces titres se trouvent avoir été confirmés d'après la discussion qui doit en être faite, en exécution des dispositions de l'arrêté du 19 ventôse.

Les corps administratifs, les commissaires du Directoire près les administrations centrales et municipales, les ingénieurs en chef et les ingénieurs ordinaires sont invités expressément à suivre la marche indiquée dans la présente instruction; c'est le seul moyen d'arriver à un ordre de choses qui, en encourageant les établissements utiles en ce genre, puisse arrêter les constructions nuisibles, prévenir les erreurs et les surprises, et écarter du Gouvernement une foule de demandes où l'intérêt particulier met trop souvent ses calculs à la place de ceux sur lesquels doit reposer l'intérêt public.

VIII. Circulaire ministérielle du 16 novembre 1834. — Cette circulaire a été refondue, complétée et remplacée par l'instruction du 23 octobre 1851. Il est inutile de la reproduire.

IX. Circulaire du Ministre des Travaux publics du 23 octobre 1851. — *Navigation.* — *Instructions pour le règlement des usines sur cours d'eau.* — Monsieur le Préfet, le service hydraulique, qui fait l'objet de la circulaire d'un de mes prédécesseurs, en date du 17 novembre 1848, comprend, en première ligne, l'instruction des affaires relatives à la réglementation des usines, situées sur les cours d'eau.

Je viens, ainsi que l'annonçait la circulaire précitée, vous tracer, pour cette partie du service, des règles générales qui, résumant et complétant les prescriptions précédentes, apporteront dans l'instruction des affaires de ce genre une uniformité favorable à leur bonne et prompte expédition.

Toute demande relative, soit à la construction première de moulins ou usines à créer sur un cours d'eau, soit à la régularisation d'établissements anciens, soit à la modification des ouvrages régulateurs d'établissements déjà autorisés, doit vous être adressée en double expédition, dont une sur papier timbré.

S'il s'agit de la construction première d'une usine, la demande devra énoncer d'une manière distincte :

1° Les noms du cours d'eau et de la commune sur lesquels cette usine devra être établie, les noms des établissements hydrauliques placés immédiatement en amont et en aval;

2° L'usage auquel l'usine est destinée ;

3° Les changements présumés que l'exécution des travaux devra apporter au niveau des eaux, soit en amont soit en aval ;

4° La durée probable de l'exécution des travaux.

Le pétitionnaire devra en outre justifier qu'il est propriétaire des rives dans l'emplacement du barrage projeté et du sol sur lequel les autres ouvrages doivent être exécutés ou produire le consentement écrit du propriétaire de ces terrains.

S'il s'agit de modifier ou de régulariser le système hydraulique d'une usine existante ou d'un ancien barrage, le propriétaire devra fournir autant que possible, outre les renseignements ci-dessus mentionnés, une copie des titres en vertu desquels ces établissements existent, et indiquer les noms des propriétaires qui les ont possédés avant lui.

La production de ces renseignements est nécessaire pour que l'affaire puisse être suivie ; elle rendra en général l'instruction plus facile et plus prompte ; et d'ailleurs, dans l'intérêt des pétitionnaires eux-mêmes, il convient de les obliger à ne soumettre à l'Administration que des projets sérieux et dont l'exécution ne se trouve pas, dès l'origine, arrêtée par quelque insurmontable difficulté.

Première enquête. — D'après l'instruction du 19 thermidor an VI[1], dont les dispositions, conformément à la jurisprudence du Conseil d'Etat, sont applicables à tous les cours d'eau, toute demande relative à l'établissement ou à la régularisation du moulin ou usine doit être soumise à une enquête préalable de vingt jours.

Lorsque vous avez reconnu que la pétition satisfait aux conditions voulues et peut utilement être soumise aux enquêtes, un arrêté pour la rédaction duquel vous voudrez bien vous conformer au modèle ci-joint N° 1, en ordonnera le dépôt à la mairie de la commune où les travaux doivent être exécutés, et fixera le jour de l'ouverture de l'enquête[1].

L'arrêté sera par les soins du maire affiché tant à la principale porte de l'église qu'à celle de la mairie, et publié à son de caisse ou de trompe, le dimanche à l'heure où les habitants se trouvent habituellement réunis. Il importe que l'annonce de l'enquête reçoive toute publicité, afin que les intéressés ne puissent l'ignorer, et que l'Administration soit autorisée à considérer leur silence comme un acquiescement au projet du pétitionnaire.

1. Les modèles annexés à cette circulaire ont été modifiés et complétés par la circulaire du Ministre de l'Agriculture du 26 décembre 1884. On trouvera plus loin ces modèles ainsi rectifiés.

Un registre (mod. n° 2) destiné à recevoir les observations des parties intéressées sera ouvert à la mairie de la même commune.

Si l'entreprise paraît de nature à étendre son effet en dehors du territoire de la commune, l'arrêté désignera les autres communes dans lesquelles l'enquête doit être annoncée.

Si ces communes appartiennent à plusieurs départements, l'enquête sera ordonnée par le Préfet du département où se trouve le siège principal de l'établissement, et l'arrêté transmis aux préfets des autres départements pour être publié dans toutes les communes intéressées.

L'accomplissement de ces formalités sera certifié (n° 2) par les maires des communes où elles auront été prescrites.

Envoi aux Ingénieurs. — Lorsque vous vous serez assuré de la régularité de l'enquête, vous transmettrez les pièces à l'Ingénieur en chef, dans les attributions duquel le cours d'eau se trouve placé, c'est-à-dire, pour les rivières navigables ou flottables, à l'Ingénieur en chef qui est préposé aux travaux de ces rivières, et pour les autres cours d'eau, à l'Ingénieur en chef du service hydraulique ou du service ordinaire, suivant l'organisation du service dans votre département.

Sur les cours d'eau qui, sans être une dépendance du domaine public, servent à l'alimentation d'un canal ou qui sont soumis à un régime particulier dans l'intérêt de la navigation ou du flottage, aucune permission ne peut être accordée sans que les Ingénieurs chargés du canal ou de la navigation aient été consultés. Il convient que, dans l'examen des affaires relatives à ces cours d'eau, les Ingénieurs des deux services entrent directement en conférence et procèdent conformément aux instructions qui leur ont été adressées par la circulaire du 12 juin 1850.

Comme il importe, d'ailleurs, que les usines situées sur un même cours d'eau ou au moins sur la même partie d'un cours d'eau soient réglées dans des vues d'ensemble, il peut être nécessaire qu'un seu service d'Ingénieur soit chargé de toutes les usines d'un cours d'eau placé à la limite de deux départements. Vous voudrez bien me signaler les circonstances dans lesquelles il pourrait être utile de prendre des mesures de cette nature.

Instruction par l'Ingénieur ordinaire. — L'Ingénieur en chef renvoie toutes les pièces à l'Ingénieur ordinaire chargé du service des usines dans l'arrondissement, pour être procédé par lui à la visite des lieux et à l'instruction de l'affaire.

Visite des lieux. — L'Ingénieur ordinaire, après s'être assuré que

la visite des lieux peut être faite utilement, annonce à l'avance son arrivée aux maires des diverses communes intéressées, avec invitation de donner à cet avis toute publicité (modèle n° 3). Il prévient directement le pétitionnaire, les présidents des syndicats, s'il en existe sur le cours d'eau, les mariniers les plus expérimentés s'il s'agit d'une rivière navigable ou flottable, et toutes autres personnes dont la présence lui paraît utile, et pour lesquelles il pense que cet avertissement direct est nécessaire. Ses avis doivent être adressés de telle sorte qu'il y ait, dans tous les cas, au moins cinq jours pleins entre la date de la réception de la lettre et le jour de la visite des lieux.

L'Ingénieur ordinaire procède à cette visite en présence des maires ou de leurs représentants et de ceux des intéressés qui se sont rendus aux avertissements donnés.

Il se fait rendre compte de la position que doivent occuper les ouvrages projetés et des limites du terrain appartenant au pétitionnaire ; il s'assure que la propriété des rives dans l'emplacement du barrage et du sol sur lequel les autres ouvrages doivent être assis n'est pas contestée, ou que le pétitionnaire a produit le consentement écrit du propriétaire de ces terrains.

Il rattache à un ou plusieurs repères provisoires, choisis avec soin, la hauteur des eaux en amont et en aval. S'il existe déjà des ouvrages, tels que barrages, déversoirs, pertuis, vannes de décharge, vannes motrices, il constate leurs dimensions et rapporte aux mêmes repères provisoires la hauteur des seuils, le dessus des vannes, la crête des déversoirs ; enfin il réunit tous les renseignements nécessaires pour constater et définir exactement, en ce qui touche le régime des eaux, l'état des lieux avant les changements qui doivent y être apportés.

Lorsqu'il devra résulter des travaux projetés une augmentation ou une diminution dans la hauteur des eaux, l'Ingénieur procédera par voie d'expérience directe, afin de mettre les parties intéressées à même d'apprécier les conséquences de ces changements. Dans le cas où il serait impossible de faire ces expériences, il aura recours à tous autres moyens qui lui paraîtront propres à y suppléer. Lorsqu'il doit y avoir partage ou usage alternatif des eaux, il recueillera tous les renseignements nécessaires pour régler les droits de chacun.

L'Ingénieur dresse, en présence du maire et des parties intéressées, un procès-verbal (modèle n° 4) dans lequel il indique, d'une manière circonstanciée, l'état ancien des lieux, les repères qu'il a

adoptés, les renseignements qu'il a recueillis, les résultats des expériences qu'il a faites ; il y ajoute les observations qui ont été produites, enfin il déclare qu'il sera procédé ultérieurement, s'il y a lieu, au complément des opérations. Lecture de ce procès-verbal est donné aux parties intéressées qui sont invitées à le signer et à y insérer sommairement leurs observations si elles le jugent convenable. Mention y est faite des personnes qui se seraient retirées ou qui n'auraient pas voulu signer, ni déduire les motifs de leurs refus.

Lorsque, dans la visite des lieux, les parties intéressées parviennent à s'entendre et font entre elles des conventions amiables, l'Ingénieur doit constater cet accord dans le procès-verbal. Cette constatation, signée des parties, est régulière, et le comité des travaux publics du Conseil d'Etat a reconnu qu'elle suffit pour que l'Administration puisse statuer.

Je recommande à MM. les Ingénieurs de s'attacher à ne faire en présence des intéressés que des opérations qui soient facilement comprises, et à ne consigner au procès-verbal que des résultats matériels sur lesquels il ne puisse s'élever aucun doute. Ils comprendront, d'ailleurs, qu'en recevant les observations des intéressés, leur rôle ne doit pas se borner à enregistrer les dires contradictoires, mais qu'il leur appartient de provoquer les discussions qui peuvent éclairer les faits et de rechercher toutes les dispositions qui, en sauvegardant l'intérêt public, peuvent donner satisfaction aux intérêts privés.

Plans et nivellements. — L'Ingénieur ordinaire dresse les plans et nivellements nécessaires à l'instruction de l'affaire, conformément au programme que vous trouverez ci-annexé.

Rapport. — Dans son rapport sur la demande du pétitionnaire, l'Ingénieur présente un exposé de l'affaire, décrit l'état des lieux, discute les oppositions, et motive les propositions relatives au niveau de la retenue, aux ouvrages régulateurs et aux prescriptions diverses qu'il estime devoir être imposées aux pétitionnaires.

Exposé de l'affaire. — L'exposé de l'affaire comprend l'analyse succincte de la pétition et les différentes phases de l'instruction à laquelle elle a été soumise.

Description des lieux. — La description de l'état des lieux embrasse toutes les parties de la vallée que peut affecter le régime des eaux de l'usine à régler. Les routes, les voies de communication vicinales, les gués, les ponts, les abreuvoirs, tous les ouvrages ou établissements publics qui peuvent se ressentir d'une manière quelconque des changements projetés dans la hauteur, le parcours ou

la transmission des eaux doivent y être sommairement indiqués. Il faut aussi faire connaître s'il existe sur le cours d'eau des usines réglées ou non réglées, soit en amont soit en aval.

Discussion des oppositions. — Les questions de propriété, d'usage ou de servitude sont soumises aux règles du droit commun et ressortissent aux tribunaux civils; mais dans l'exercice du droit de police qui lui est attribué, l'Administration, dont toutes les décisions réservent d'ailleurs les droits des tiers, doit rechercher et prescrire, nonobstant tous titres et conventions contraires, les mesures que réclame l'intérêt public. En conséquence, MM. les Ingénieurs ne devront s'arrêter devant des oppositions qui soulèvent des questions de droit commun, qu'autant que les intérêts généraux n'auront pas à souffrir de l'ajournement de l'instruction. Dans tous les cas, avant de suspendre l'examen de l'affaire, il conviendra d'examiner si ces oppositions ont quelque fondement et si elles n'ont pas été mises en avant, uniquement, pour entraver la réalisation des projets du demandeur.

Niveau de la retenue. — Le premier point dont MM. les Ingénieurs aient à s'occuper dans le règlement d'une usine, est la détermination du niveau légal de la retenue. On entend par niveau légal d'une retenue la hauteur à laquelle l'usinier doit, par une manœuvre convenable des vannes de décharge, maintenir les eaux en temps ordinaire et les ramener, autant que possible, en temps de crue.

La fixation de ce niveau doit être faite de manière à ne porter aucune atteinte aux droits de l'usine supérieure, et à ne causer aucun dommage aux propriétés riveraines.

Ce n'est que dans l'examen attentif des circonstances de chaque affaire que MM. les Ingénieurs trouveront les moyens de satisfaire à la première de ces conditions.

On ne saurait non plus poser, pour la seconde, des règles générales. La différence à maintenir entre le niveau de la retenue et les points les plus déprimés des terrains qui s'égouttent directement dans le bief, varie avec la nature du terrain, le genre de culture et le régime du cours d'eau. A défaut d'usages locaux, et s'il n'est pas reconnu nécessaire d'adopter des dispositions particulières, que MM. les Ingénieurs devront motiver avec soin, l'Administration admet que cette différence doit être au moins de $0^{m}16$. On ne devra pas cependant prendre, pour base de l'application de cette règle, quelques parties du terrain peu importantes, qui pourraient présenter une dépression exceptionnelle.

Lorsqu'au lieu de recevoir directement les eaux de la vallée, le

bief est ouvert à mi-côte et supérieur à une partie des terrains qui le bordent, la règle précédente n'est plus applicable. Il faut alors que les terrains riverains, inférieurs au bief, soient protégés contre le déversement des eaux par des berges naturelles, ou des digues artificielles dont la hauteur soit au moins de 0m,30 au-dessus de la retenue. Les digues artificielles auront en général une largeur de 0m,60 en couronne et des talus réglés à 3 de base pour 2 de hauteur. MM. les Ingénieurs ont d'ailleurs à reconnaître, dans ce cas, si les eaux de toutes les parties de la vallée que la retenue affecte ont un écoulement assuré, et à prescrire, s'il y a lieu, les dispositions nécessaires pour leur évacuation, en tant que ces dispositions peuvent être mises à la charge de l'usinier.

Repère. — Il sera posé près de l'usine, en un point apparent et de facile accès, désigné, s'il y a lieu, par l'Ingénieur, un repère définitif et invariable.

Le zéro de ce repère indiquera seul le niveau légal de la retenue.

Ouvrages régulateurs. — Toute retenue doit être accompagnée, sauf des exceptions très rares, et qui devront être motivées d'une manière spéciale par MM. les Ingénieurs :

1° D'un déversoir de superficie dont l'objet est d'assurer immédiatement un moyen d'écoulement aux eaux, lorsque quelque variation dans le régime de la rivière fait accidentellement dépasser le niveau légal ;

2° De vannes de décharge destinées à livrer passage aux eaux des crues.

Déversoirs. — La longueur du déversoir doit être en général égale à la largeur du cours d'eau, aux abords de l'usine, dans les parties où le lit a conservé son état normal.

Sur les cours d'eau ordinaires dont le volume entier peut être utilisé par l'usine, la crête du déversoir doit être dérasée sur toute son étendue suivant le plan de pente de l'eau retenue au niveau légal à l'époque des eaux moyennes, l'usine marchant régulièrement et le bief étant convenablement curé.

Sur les rivières dont les eaux ne sont pas utilisées en totalité par l'usine, le déversoir, qui a souvent une grande étendue, peut être disposé de manière à servir à l'écoulement d'une partie de la rivière même pendant les eaux ordinaires, et par conséquent être dérasé au-dessous de la hauteur de la retenue, sauf toutefois une partie du couronnement qui devra être réglée à cette hauteur, afin que l'état des eaux devant le déversoir permette d'apprécier si le niveau légal est observé.

Vannes de décharge. — Le débouché des vannes de décharge doit être calculé de telle sorte que, la rivière coulant à pleins bords et étant prête à déborder, toutes les eaux s'écoulent comme si l'usine n'existait pas. Dans ce calcul, on ne tiendra pas compte du débouché des vannes motrices, dont le propriétaire de l'usine doit toujours rester libre de disposer dans le seul intérêt de son industrie, mais on aura égard à la lame d'eau qui pourra alors s'écouler par le déversoir de superficie. Il est essentiel que MM. les Ingénieurs apportent le plus grand soin dans cette partie de leur travail, et que leurs propositions soient appuyées, soit sur les résultats de jaugeages bien faits, soit sur des exemples tirés d'usines ou autres ouvrages existant sur le même cours d'eau, et dont les débouchés sont convenablement établis.

Le niveau de l'arête supérieure des vannes de décharge sera déterminé d'après les mêmes règles que celui du déversoir. La hauteur des seuils sera fixée de manière à conserver la pente moyenne du fond du cours d'eau et à ne produire dans le lit aucun encombrement nuisible. Dans les établissements anciens, où le débouché est trop faible et le seuil des vannes de décharge trop élevé, il suffit presque toujours de placer au niveau indiqué ci-dessus le seuil des nouvelles vannes dont on prescrira l'établissement, sans impo- à l'usinier les frais souvent considérables de l'abaissement du seuil des vannes existantes.

Canaux de décharge. — MM. les Ingénieurs n'ont pas ordinairement à préciser les dimensions des canaux de décharge. Il suffit de prescrire, en termes généraux, que ces canaux soient disposés de manière à embrasser, à leur origine, les ouvrages auxquels ils font suite et à écouler facilement toutes les eaux que ces ouvrages peuvent débiter.

Vannes automobiles. — Les propriétaires d'usines, sur quelques cours d'eau dont les crues se produisent très rapidement, ont substitué aux vannes ordinaires des vannes automobiles, s'ouvrant sous la pression des eaux. Ce système n'offre pas assez de garantie pour que l'administration puisse en prescrire explicitement l'application. Néanmoins, lorsque les usiniers demanderont l'autorisation d'en faire usage, cette autorisation pourra être accordée à leurs risques et périls, et sous la condition expresse que les vannes seront manœuvrées à bras, toutes les fois qu'elles ne s'ouvriraient pas par la seule action des eaux.

Barrages sur les rivières torrentielles. — Sur les rivières torrentielles fortement encaissées, il est souvent inutile d'établir des van-

nes de décharge en vue d'assurer l'écoulement des crues. Il suffit, dans ce cas, de fixer la hauteur et la longueur du barrage, de manière à n'apporter dans la situation des propriétés riveraines aucun changement qui lui soit préjudiciable. S'il paraissait nécessaire d'empêcher l'exhaussement du fond du lit ou de se ménager les moyens de vider le bief, on se bornerait à prescrire l'établissement de vannes de fond ou même d'une simple bonde.

Vannes motrices. — Sur les rivières non navigables ni flottables, hors les cas de partage d'eau dans lesquels l'administration peut être appelée à déterminer la situation respective des divers intéressés, les dimensions des vannes motrices doivent être laissées à l'entière disposition du permissionnaire; il n'y a pas lieu non plus d'imposer l'établissement de vannes de prise d'eau en tête des dérivations, ni de fixer la largeur et la pente des canaux de dérivation, toutes les fois qu'il n'est pas reconnu nécessaire, dans l'intérêt des propriétés riveraines ou par suite de quelque disposition locale, de régler l'introduction des eaux dans ces canaux.

MM. les Ingénieurs n'ont d'ailleurs, en aucun cas, à régler la chute de l'usine ni les dispositions du coursier et de la roue hydraulique.

Clauses spéciales pour les cours d'eau navigables. — Sur les cours d'eau navigables ou flottables, comme il s'agit d'une concession temporaire et révocable sur le domaine public, concession qui est soumise à une redevance conformément à la loi de finances du 16 juillet 1840, il y a lieu de déterminer le volume d'eau concédé, en fixant les dimensions des prises d'eau. Quant à la quotité de la redevance, elle devra être établie en prenant pour base, dans chaque localité, la valeur de la force motrice. Les propositions qui vous seront faites à cet égard par MM. les Ingénieurs devront être communiquées à M. le Directeur des domaines, dont l'avis sera joint au dossier, ainsi que le consentement du pétitionnaire.

MM. les Ingénieurs auront, en outre, à déterminer les conditions à remplir dans l'intérêt de la navigation ou du flottage.

Ouvrages accessoires. — Les propositions des ingénieurs comprendront les obligations spéciales qu'il peut être nécessaire, à raison de l'état des lieux, d'imposer à l'usinier, telles que rétablissement de gués, construction de ponts, ponceaux ou aqueducs, ou autres ouvrages présentant un caractère d'utilité générale. Toutefois, il convient que les prescriptions soient rédigées en termes généraux, et qu'elles ne règlent pas les détails qui doivent rester dans les attributions des autorités locales. MM. les Ingénieurs devront, d'ailleurs, lorsque plusieurs services seront intéressés dans la ques-

tion, se conformer aux dispositions de la circulaire du 12 juin 1850.

Transmission régulière des eaux. — Dans le cas où, pour assurer la transmission régulière des eaux, il serait nécessaire d'interdire les éclusées ou d'en régler l'usage, MM. les Ingénieurs auront à fixer, soit le niveau au-dessous duquel les eaux ne doivent pas être abaissées, soit la durée des intermittences.

Etangs servant de biefs aux usines. — Si le bief d'une usine forme un étang qui puisse donner lieu à des exhalaisons dangereuses, il conviendra de rechercher quelles sont les dispositions spéciales à prescrire dans l'intérêt de la salubrité publique, afin que cet étang ne puisse pas tomber sous l'application du décret des 11-19 septembre 1792 [1]. Vous voudrez bien consulter à cet effet les conseils municipaux des communes intéressées, ainsi que le conseil d'hygiène de l'arrondissement organisé par l'arrêté du 18 décembre 1848 et joindre au dossier leurs délibérations et leurs avis.

Scieries. — S'il s'agit de créer une scierie, vous aurez à prendre l'avis du conservateur des eaux et forêts, qui est chargé d'examiner si l'établissement projeté n'est pas soumis aux prohibitions déterminées par le Code forestier [2]. Dans tous les cas, on doit stipuler que le permissionnaire ne pourra invoquer l'autorisation à lui accordée au point de vue du régime des eaux, qu'après s'être conformé aux lois et règlements des eaux et forêts.

Usines situées dans la zone frontière. — Si l'usine doit être établie dans la zone frontière soumise à l'exercice des douanes, le directeur des douanes doit être également consulté et une réserve analogue à celle indiquée ci-dessus doit être insérée dans l'acte d'autorisation.

Usines situées dans la zone des servitudes militaires. — Enfin, lors-

1. Décret des 11-19 septembre 1792. L'Assemblée nationale décrète ce qui suit : « Lorsque les étangs, d'après les avis et procès-verbaux des gens de l'art, pourront occasionner, par la stagnation de leurs eaux des maladies épidémiques ou épizootiques, ou que par leur position, ils seront sujets à des inondations qui envahissent et ravagent les propriétés inférieures, les conseils généraux des départements sont autorisés à en ordonner la destruction, sur la demande formelle des conseils généraux des communes, et d'après les avis des administrateurs de district »

2. Art. 155 du Code forestier. Aucune usine à scier le bois ne pourra être établie dans l'enceinte et à moins de deux kilomètres de distance des bois et forêts qu'avec l'autorisation du Gouvernement, sous peine d'une amende de cent à cinq cents francs, et de la démolition dans le mois à dater du jugement qui l'aura ordonnée.

Art. 156. Sont exceptées des dispositions des trois articles précédents : les maisons et usines qui font partie des villes, villages ou hameaux formant une population agglomérée, bien qu'elles se trouvent dans les distances ci-dessus fixées des bois et forêts.

que l'établissement projeté se trouve compris dans la zone des servitudes militaires, autour des places de guerre, il y a lieu d'ouvrir des conférences avec MM. les officiers du génie militaire, conformément à l'ordonnance du 18 septembre 1816, et aux circulaires des 27 mars 1846 et 30 octobre 1849.

Projet de règlement. — L'ingénieur ordinaire résume ses propositions, s'il y a lieu, dans un projet de règlement séparé de son rapport (modèle n° 5) pour les cours d'eau non navigables ni flottables, et modèle n° 6 pour les cours d'eau du domaine public, et adresse toutes les pièces de l'instruction à l'ingénieur en chef.

MM. les Ingénieurs ne perdront pas de vue, en présentant leurs conclusions, que dans toutes les prescriptions relatives au règlemet des usines, il importe de ménager avec soin les intérêts des propriétaires de ces établissements ; il faut tenir compte des ouvrages existants, s'efforcer de les conserver, rechercher les moyens de n'imposer aucune construction trop dispendieuse, en laissant d'ailleurs, autant que possible, à l'usinier la faculté de choisir pour ces constructions les emplacements qui lui conviendront le mieux, ne prescrire enfin de dispositions onéreuses que celles que l'intérêt de police des eaux rend indispensables.

Avis de l'ingénieur en chef. — L'ingénieur en chef vous transment, monsieur le Préfet, toutes les pièces avec ses observations et son avis.

Deuxième enquête. — Conformément à la circulaire du 16 novembre 1834, ces pièces sont soumises à une nouvelle enquête en tout semblable à la première, sauf réduction du délai à quinze jours. Le résultat de cette seconde enquête est communiqué à MM les Ingénieurs pour qu'ils donnent leur avis. — Si d'après les résultats de cette seconde enquête, MM. les Ingénieurs croient devoir apporter à leurs premières conclusions quelque changement qui soit de nature à provoquer de nouvelles oppositions, il conviendra que l'affaire soit de nouveau soumise à une enquête de quinze jours.

Avis du préfet. — Après l'accomplissement de ces formalités, vous aurez, monsieur le Préfet, à prononcer le rejet de la demande ou à en proposer l'admission.

En cas de rejet, vous notifierez immédiatement votre arrêté motivé au pétitionnaire, qui, s'il le juge utile à ses intérêts, exercera son recours devant le ministre.

En cas d'admission, vous me transmettrez les pièces avec votre avis. Si les conclusions des ingénieurs sont adoptées par vous sans modification, vous pourrez, afin d'éviter des transcriptions qui de-

mandent un temps assez long et donnent lieu quelque fois à des erreurs, vous borner à me faire connaître, dans votre lettre d'envoi ; que vous approuvez le projet de règlement. Si, au contraire, vous croyez devoir modifier ces conclusions, vous voudrez bien me transmettre sous forme d'arrêté votre avis motivé, en vous conformant d'ailleurs, suivant les cas, au modèle n° 5 ou au n° 6.

Récolement. — Lorsque l'acte d'autorisation a été rendu, l'ingénieur ordinaire, à l'expiration du délai fixé par cet acte, se transporte sur les lieux pour vérifier si les travaux ont été exécutés conformément aux dispositions prescrites, et rédige un procès-verbal de récolement, en présence de l'autorité locale et des intéressés, convoqués à cet effet dans les mêmes formes que pour la visite des lieux dont il a été parlé ci-dessus.

Le procès-verbal (modèle n° 7) rappelle les divers articles de l'acte d'autorisation et indique la manière dont il y a été satisfait.

L'ingénieur y fait mention de la pose du repère définitif et, pour en définir la position, le rattache à des points fixes servant de contre-repères.

Si les travaux exécutés sont conformes aux dispositions prescrites, l'ingénieur en propose la réception et transmet le procès-verbal de récolement en triple expédition à l'ingénieur en chef, qui le soumet avec son avis à votre approbation. L'une des expéditions me sera transmise, une autre sera déposée aux archives de la préfecture et la troisième à la mairie de la situation des lieux.

Lorsque les travaux ne sont pas entièrement conformes aux dispositions prescrites, l'ingénieur, à la suite du procès-verbal de récolement, discute les différences et il y joint, au besoin, de nouveaux dessins pour rendre plus facile la comparaison de l'état de choses qui existe avec celui qui a été prescrit.

Si les différences reconnues sont peu importantes et ne donnent lieu à aucune réclamation, vous voudrez bien, monsieur le Préfet, me soumettre l'affaire, afin que je prenne telle mesure qu'il appartiendra. S'il s'agit, au contraire, de différences notables et qui seraient de nature à causer des dommages, vous devrez, sans qu'il soit nécessaire de m'en référer, mettre immédiatement le permissionnaire en demeure de satisfaire aux prescriptions de l'acte d'autorisation, et en cas de refus ou de négligence de sa part, vous ordonnerez la mise en chômage de l'usine, et même, s'il y a lieu, la destruction des ouvrages dommageables.

Révision des règlements. — Bien que l'Administration ne veuille pas s'interdire, d'une manière absolue, la faculté de revenir sur les autorisations accordées aux usiniers, il importe de ne modifier qu'avec une grande réserve les actes émanés du pouvoir exécutif après une instruction régulière et contradictoire.

Dans le cas où les intéressés vous adresseraient des demandes tendant à obtenir la modification de règlements existants, vous voudrez bien me transmettre ces demandes accompagnées du rapport de MM. les Ingénieurs et de votre avis particulier, afin de me mettre à même de statuer sur la question de savoir s'il y a lieu de prescrire une nouvelle instruction, laquelle devrait être faite dans les formes indiquées ci-dessus.

MM. les Ingénieurs auront soin de joindre à leurs propositions celles des pièces de la première instruction qui peuvent être utiles à l'examen de l'affaire, et notamment l'acte administratif dont la revision est demandée.

Règlement de plusieurs usines. — Lorsqu'ils auront à traiter en même temps les affaires relatives à plusieurs usines, MM. les Ingénieurs s'efforceront de former, autant que possible, un dossier distinct, et de présenter un projet de règlement spécial pour chaque établissement, afin que, d'une part, chaque propriétaire ait un titre règlementaire particulier, et que, d'autre part, les retards auxquels une affaire pourrait donner lieu n'arrêtent pas l'instruction des autres.

Règlements d'office. — Je vous recommande expressément, monsieur le Préfet, de n'ordonner qu'avec une très grande réserve le règlement d'office d'usines existantes. Sans doute toutes les fois qu'un dommage public ou privé lui est signalé, l'Administration doit intervenir; mais il convient qu'elle s'abstienne, lorsque son intervention n'est pas réclamée, et surtout lorsqu'il s'agit d'établissements anciens qui ne donnent lieu à aucune plainte. On ne devra faire d'exception que pour les usines qui sont situées sur la même tête d'eau ou qui ont des ouvrages régulateurs communs, et qu'il est indispensable de règler simultanément, lorsque l'Administration est saisie de questions relatives à l'une d'entre elles.

Les règlements d'office qu'il vous paraîtrait indispensable de prescrire seront d'ailleurs soumis aux mêmes règles que les affaires dont l'Administration est saisie par l'initiative des particuliers.

J'ai l'honneur de vous adresser, avec la présente circulaire, les modèles que j'ai cités dans le cours de cette instruction. J'attache

une grande importance à ce que ces modèles soient exactement observés, et je vous prie de vous concerter avec M. l'Ingénieur en chef pour faire imprimer les formules qui, à l'avenir, devront être exclusivement employées dans l'instruction des affaires d'usines.

Vous trouverez en outre ci-joint un programme pour la rédaction des dessins et des pièces écrites que doivent produire MM. les Ingénieurs. Je vous prie de leur recommander de se conformer ponctuellement aux dispositions de ce programme.

Veuillez, monsieur le Préfet, m'accuser réception de la présente circulaire, dont j'adresse une ampliation à MM. les Ingénieurs en chef et ordinaires.

X. — Circulaire du Ministre de l'Agriculture du 26 décembre 1884. — *Cours d'eau non navigables ni flottables. — Instructions pour le règlement des usines et prises d'eau.* — Monsieur le Préfet, la circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 23 octobre 1851 a tracé la marche à suivre pour l'instruction des affaires relatives à la réglementation des usines sur les cours d'eau.

Cette circulaire est accompagnée d'un programme pour la rédaction des pièces nécessaires à l'instruction des règlements d'eau, et de sept modèles qui ont trait : les deux premiers, aux enquêtes à ouvrir ; le troisième et le quatrième, à la visite des lieux ; le cinquième et le sixième, aux projets de règlement, et le septième, au procès-verbal de récolement des travaux.

M. le Ministre des travaux publics a modifié le modèle n° 6, relatif au règlement des usines à établir sur les cours d'eau navigables et flottables, afin de faire disparaître les lacunes que présentait cette formule, de la mettre en harmonie avec la jurisprudence actuelle du Conseil d'Etat, et il a arrêté un nouveau modèle qu'il a rendu obligatoire par une circulaire du 18 juin 1878.

La Commission permanente de l'Hydraulique agricole a pensé qu'il convenait de modifier dans le même esprit et dans le même but le modèle n° 5, relatif au règlement des usines à établir sur les cours d'eau non navigables ni flottables ; elle a préparé le modèle ci-joint, que j'ai adopté, et auquel je vous prie de vous conformer à l'avenir.

Je crois utile de vous donner quelques explications au sujet de ce nouveau modèle, et je compléterai ensuite, sur divers points, les instructions contenues dans la circulaire du 23 octobre 1851, qui est consacrée par une pratique de plus de trente années, et doit rester la règle fondamentale en matière de règlement d'eau.

Nouveau modèle de règlement d'eau. — L'article 1er reproduit la rédaction de l'article 1er du nouveau modèle pour les usines à établir sur les cours d'eau navigables et flottables.

Cette rédaction respecte le droit du permissionnaire de faire tel usage qui lui convient de la force motrice mise à sa disposition.

Elle prévoit en outre le cas où il s'agit de réglementer une ancienne usine fondée en titre.

Cette distinction est nécessaire, car si l'Administration conserve son droit de réglementation sur les usines qui ont une existence légale, elle n'a pas à les autoriser ; et ces usines ne doivent pas, par suite, être assujetties à toutes les mêmes clauses que les autres.

On doit entendre, sur les cours d'eau non navigables ni flottables, par **ancienne usine fondée en titre**, celle qui a été construite antérieurement aux lois abolitives du régime féodal et à la loi du 19-20 août 1790, ou celle qui a fait l'objet d'une vente nationale.

Les articles 2, 3, 4, 5 et 6 reproduisent purement et simplement les articles correspondants du modèle annexé à la circulaire du 23 octobre 1851. Une note fait seulement observer que l'article 4 comprend un certain nombre de dispositions qui supposent la réglementation d'une usine déjà existante et qui doivent être supprimées dans le cas de réglementation d'une usine nouvelle à établir.

L'article 7 est relatif au repère. La rédaction adoptée est celle qui figure dans le nouveau modèle relatif aux usines à établir sur les cours d'eau navigables ou flottables, et qu'une circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 3 mars 1879 a rendue applicable aux usines établies sur les cours d'eau non navigables ni flottables.

L'article 8 relatif à la manœuvre des vannes de décharge en temps de crue reproduit, sauf quelques changements de rédaction, l'article correspondant du modèle annexé à la circulaire du 23 octobre 1851.

L'article 9 se rapporte au cas où les opérations pratiquées dans l'usine seraient de nature à apporter à la température ou à la pureté des eaux un trouble préjudiciable à la salubrité publique, à la santé des animaux qui s'abreuvent dans la rivière ou à la conservation du poisson.

L'article 10, emprunté au nouveau modèle pour les usines à établir sur les cours d'eau navigables ou flottables, est relatif à l'établissement d'échelles à poissons.

Cet article ne devra être employé que dans les cas et après l'accomplissement des formalités prévues par la loi du 31 mai 1865 sur la pêche.

L'article 11 s'applique aux scieries sur lesquelles le service des forêts doit être consulté, et aux usines situées dans la zone frontière soumise à l'exercice des douanes.

Cette réserve est formulée en termes généraux, et sans entrer dans le détail des prescriptions spéciales à chaque industrie, de manière à éviter la nécessité de procéder à la revision du règlement d'eau, en cas de changement de destination de l'usine.

L'insertion de cette clause ne dispensera pas d'ailleurs de prendre l'avis du conservateur des forêts ou du directeur des douanes, ainsi que le prescrit la circulaire du 23 octobre 1851.

L'article 12, relatif au curage, reproduit la formule qui a été rendue obligatoire par une circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 20 avril 1865.

Les articles 13, 14 et 15 reproduisent, sauf quelques changements de rédaction sans importance, les articles correspondants du modèle annexé à la circulaire du 23 octobre 1851.

Le nouveau texte de l'article 16 diffère peu de l'ancien. On y a ajouté un paragraphe qui caractérise avec plus de précision la portée de l'autorisation, et une Note indique la variante à adopter pour les anciennes usines fondées en titre.

On a enfin conservé, pour l'article 17 et dernier, la formule qui a été rendue obligatoire par la circulaire déjà rappelée de M. le Ministre des travaux publics du 20 avril 1865, mais on a jugé utile d'y remplacer le mot *autorisation* par le mot *règlement*, et d'y réserver l'intérêt de la salubrité publique en même temps que celui de la police et de la répartition des eaux, conformément à la jurisprudence du Conseil d'Etat.

Maintien des prescriptions de la circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 27 juillet 1852. — Je ne vois rien à ajouter, Monsieur le Préfet, aux instructions que M. le Ministre des travaux publics vous a adressées le 27 juillet 1852 pour l'exécution du premier décret du 25 mars 1852 sur la décentralisation administrative, et je ne puis que maintenir ces instructions, auxquelles vous devrez continuer à vous conformer.

Usines métallurgiques. — Je vous rappelle qu'en vertu de la loi du 9 mai 1866, les usines métallurgiques sont rentrées dans le droit commun, sous le rapport du régime hydraulique, ainsi que M. le Ministre des travaux publics vous l'a fait connaître par une circulaire du 26 juillet 1866.

Conférences. — La circulaire du 23 octobre 1851 renferme, au paragraphe intitulé : *Envoi aux ingénieurs*, la recommandation suivante :

« Sur les cours d'eau qui, sans être une dépendance du domaine « public, servent à l'alimentation d'un canal ou qui sont soumis à « un régime particulier dans l'intérêt de la navigation, aucune per- « mission ne peut être accordée sans que les ingénieurs chargés du « canal ou de la navigation aient été consultés. Il convient que, « dans l'examen des affaires relatives à ces cours d'eau, les ingé- « nieurs des deux services entrent directement en conférence et « procèdent conformément aux instructions qui leur ont été adres- « sées par la circulaire du 12 juin 1850. »

Aujourd'hui que le service hydraulique est rattaché à mon Département, ces conférences s'imposent avec encore plus de force que par le passé, et je vous invite à y recourir toutes les fois que les circonstances le comporteront.

Quand ces conférences auront eu lieu, vous voudrez bien d'ailleurs surseoir à statuer et me transmettre le dossier de l'affaire, afin que je puisse me concerter au préalable avec M. le Ministre des travaux publics, et vous adresser, au besoin, des instructions spéciales.

Plans et nivellements. — MM. les Ingénieurs devront continuer à dresser les plans et nivellements nécessaires à l'instruction de chaque affaire, conformément au programme annexé à la circulaire du 23 octobre 1851.

Toutefois, par dérogation à ce programme et conformément à la circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 23 février 1880, les nivellements devront être rapportés à un plan de comparaison *inférieur*, et en même temps, toutes les fois que cela sera possible, au *niveau de la mer*.

Niveau de la retenue. — La circulaire du 23 octobre 1851 prévoit le cas où le bief est ouvert à mi-côte et elle stipule que les terrains riverains inférieurs au bief doivent alors être protégés soit par des berges naturelles, soit par des digues artificielles ayant au moins $0^m,30$ de hauteur au-dessus de la retenue.

Il n'échappera pas à MM. les Ingénieurs que ces digues artificielles ne peuvent être prescrites que sur les terrains appartenant à l'usinier, et que l'Administration n'a pas le droit de les imposer sur des terrains appartenant à des tiers, à moins du consentement formel et écrit de ceux-ci.

Ouvrages régulateurs. — La circulaire du 23 octobre 1851 porte que toute retenue doit être accompagnée, sauf des exceptions très rares et qui devront être motivées d'une manière spéciale par MM. les Ingénieurs, d'un déversoir de superficie et de vannes de décharge destinées à livrer passage aux eaux de crues.

J'insiste pour que toute dérogation à cette règle générale soit justifiée avec le plus grand soin, et je vous prie, Monsieur le Préfet, d'en faire l'objet, dans vos arrêtés, d'un considérant spécial et motivé.

Barrages sur les rivières torrentielles. — La circulaire du 23 octobre 1851 renferme les instructions suivantes :

« Sur les rivières torrentielles fortement encaissées, il est sou-
« vent inutile d'établir des vannes de décharge en vue d'assurer
« l'écoulement des crues. Il suffit, dans ce cas, de fixer la hauteur
« et la longueur du barrage, de manière à n'apporter dans la situa-
« tion des propriétés riveraines aucun changement qui leur soit
« préjudiciable ; s'il paraissait nécessaire d'empêcher l'exhausse-
« ment du fond du lit ou de se ménager les moyens de vider le bief,
« on se bornerait à prescrire l'établisssement de vannes de fond ou
« même d'une simple bonde. »

L'exhaussement du fond du lit peut présenter de graves inconvénients, et lorsque cette éventualité sera à redouter, MM. les Ingénieurs devront, à l'avenir, stipuler les mesures nécessaires pour la prévenir.

L'établissement de vannes de fond peut ne constituer qu'un palliatif insuffisant sur les rivières qui charrient beaucoup de détritus en temps de crue et, dans ce cas, il semble utile, soit de rendre le barrage mobile sur une partie de sa longueur, en y ménageant des pertuis qui seraient fermés par des poutrelles, des aiguilles ou des vannes, soit de le construire assez légèrement pour qu'il puisse être facilement emporté par les crues, en totalité ou en partie.

Je me borne à cette indication générale, et je laisse à MM. les Ingénieurs le soin de proposer et de justifier, dans chaque cas, les mesures que leur suggérera l'étude approfondie du régime de la rivière.

Délivrance des autorisations. — Je vous rappelle, Monsieur le Préfet, qu'aux termes de la circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 7 avril 1875 concertée avec M. le Ministre des finances, les expéditions des arrêtés préfectoraux portant règlement d'eau, qui seront remises ou notifiées administrativement aux intéressés, doivent être délivrées sur papier timbré.

Récolement. — Il vous appartient, ainsi que M. le Ministre des travaux publics vous l'a fait connaître par une circulaire du 25 février 1863, de prononcer, sur le vu des procès-verbaux de récolement dressés par MM. les Ingénieurs, la réception définitive des travaux, lorsqu'ils ont été exécutés conformément aux prescriptions des arrêtés que vous avez rendus.

M. le Ministre des travaux publics vous avait dispensé, dans ce cas, de lui adresser le procès-verbal de récolement.

Je crois utile de retirer cette dispense et je vous prie de vouloir bien, à l'avenir, m'adresser toujours une expédition du procès-verbal de récolement, de même que vous m'adressez une expédition de l'arrêté d'autorisation. (Circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 27 juillet 1852.)

Je pourrai ainsi mieux suivre la marche des affaires et exercer plus facilement le contrôle dont je suis chargé par l'article 6 du décret de décentralisation du 25 mars 1852.

Revision des règlements. — Je vous rappelle enfin, Monsieur le Préfet, qu'aux termes de la circulaire du 23 octobre 1851, vous devez toujours me consulter avant de procéder à une instruction nouvelle ayant pour objet la modification des règlements existants.

Cette règle a été rappelée par une circulaire de M. le Ministre des travaux publics du 7 août 1857, dont je maintiens les prescriptions.

Application du nouveau modèle aux prises d'eau industrielles, d'irrigation ou d'alimentation. — Le nouveau modèle que je vous envoie est spécial aux règlements d'usines ; mais la très grande majorité de ses articles peut convenir également à la préparation des arrêtés concernant les autres prises d'eau.

MM. les Ingénieurs auront donc à s'en inspirer, comme ils le faisaient du modèle n° 5 joint à la circulaire du 23 octobre 1851, lorsqu'ils auront à vous soumettre des propositions pour l'autorisation, sur les cours d'eau non navigables ni flottables, de prises d'eau industrielles, d'arrosage, d'irrigation, de submersion ou d'alimentation.

On remplacera, dans ce cas, à l'article 1er, les mots : *l'usage de la force motrice que le sieur...... est autorisé à emprunter ou emprunte*, par ceux-ci : *l'usage de la prise d'eau que le sieur...... est autorisé à pratiquer ou pratique.*

Prises d'eau d'irrigation.— La circulaire ministérielle du 23 octobre 1851 a fixé les règles à suivre pour la détermination du niveau légal de la retenue d'une usine, et elle porte que la différence entre ce niveau légal et les points les plus déprimés des terrains qui s'égouttent directement dans le bief, ou la *revanche,* doit être au moins de $0^{m},16$.

Lorsqu'un barrage d'usine est utilisé pour des irrigations et que ces irrigations ont lieu d'une manière intermittente, par période de 48 heures au plus par semaine, on peut autoriser les irrigants à relever, au moyen de hausses, le niveau légal pendant les périodes

d'irrigation, à la condition de réserver aux terrains riverains une revanche d'au moins $0^m,08$.

Pour les barrages destinés uniquement à des irrigations, il convient de distinguer deux cas : celui où les eaux doivent être tendues au niveau légal d'une manière continue et permanente, et celui où les eaux ne doivent être relevées au niveau légal que d'une manière discontinue et intermittente par périodes de 48 heures au plus par semaine.

La revanche doit, dans le premier cas, être fixée à $0^m,16$ au moins et, dans le second cas, elle peut être réduite, sans toutefois être inférieure à $0^m,08$.

Les barrages pour irrigations doivent, autant que possible, être mobiles sur une longueur égale au débouché linéaire de la rivière lorsqu'on supprime le déversoir et les vannes de décharge, et il convient de stipuler que, en dehors des périodes d'irrigation, les appareils de fermeture (poutrelles, aiguilles ou vannes) doivent être enlevés ou levés au-dessus des plus hautes eaux et les vannes de prise d'eau hermétiquement fermées.

Le mode de jouissance et la répartition des eaux soulèvent des questions compliquées et délicates, sur lesquelles la jurisprudence n'est pas encore fixée; et je dois, dès lors, me borner à appeler votre attention sur ces questions qui ne peuvent, dans l'état actuel de la urisprudence, donner lieu qu'à des décisions d'espèce.

Prises d'eau d'alimentation des villes et communes. — Le droit de dériver d'une rivière non navigable ni flottable l'eau nécessaire à son alimentation ne peut être conféré à une ville ou à une commune que par un décret rendu après enquête, qui déclare l'utilité publique de l'entreprise et fixe le volume d'eau à dériver.

Mais ce décret ne peut être rendu et l'enquête elle-même ne doit être ouverte qu'après une instruction préalable faite par les soins de mon Département en vue d'apprécier l'influence de la prise d'eau projetée sur les intérêts dont la garde m'est confiée et d'établir les conditions à stipuler si cette prise d'eau comporte un barrage ou des dispositions spéciales exigeant un règlement d'eau.

Nous avons en conséquence, M. le Ministre de l'intérieur et moi, arrêté de concert les mesures suivantes :

La demande de la commune sera d'abord communiquée pour instruction et avis à MM. les Ingénieurs du service hydraulique.

Cette demande sera instruite, d'une manière complète, dans les formes prescrites par la circulaire ministérielle du 23 octobre 1851, si la prise d'eau projetée comporte un barrage ou des dispositions spéciales exigeant un règlement d'eau.

Dans les autres cas, on se bornera à la soumettre à la première enquête de vingt jours, qui pourra même être supprimée si elle est jugée inutile.

Il n'y aura pas lieu, d'ailleurs, d'exiger que la commune justifie qu'elle est propriétaire des rives dans l'emplacement du barrage projeté et du sol sur lequel les autres ouvrages devront être exécutés, ou qu'elle produise le consentement écrit du propriétaire de ces terrains.

MM. les Ingénieurs du service hydraulique joindront au dossier ainsi constitué un avis motivé en ce qui touche le volume d'eau à dériver, notamment au point de vue des intérêts qui me sont confiés, et vous m'adresserez ce dossier, avec votre avis personnel.

Si je vous autorise à donner suite à l'affaire en ce qui concerne la dérivation à opérer sur le cours d'eau, vous pourrez alors faire procéder à l'enquête d'utilité publique, après avoir joint s'il y a lieu, au dossier préparé en vue de cette enquête, une copie du projet du règlement d'eau dressé par les Ingénieurs du service hydraulique, et vous renverrez le dossier ainsi complété à M. le Ministre de l'Intérieur.

M. le Ministre de l'Intérieur se concertera avec moi pour la présentation du décret à intervenir, après avoir pris, s'il le juge utile, l'avis de M. le Ministre des travaux publics sur les dispositions techniques du projet de distribution d'eau ; et quand ce décret sera notifié, mais seulement alors, vous sanctionnerez, s'il y a lieu, par l'arrêté qu'il vous appartient de prendre aux termes des décrets de décentralisation, le projet de règlement d'eau dressé par MM. les Ingénieurs du service hydraulique.

Prises d'eau d'alimentation des canaux de navigation et des gares de chemins de fer. — Une procédure analogue devra être suivie pour les prises d'eau d'alimentation des canaux de navigation et des gares de chemins de fer.

Ces prises d'eau sont implicitement autorisées par la loi ou le décret qui a déclaré l'utilité publique du canal ou du chemin de fer dont elles constituent un accessoire obligé, et il reste à en fixer l'emplacement et l'importance.

C'est à M. le Ministre des travaux publics qu'il appartient d'approuver les projets d'alimentation des canaux de navigation et des gares de chemins de fer, après avoir soumis ces projets, s'ils entraînent des expropriations. à l'enquête du titre II de la loi du 3 mai 1841 ; mais il doit, avant de statuer, se concerter avec moi, quand la prise d'eau est faite dans un cours d'eau non navigable ni flotta-

ble, et nous avons, dans ce but, arrêté d'un commun accord les mesures suivantes :

Les projets dont il s'agit seront d'abord communiqués, pour instruction et avis, à MM. les Ingénieurs du service hydraulique.

Cette instruction sera faite d'une manière complète, dans les formes prescrites par la circulaire ministérielle du 23 octobre 1851, si la prise d'eau projetée comporte un barrage ou des dispositions spéciales exigeant un règlement d'eau, et on y joindra un procès-verbal de conférences entre les ingénieurs du service hydraulique et les ingénieurs du service du canal ou du contrôle du chemin de fer, procès-verbal qui trouvera sa place naturelle entre la première et la deuxième enquête.

Dans les autres cas, on se bornera à la première enquête de vingt jours, qui pourra même être supprimée si elle est jugée inutile.

MM. les Ingénieurs du service hydraulique joindront au dossier ainsi constitué un avis motivé en ce qui touche le volume d'eau à dériver, notamment au point de vue des intérêts qui me sont confiés, et vous adresserez ce dossier, avec votre avis personnel, à M. le Ministre des travaux publics, qui me le communiquera et auquel je le renverrai, après examen, avec mon avis.

S'il est reconnu qu'il peut être donné suite à l'affaire, M. le Ministre des travaux publics fera procéder alors, en cas d'expropriation, à l'enquête du titre II de la loi du 3 mai 1841, et le dossier préparé en vue de cette enquête devra comprendre, s'il y a lieu, une copie du projet de règlement d'eau dressé par MM. les Ingénieurs du service hydraulique.

Dans tous les cas, M. le Ministre des travaux publics statuera, après s'être concerté avec moi, et vous attendrez l'approbation du projet avant de prendre, s'il y a lieu, votre arrêté réglementaire.

J'adresse un exemplaire de cette circulaire à M. l'Ingénieur en chef de votre département, en le priant de m'en accuser réception.

MINISTÈRE
de
L'AGRICULTURE

DÉPARTEMENT
d
—
COMMUNE
d
—
RIVIÈRE
d
—
USINE
du sieur

(Les mots et parties de mots indiqués en caractères romains devront être reproduits dans les formules imprimées, à la place même qu'ils occupent dans le présent modèle.

Les mots en italique. qui ne sont pas entre parenthèses, devront être écrits à la main toutes les fois qu'ils trouveront leur application.

Les mots ou phrases en italique et entre parenthèses ne doivent pas être reproduits.)

—

(On enverra quatre exemplaires du présent arrêté dans chacune des communes où il devra être publié).

MODÈLE N° 1

ANNEXÉ A LA CIRCULAIRE DU 26 DÉCEMBRE 1881.

RÈGLEMENT D'EAU.

ENQUÊTE N° .

Nous, Préfet du département d

Vu *la pétition présentée par le sieur* .
le 18 , *tendant à*

Vu les lois des 12-20 août 1790, 6 octobre 1791 et l'arrêté du gouvernement du 19 ventôse an VI ;

Vu l'instruction ministérielle du 19 thermidor an VI et les circulaires du 16 novembre 1834, du 23 octobre 1851 et du 26 décembre 1884,

Arrêtons ce qui suit :

Art. 1. Pendant jours, du au les pièces ci-dessus visées resteront déposées au secrétariat de la mairie de la commune d ainsi qu'un registre destiné à recevoir les observations des parties intéressées.

Art. 2. Pendant la même durée, le présent arrêté restera affiché dans les communes d tant à la principale porte de l'église qu'à celle de la mairie.

Il sera, en outre, publié à son de caisse ou de trompe.

Art. 3. A l'expiration du délai ci-dessus fixé, M. *M* les maire*s* nous renverr*ont* le présent arrêté, après avoir rempli le certificat d'autre part.

M. le Maire d y joindra, en outre, toutes les pièces de l'enquête.

Le 18 .

Le Préfet,

CERTIFICAT DU MAIRE

Le Maire de la commune d certifie que l'arrêté d'autre part a été publié et affiché dans les formes prescrites, du au

Le 18 .

MINISTÈRE
de
L'AGRICULTURE

DÉPARTEMENT
d
—
COMMUNE
d
—
RIVIÈRE
d
—
USINE
du sieur

(Les mots et parties de mots indiqués en caractères romains doivent être reproduits dans les formules imprimées à la place même qu'ils occupent dans le présent modèle.

Les mots en italique, qui ne sont pas entre parenthèses, devront être écrits à la main toutes les fois quils trouveront leur application.

Les mots ou phrases en italique et entre parenthèses ne doivent pas être reproduits).

MODÈLE N° 2

ANNEXÉ A LA CIRCULAIRE DU 26 DÉCEMBRE 1884

RÈGLEMENT D'EAU.

REGISTRE DE L'ENQUÊTE N° .

Ouvert le 18 .

Fermé le 18 .

(Un registre de ce modèle, avec une feuille double intercalaire, devra être adressé au maire de la commune dans laquelle l'enquête doit être faite, en même temps que quatre expéditions de l'arrêté qui fixe le jour de l'ouverture et la durée de cette enquête).

Les intéressés doivent inscrire ou faire inscrire leurs observations sur cette feuille, et, s'il y a lieu, sur des feuilles intercalaires de même dimension.

Le nom des signataires devra être reproduit d'une manière lisible sur la marge, en regard des observations qu'ils auront présentées.

Les observations qui auront été apportées à la mairie, rédigées sur des feuilles séparées, devront être réunies et annexées au présent registre.

CERTIFICAT D'ENQUÊTE.

Le Maire de la commune d   certifie que le présent registre est resté déposé au secrétariat de la mairie du   au
et que (1)

Le   18   .

(1) Indiquer suivant le cas :
Qu'il n'a été présenté aucune observation ;
Qu'il n'a été présenté d'autres observations que celles inscrites au registre ;
Ou bien, qu'outre les observations inscrites au registre, M.M.... ont présenté des observations écrites sur des feuilles séparées, qui sont annexées audit registre.

AVIS DU MAIRE.

AVIS DU SOUS-PRÉFET.

MINISTÈRE
de
L'AGRICULTURE

DÉPARTEMENT
d

—

COMMUNE
d

—

RIVIÈRE
d

(Les mots et parties de mots indiqués en caractères romains doivent être reproduits dans la formule imprimée à la place même qu'ils occupent dans le présent modèle.

Les mots en italique, qui ne sont pas entre parenthèses, devront être écrits à la main toutes les fois qu'ils trouveront leur application.

Les mots ou phrases en italique et entre parenthèses ne doivent pas être reproduits.

Le format du présent modèle pourra être modifié).

MODÈLE N° 3

ANNEXÉ A LA CIRCULAIRE DU 26 DÉCEMBRE 1884.

RÈGLEMENT D'EAU.

le 18 .

Monsieur le Maire,

Chargé de procéder à l'instruction *de la demande du sieur tendant à obtenir l'autorisation de*

j'ai l'honneur de vous informer que je me rendrai le 18 , à pour procéder à la visite des lieux.

Je vous prie de donner immédiatement à cet avis toute publicité, de faire connaître directement le jour, l'heure et l'objet de cette visite à toutes les personnes que cette affaire peut intéresser, soit comme riverains, soit comme arrosants, soit comme propriétaires d'usines, *et de prévenir spécialement*
M.
M.

Je vous prie également de vouloir bien vous faire représenter sur les lieux au jour et à l'heure dite, pour m'assister dans cette opération.

Recevez, Monsieur le Maire, l'assurance de ma considération distinguée.

L'Ingénieur des ponts et chaussées,

(Il doit toujours s'écouler cinq jours au moins entre le jour où la lettre, dont le modèle est ci-joint, devra parvenir au maire de la commune et le jour de la visite des lieux. Ce délai doit même être prolongé, si quelque circonstance particulière fait juger qu'il soit insuffisant.

L'ingénieur devra en outre prévenir directement le pétitionnaire, en l'invitant à mettre la rivière en bon état de curage et en lui indiquant toutes les mesures à prendre pour que la visite des lieux produise un résultat utile.

Il convoquera directement les intéressés auxquels il jugerait que cet avis ne peut parvenir en temps utile par l'intermédiaire du maire de la commune).

MINISTÈRE
de
L'AGRICULTURE

DÉPARTEMENT
d

—

COMMUNE
d

—

RIVIÈRE
d

—

USINE
du sieur

(Les mots et parties de mots indiqués en caractères romains doivent être reproduits dans les formules imprimées à la place même qu'ils occupent dans le présent modèle.

Les mots en italique, qui ne sont pas entre parenthèses, devront être écrits à la main toutes les fois qu'ils trouveront leur application.

Les mots ou phrases en italique et entre parenthèses ne doivent pas être reproduits.

On aura soin de numéroter les feuilles du procès-verbal, en ajoutant, s'il est nécessaire, des feuilles intercalaires, et de barrer les blancs).

MODÈLE N° 4

ANNEXÉ A LA CIRCULAIRE DU 26 DÉCEMBRE 1884.

RÈGLEMENT D'EAU.

PROCÈS-VERBAL DE VISITE DES LIEUX.

Le mil huit cent

Nous, soussigné, ingénieur des ponts et chaussées,

Vu *la pétition présentée par le sieur*
le *18* , *tendant à*

Vu les pièces de l'enquête à laquelle *cette pétition* a été soumise conformément à l'arrêté de M. le Préfet en date du

Vu le renvoi qui nous a été fait de ces diverses pièces par M. l'Ingénieur en chef, le

Nous sommes rendu pour procéder à la visite des lieux.

Par lettre en date du nous avions fait connaître à M. le Maire de la commune d
l'époque et l'objet de cette visite, en le priant de donner à cet avis toute publicité *et de prévenir notamment* :
M.
M.

Nous avions nous-même prévenu directement :
M.
M.

Étaient présents :

M. le Maire , qui nous a déclaré s'être conformé à l'invitation contenue dans notre lettre ;

M. *propriétaire de l'usine supérieure ;*

M. *propriétaire riverain.*

Et en présence des personnes susdénommées,

Nous avons fait connaître l'objet de notre visite et les circonstances qui l'ont précédée.

(*Indiquer ici si le pétitionnaire maintient ou modifie sa demande*).

Repère provisoire.

Nous avons choisi pour repère provisoire auquel seraient rattachées nos opérations :

(Indiquer ici par un croquis le détail des constructions sur lesquelles se trouve ce repère et la position qu'il occupe par rapport à d'autres points faciles à retrouver.)

Description des lieux

Et nous avons constaté ce qui suit :

(*Indiquer les usines entre lesquelles se trouve celle dont il s'agit.*

Faire connaître si elle est établie sur une dérivation de la rivière, et, dans ce cas, le point où les eaux sont détournées et celui où elles sont ramenées à leur cours naturel.

Désigner l'emplacement des ouvrages existants qui composent la retenue et indiquer s'ils sont appuyés sur les propriétés de l'usinier ou sur des terrains assujettis à supporter cette servitude).

Niveau de la retenue

(*Faire connaître si, le jour de l'opération, la rivière était convenablement curée et si le débit de la rivière était dans son état moyen.*

Faire tendre les eaux au niveau habituel de la retenue, rattacher au repère provisoire le niveau de ces eaux immédiatement en amont et en aval du barrage ; expliquer comment elles se comportent par rapport aux gués, à l'usine supérieure et aux propriétés riveraines.

Si l'usinier demande une augmentation de chute, faire, s'il est possible, de nouvelles expériences en maintenant les eaux à la nouvelle hauteur.

Si les intéressés réclament au contraire un abaissement de la retenue sur un point déterminé, faire, s'il se peut, apprécier par une expérience directe quel devrait être l'abaissement correspondant près du barrage pour obtenir le résultat demandé.

Il sera souvent utile de faire connaître les variations qu'on observe dans la hauteur des eaux lorsque les vannes de décharge, étant complètement ouvertes, la rivière est rendue autant que possible, à son écoulement naturel).

Ouvrages existants.

(*Constater le débouché des ouvrages existants, tels que barrages, déversoirs, pertuis, vannes de décharge, vannes motrices.*

Rapporter au repère provisoire la hauteur des seuils et le dessus des vannes, ainsi que la crête des déversoirs).

Observations des parties.

Nous avons ensuite engagé les parties intéressées à présenter leurs observations.

(*Ici sont consignées les observations qui seraient produites. L'ingénieur les rédige, en les faisant signer par les parties, à moins que celles-ci n'expriment le désir de les rédiger elles-mêmes*).

Et après avoir déclaré qu'il serait procédé ultérieurement, s'il y a lieu, au complément des opérations, nous avons donné lecture du présent procès-verbal aux personnes présentes que nous avons invitées à le signer avec nous.

(*Mentionner ici les personnes qui n'auraient pas voulu signer ni déduire les motifs de leur refus*).

Et nous avons clos le présent procès-verbal.

Date du jour de l'opération :

Signature du Maire,

Signature de l'Ingénieur,

MINISTÈRE
de
L'AGRICULTURE

DÉPARTEMENT
d

COMMUNE
d

RIVIÈRE
d

USINE
du sieur

(Les mots et parties de mots indiqués en caractères romains doivent être reproduits dans la formule imprimée, à la place même qu'ils occupent dans le présent modèle.

Les mots en italique, qui ne sont pas entre parenthèses, devront être écrits à la main toutes les fois qu'ils trouveront leur application.

Les mots ou phrases en italique et entre parenthèses ne doivent pas être reproduits.

Tous les nombres doivent être écrits en lettres et en chiffres).

MODÈLE N° 5.

ANNEXÉ A LA CIRCULAIRE DU 26 DÉCEMBRE 1884.

RÈGLEMENT D'EAU.

COURS D'EAU NON NAVIGABLE NI FLOTTABLE.

PROJET DE RÈGLEMENT.

ARTICLE PREMIER (1)

Est soumis aux conditions du présent règlement l'usage de la force motrice que le sieur
est autorisé à emprunter à la rivière de
pour la mise en jeu de
dans la commune de
département de

PROPOSITIONS DE L'INGÉNIEUR ORDINAIRE.	MODIFICATIONS PROPOSÉES PAR L'INGÉNIEUR EN CHEF.
ART. 2. Le niveau légal de la retenue est fixé à en contre-bas point pris pour repère provisoire.	

(1) (Dans le cas où il s'agira de réglementer une ancienne usine fondée en titre, on remplacera les mots *est autorisé à emprunter*, par le mot *emprunte*.)

PROPOSITIONS DE L'INGÉNIEUR ORDINAIRE.

—

ART. 3.

Le déversoir sera placé (indiquer ici l'emplacement du déversoir et spécifier s'il est formé d'une ou de plusieurs parties en laissant au permissionnaire autant de latitude que possible).

Il aura une longueur de

Sa crête sera dérasée à

en contre-bas du repère provisoire.

(S'il paraît inutile de spécifier l'emplacement du déversoir, ou s'il n'est pas possible de déterminer à l'avance la hauteur de son couronnement, on emploiera la formule suivante :)

Le déveroir aura une longueur totale de

Sa crête sera dérasée suivant le plan de pente de l'eau retenue au niveau légal, l'usine fonctionnant régulièrement et le bief étant convenablement curé.

ART. 4. (1)

Le vannage de décharge présentera une surface libre de au dessous du niveau de la retenue.

Pourront être conservées les vannes de décharge actuelles qui présentent ensemble une surface libre de savoir : (Indiquer ici l'emplacement, la largeur, la hauteur au-dessous du niveau de la retenue, la surface libre de chacune des vannes de décharge qui peuvent être conservées).

Les vannes nouvelles qui seront construites, pour obtenir le débouché ci-dessus fixé, auront leur seuil à en contre-bas du repère provisoire, de telle sorte, que si le permissionnaire conserve toutes les vannes de décharge actuelles, le vannage neuf devra présenter une largeur libre totale de

S'il veut, au contraire, modifier tout ou partie des vannes actuelles, il devra leur substituer un vannage de même surface et dont le seuil soit placé au niveau ci-dessus fixé.

Le sommet de toutes les vannes sans exception sera dérasé, comme la crête du déversoir, dans le plan de la retenue.

Elles seront disposées de manière à pouvoir être facilement manœuvrées et à se lever au-dessus du niveau des plus hautes eaux.

ART. 5.

Les canaux de décharge seront disposés de manière à embrasser, à leur origine, les ouvrages auxquels ils font suite, et à écouler toutes les eaux que ces ouvrages peuvent débiter.

ART. 6.

(Indiquer ici, s'il y a lieu, les dispositions accessoires).

MODIFICATIONS PROPOSÉES PAR L'INGÉNIEUR EN CHEF

—

(1) (L'article 4 comprend un certain nombre de dispositions qui supposent la réglementation d'une usine déjà existante, et qui, dès lors, doivent être supprimées dans le cas de réglementation d'une usine nouvelle à établir).

Art. 7. — Il sera posé, près de l'usine, aux frais du permissionnaire, en un point qui sera désigné par l'ingénieur chargé de dresser le procès-verbal de récolement, un repère définitif et invariable du modèle adopté dans le département.

Ce repère, dont le zéro indiquera seul le niveau légal de la retenue, devra toujours rester accessible aux agents de l'Administration qui ont qualité pour vérifier la hauteur des eaux et visible aux tiers intéressés.

Le permissionnaire ou son fermier sera responsable de la conservation du repère définitif, ainsi que de celle des repères provisoires jusqu'à la pose du repère définitif.

Art. 8. — Dès que les eaux dépasseront le niveau légal de la retenue, le permissionnaire ou son fermier sera tenu de lever les vannes de décharge pour maintenir les eaux à ce niveau. Il sera responsable de la surélévation des eaux, tant que les vannes ne seront pas levées à toute hauteur.

En cas de refus ou de négligence de sa part d'exécuter cette manœuvre en temps utile, il y sera pourvu d'office et à ses frais, à la diligence du maire de la commune, et ce sans préjudice de l'application des dispositions pénales encourues et de toute action civile qui pourrait lui être intentée à raison des pertes et dommages résultant de ce refus ou de cette négligence.

Art. 9. — Les eaux rendues à la rivière devront être dans un état de nature à ne pas apporter à la température ou à la pureté des eaux un trouble préjudiciable à la salubrité publique, à la santé des animaux qui s'abreuvent dans la rivière ou à la conservation du poisson.

Toute infraction à cette disposition, dûment constatée, pourra entraîner le retrait de l'autorisation, sans préjudice, s'il y a lieu, des pénalités encourues.

Art. 10. — (*Spécial au cas où il y aurait lieu de favoriser la migration du poisson par application de la loi du 31 mai 1866 sur la pêche*).

Le permissionnaire sera tenu d'établir et d'entretenir dans le barrage une échelle à poissons ; il devra, en outre, placer et entretenir des grillages à l'amont de la prise d'eau et à l'aval du canal de fuite.

L'échelle à poissons et les grillages seront exécutés sur les emplacements et d'après les dispositions que prescriront les ingénieurs du service hydraulique.

Art. 11. — Le permissionnaire sera tenu de se conformer aux lois et règlements du service des forêts et du service des douanes.

Art. 12. — Toutes les fois que la nécessité en sera reconnue et qu'il en sera requis par l'autorité administrative, le permissionnaire ou son fermier sera tenu d'effectuer le curage à vif fond et vieux bords du bief de la retenue dans toute l'amplitude du remous, sauf l'application des règlements ou usages locaux, et sauf le concours qui pourrait être réclamé des riverains suivant l'intérêt que ceux-ci auraient à l'exécution de ce travail.

Lesdits riverains pourront d'ailleurs, lorsque le bief ne sera pas la propriété exclusive du permissionnaire, opérer, s'ils le préfèrent, le curage eux-mêmes et à leurs frais, chacun au droit de soi et dans la moitié du lit du cours d'eau.

Art. 13. — Le permissionnaire sera tenu de se conformer à tous les règlements existants ou à intervenir sur la police, le mode de distribution et le partage des eaux.

Art. 14. — Les droits des tiers sont et demeureront expressément réservés.

Art. 15. — Les travaux ci-dessus prescrits seront exécutés sous la surveillance des ingénieurs ; ils devront être terminés dans le délai de   à dater de la notification du présent arrêté.

A l'expiration du délai ci-dessus fixé, l'ingénieur rédigera un procès-verbal de récolement, aux frais du permissionnaire, en présence de l'autorité locale et des parties intéressées dûment convoquées.

Si les travaux sont exécutés conformément à l'arrêté d'autorisation, ce procès-verbal sera dressé en trois expéditions. L'une de ces expéditions sera déposée aux archives de la préfecture ; la seconde à la mairie du lieu ; la troisième sera transmise au Ministre de l'agriculture.

Art. 16 (1).—Faute par le permissionnaire de se conformer dans le délai fixé, aux dispositions prescrites, l'Administration pourra, selon les circonstances, prononcer la déchéance du permissionnaire ou mettre son usine en chômage, et dans tous les cas elle prendra les mesures nécessaires pour faire disparaître, aux frais du permissionnaire, tout dommage provenant de son fait, sans préjudice de l'application des dispositions pénales relatives aux contraventions en matière de cours d'eau.

---

(1) (S'il s'agit d'une ancienne usine fondée en titre, on supprimera au 1er paragraphe les mots : « pourra, selon les circonstances, prononcer la déchéance du permissionnaire ou mettre son usine en chômage, et dans tous les cas, elle »)

Il en sera de même dans le cas où, après s'être conformé aux dispositions prescrites, le permissionnaire changerait ensuite l'état des lieux fixé par le présent règlement, sans y être préalablement autorisé.

Le permissionnaire pourra d'ailleurs, sans autorisation nouvelle, changer la destination de son usine, ainsi que les dispositions des ouvrages utilisant la force motrice, sauf l'application des règlements spéciaux auxquels pourrait être soumise, en raison de sa nature, la nouvelle usine.

Art. 17. — Le permissionnaire ou son fermier ne pourra prétendre à aucune indemnité ni dédommagement quelconque si, à quelque époque que ce soit, l'Administration reconnaît nécessaire de prendre dans l'intérêt de la salubrité publique, de la police et de la répartition des eaux, des mesures qui le privent, d'une manière temporaire ou définitive, de tout ou partie des avantages résultant du présent règlement, tous droits antérieurs réservés.

Dressé par l'ingénieur ordinaire soussigné.

Vérifié et présenté par l'ingénieur en chef soussigné.

MINISTÈRE
de
L'AGRICULTURE

DÉPARTEMENT
d
—
COMMUNE
d
—
RIVIÈRE
d
—
USINE
d

(Les mots et parties de mots indiqués en caractères romains doivent être reproduits dans les formules imprimées, à la place même qu'ils occupent dans le présent modèle.
Les mots en italique, qui ne sont pas entre parenthèses, devront être écrits à la main toutes les fois qu'ils trouveront leur application.
Les mots en italique et entre parenthèses ne doivent pas être reproduits).

MODÈLE N° 6

ANNEXÉ A LA CIRCULAIRE DU 26 DÉCEMBRE 1884.

RÈGLEMENT D'EAU.

PROCÈS-VERBAL DE RÉCOLEMENT.

L mil huit cent

Nous, soussigné, ingénieur des ponts et chaussées,

Vu *l'arrêté du* *portant règlement de l'usine du sieur* *et notifié audit sieur le*

Vu notamment l'article portant que les travaux prescrits devront être terminés dans le délai de à dater de la notification ;

Nous sommes rendu pour procéder au procès-verbal de récolement desdits travaux.

Par lettre en date du nous avions fait connaître à M. le Maire de la commune d l'époque et l'objet de cette visite, en le priant de donner à cet avis toute publicité et de prévenir spécialement :

M. , *propriétaire de l'usine,*

M.

Nous avions nous-même prévenu directement

M. , *propriétaire de l'usine supérieure ;*

M. , *propriétaire riverain en amont de l'usine.*

Etaient présents.

M.

M.

Et en présence des personnes sus-dénommées, nous avons constaté ce qui suit :

DISPOSITIONS	
PRESCRITES	EXÉCUTÉES
(Mentionner ici, en suivant l'ordre des articles, les dispositions particulières de l'acte d'autorisation).	*(Indiquer en regard de chaque article la manière dont il y a été satisfait.* *En faisant mention de la pose du repère définif, on le rattachera à des points fixes servant de contre-repère pour en définir la position).*

Et après avoir donné lecture du procès-verbal aux personnes présentes, nous les avons invitées à le signer avec nous.

(*Ici seront apposées, dans l'ordre indiqué en tête du procès-verbal, les signatures des personnes présentes.*

Mention sera faite des personnes qui se seront retirées et de celles qui n'auraient pas voulu signer ni déduire les motifs de leur refus.)

Et nous avons clos le présent procès-verbal.

Date du jour de l'opération.

(*Signature du Maire*). (*Signature de l'Ingénieur*).

OBSERVATIONS ET AVIS

1° Si les travaux exécutés sont conformes aux dispositions prescrites, l'ingénieur en propose la réception sous la forme suivante :

« Et, ayant reconnu que les travaux exécutés sont conformes aux dispositions prescrites, nous en proposons la réception définitive.

« Le présent procès-verbal dressé en triple expédition. »

Et le préfet pourra alors prononcer l'homologation du procès-verbal dont une expédition sera en tout cas transmise au Ministre de l'Agriculture.

2° Si les travaux, sans être conformes aux dispositions prescrites, n'en diffèrent que d'une manière insignifiante et qu'il paraisse inutile de prescrire la stricte exécution de l'arrêté, l'ingénieur pourra proposer la réception par un rapport motivé, mais le préfet ne pourra prononcer cette réception qu'après y avoir été autorisé par le Ministre de l'Agriculture.

3° Si les travaux diffèrent notablement des dispositions prescrites, les ingénieurs proposeront au préfet de mettre le permissionnaire en demeure de s'y conformer dans un délai déterminé.

Si le préfet adopte ces propositions, il prendra l'arrêté de mise en demeure sans qu'il soit besoin d'en référer à l'Administration supérieure, et, à l'expiration du délai, il pourra ordonner la mise en chômage des ouvrages dommageables. Si, au contraire, le préfet n'adopte pas les propositions des ingénieurs il devra les transmettre, avec son avis particulier, au Ministre de l'Agriculture.

D. Documents relatifs à la compétence.

XI. — Décret du 13 avril 1861. — *Art.* 2. — Les préfets statueront désormais, sans l'autorisation du ministre de l'agriculture, du commerce et des travaux publics, mais sur l'avis ou la proposition des ingénieurs en chef sur les divers objets dont suit la nomenclature :

1° Autorisation, sur les cours d'eau navigables ou flottables, des prises d'eau faites au moyen de machines, et qui, eu égard au volume du cours d'eau, n'auraient pas pour effet d'en altérer sensiblement le régime ;

2° Autorisation des établissements temporaires sur les dits cours d'eau, alors même qu'ils auraient pour effet de modifier le régime ou le niveau des eaux ; fixation de la durée de la permission ;

3° Autorisation sur les cours d'eau non navigables ni flottables, de tout établissement nouveau, tel que moulin, usine, barrage, prise d'eau d'irrigation, patouillet, bocard, lavoir à mines ;

4° Régularisation de l'existence des dits établissements lorsqu'ils ne sont pas encore pourvus d'autorisation régulière ou modification des règlements déjà existants ;

5° Répartition entre l'industrie et l'agriculture des eaux des cours d'eau non navigables ni flottables, de la manière prescrite par les anciens règlements locaux.

XII. — Circulaire ministérielle du 28 décembre 1881. — Monsieur le Préfet, un décret du 14 novembre dernier a fait passer le service hydraulique des attributions du ministère des travaux publics dans celles du nouveau ministère de l'agriculture.

J'ai l'honneur de porter à votre connaissance les mesures concertées entre les deux départements pour assurer l'exécution des dispositions du décret précité et faciliter la transmission du service d'une administration à l'autre.

Le département des travaux publics conserve les attributions ci-après :

1° Concessions de prises d'eau de toute nature ; 2° Règlements d'eau d'usines ; 3° Partages d'eau ; 4° Règlements des barrages ;	Sur les canaux et cours d'eau du domaine public ;

5° Etudes de distribution d'eau dans les villes et communes ;

6° Epuration d'eau d'égoût ;

7° Travaux d'aménagement des eaux exclusivement destinées à l'alimentation ou à l'amélioration des canaux et des cours d'eau du domaine public.

Toutes les autres questions relatives au service hydraulique rentrent désormais dans les attributions du département de l'agriculture.

OBSERVATIONS SUR LES CIRCULAIRES PRÉCÉDENTES

CONCERNANT LE RÈGLEMENT DES RETENUES D'EAU

D'après les dispositions de la circulaire de 1884, reproduisant en grande partie celles de 1851, tout établissement de barrage sur un cours d'eau doit être accompagné de vannes de décharge et d'un déversoir de superficie. L'ensemble du débouché de ces ouvrages doit être suffisant pour assurer l'écoulement du débit du cours d'eau lorsqu'il coule à pleins bords. Mais il est laissé aux ingénieurs une certaine latitude pour la répartition, entre les deux ouvrages régulateurs, du débit total maximum qui doit y trouver passage. Cette répartition doit être très différente suivant le régime du cours d'eau et la manière dont les crues s'y produisent. Si l'allure de ce cours d'eau est en quelque sorte torrentielle, c'est-à-dire si les crues s'y produisent brusquement, atteignent très rapidement le débit maximum et durent peu de temps, ce qui est le caractère des cours d'eau recueillant les eaux de versants imperméables ou peu perméables, la régularisation du niveau doit être cherchée surtout au moyen d'une grande longueur du déversoir. Les vannes de décharge sont alors à peu près inutiles, la soudaineté de l'arrivée de la crue fait que rarement elles sont levées en temps utile, et la diminution également brusque du débit a souvent pour conséquence une vidange presque toujours inopportune et quelquefois nuisible du bief d'amont ; car s'il est difficile d'ouvrir les vannes juste au moment de l'arrivée de la crue, il est peut-être encore plus difficile de saisir le moment le plus opportun pour les refermer. De plus l'ouverture des vannes de décharge produit dans les

biefs des vitesses considérables qui corrodent le fond et les rives. Un grand déversoir n'a pas cet inconvénient. Quelle que soit l'époque de l'arrivée de la crue, il lui donne passage et maintient le niveau, après qu'elle est passée, à la hauteur utile.

Nonobstant, même sur ces cours d'eau torrentiels, une petite vanne de décharge, pouvant servir, en cas de besoin, à vider le bief, est utile et doit toujours être établie. Mais le déversoir doit être calculé de telle sorte qu'il puisse, seul, débiter presque tout le volume de la rivière coulant à pleins bords.

Au contraire, si le cours d'eau est d'allure tranquille, alimenté par des sources, et s'il a des crues lentes, longues et dont le débit maximum n'atteint pas un chiffre élevé en proportion du débit ordinaire, les déversoirs sont moins utiles, et les vannes de décharge doivent être prescrites de préférence. La crue arrivant lentement, laisse toujours à l'usinier la possibilité de les manœuvrer en temps opportun, et la décroissance des eaux se faisant aussi progressivement, la fermeture des orifices de décharge peut suivre la variation du débit et s'effectuer de telle sorte que le bief reste toujours rempli. Bien que la construction d'un déversoir soit alors à peu près inutile et que la dépense puisse en être économisée, il est bon cependant que les vannes soient complétées par un pareil ouvrage, qui peut être très court, et qui a simplement pour but de parer aux négligences possibles de l'usinier et de les rendre moins préjudiciables aux riverains.

Ainsi, en résumé, suivant que le cours d'eau aura une allure torrentielle ou tranquille, que ses crues seront brusques et de courte durée ou bien progressives et longues, c'est-à-dire suivant que le cours d'eau sera alimenté par des versants à peu près imperméables, ou bien au contraire par des terrains perméables contenant des sources, les ouvrages régulateurs devront consister en un grand déversoir de superficie, avec une petite vanne de décharge, ou bien au contraire en un petit déversoir avec des vannes de décharge de grande di-

mension. Suivant que le cours d'eau à régler se rapprochera plus ou moins de l'un de ces deux types extrêmes,on donnera, dans la détermination des ouvrages régulateurs, la prépondérance à l'un ou à l'autre de ces ouvrages : déversoirs ou vannes de décharge.

L'exemple des barrages déjà établis sur le même cours d'eau pourra quelquefois guider les ingénieurs dans le choix qu'ils auront à faire, car fréquemment, ainsi que l'a remarqué Belgrand[1] dans les vallées supérieures affluentes de la Seine, « il est véritablement remarquable combien l'instinct « des constructeurs des anciennes usines les a admirablement « dirigés dans l'établissement de leurs prises d'eau. Tandis « que dans les terrains absorbants du Châtillonnais, les usines « ont à peine des déversoirs et que l'écoulement des crues « s'opère par quelques vannes de décharge qui n'arrêtent « point les alluvions, dans le lias de l'Auxois et les granites « du Morvan surtout, les plus misérables moulins ont d'im« menses déversoirs qui suffisent largement à l'écoulement « des crues et seulement une petite vanne de décharge pour « vider le bief en cas d'avarie, mais qui ne suffit point pour « rétablir en amont la vitesse primitive et favoriser l'érosion « des rives. »

Il va sans dire que l'exemple des usines du cours d'eau sur lequel on établit un nouveau barrage ne doit être suivi que sous bénéfice d'inventaire, mais il fournira souvent une indication utile.

Pour donner une idée de la manière dont on peut traiter la question du débouché à donner aux ouvrages régulateurs d'un barrage, je citerai deux extraits de rapports d'ingénieur ordinaire du service hydraulique, concernant deux usines sur des cours d'eau d'importance et d'allure très différente.

Le premier exemple, très simple, est relatif à un règlement d'usine sur une très petite rivière à cours tranquille. Il s'agit

1. *Annales des ponts et chaussées*, 1846, 2e semestre, page 179.

d'une usine que j'appellerai A, déjà existante, mais dont le règlement n'était pas fait. D'après le rapport de l'ingénieur : « La hauteur demandée pour le niveau légal de la retenue « correspond à la cote 190m,70, c'est-à-dire à 0m,44 en con- « tre-bas du repère provisoire.

« Il résulte des renseignements pris sur les lieux et des opé- « rations de nivellement :

« 1° Que le remous produit par la retenue demandée ne se « fera pas sentir à plus de 300 mètres en amont de l'usine et « que, dans toute cette étendue, les terrains situés sur la rive « droite ont leur égouttement dans le cours d'eau naturel qui « occupe le fond de la vallée ;

« 2° Que, parmi les terrains de la rive gauche, les parcelles « nos 109 et 110 qui présentent des dépressions à la cote « moyenne 190m,72 et la parcelle n° 112, qui appartient au « permissionnaire, s'assainissent facilement par les rigoles « dont il a été fait mention dans le procès-verbal de visite « des lieux et qui conduisent les eaux en aval de l'usine en « passant sous les bâtiments ; que les autres terrains situés « sur la même rive se trouvent à plus de 0m,60 en contrehau « du niveau demandé ;

« 3° Enfin que le bas de la roue du moulin immédiatement « supérieur est à la cote 193m,97.

En conséquence, l'Ingénieur propose de fixer le niveau légal à la cote 190m,70, demandée, à la condition :

« 1° que les digues qui longent la dérivation seront exhaus- « sées de manière à se trouver au moins à 0m,30 au-dessus du « niveau légal et présenteront une largeur de 0m,60 en cou- « ronne avec des talus réglés à 3 de base pour 2 de hauteur.

« 2° que l'entretien des rigoles d'assainissement ci-dessus « mentionnées sera à la charge de l'usinier. »

Le moulin A.... n'avait pas de déversoir. Le débit des crues de la rivière sur laquelle il est établi est évalué à 4 mètres cubes par seconde. Ce débit trouvait son écoulement par une vanne de décharge de 1m,42 de largeur et dont le seuil était

placé à $1^m,17$ en contre-bas du niveau de la retenue, c'est-à-diré à $1^m,33$ en contre-bas du niveau des eaux supposées relevées de $0^m,16$. Une pareille vanne, ouverte sur toute sa hauteur, peut être considérée, au point de vue des formules à appliquer, comme un déversoir, mais on doit reconnaître que la valeur du coefficient à appliquer ne résulte pas des expériences qui ont été faite sur ce genre d'orifices, dans lesquels le seuil forme une saillie plus ou moins prononcée sur le fond. Si, par une extension qui ne semble pas justifiée on calculait le coefficient m d'après la formule empirique (12) page 107, en y faisant $H = 1,33$ et $p = 0$, on trouverait $m = 0,63$; mais il ne semble pas, d'après le tableau des expériences de M. Bazin, que la valeur de m puisse jamais dépasser 0,50 et en appliquant cette valeur maximum à la formule (13), de la page 109, dans laquelle on fera $l = 1,42$ et par suite $\left(l - \frac{2}{10} H\right) = 1,15$, on trouvera pour le débit de l'orifice

$$Q = 0,50 \times 1,15 \times 1,33 \sqrt{2g \times 1,33} = 3^m,90.$$

D'après le calcul de l'ingénieur ordinaire dont le rapport est cité, le débit de cette vanne est évalué à $3^m,987$. Elle était donc suffisante pour écouler le volume des crues de la rivière coulant à plein bords, estimé 4 mètres cubes. Cependant, en exécution de la circulaire du 23 octobre 1851, on a imposé à l'usinier la construction d'un déversoir de trois mètres de longueur, débitant, avec une lame d'eau de $0^m,16$ d'épaisseur, un volume de 377 litres. L'addition de ce déversoir n'est d'ailleurs motivée par aucune considération spéciale, autre que les prescriptions de la circulaire ministérielle. Quant à la largeur de cet ouvrage, fixée à trois mètres, elle est déterminée simplement, dans l'espèce, par ce fait que l'usine immédiatement inférieure est munie d'un déversoir de 3 mètres de largeur. La rivière sur laquelle se trouvent ces moulins a une allure plutôt régulière que torrentielle ; elle reçoit l'eau de versants perméables, qui dans certaines parties deviennent même tourbeux: les déversoirs y sont donc à peu près inutiles, et l'instinct

des usiniers, comme l'a fait remarquer Belgrand, leur avait montré qu'ils pouvaient s'en passer. Toutefois l'addition d'un déversoir de 3 mètres de longueur, qui semble avoir été obtenue moyennant une très faible dépense, n'en est pas moins une amélioration en ce sens qu'elle rend les négligences possibles de l'usinier moins préjudiciables aux riverains.

L'usine B.... qui me fournira un second exemple est située sur une rivière X.... plus importante que la précédente. Ici encore, il s'agit du règlement d'une usine existante.

Le moulin B...., situé sur la rive gauche de la rivière X..., est muni, en amont, de deux déversoirs ayant chacun une longueur de 18 mètres. La crête du premier est arasée à des niveaux variables de 82,55 à 82,73, le second à des niveaux compris entre les cotes 82,79 et 82,85. Il comporte en outre deux vannes de décharge dont une ne peut être manœuvrée et l'autre présente une largeur de 2^m,05 et a son seuil à la cote 81,86. En été le meunier a l'habitude de relever le premier déversoir au niveau du second.

Sur la rive gauche, les prairies, d'ailleurs peu étendues, ne descendent pas au-dessous de la cote 82,99 ; sur la rive droite on trouve des points cotés bien plus bas (82,73, etc.) mais ils ont un égouttement facile vers l'aval au moyen d'un grand fossé d'assainissement.

La moindre largeur de la rivière X..., fixée après enquête régulière par arrêté préfectoral, est, dans cette partie, de 22 mètres.

De cette description de l'état des lieux, l'ingénieur conclut que le niveau légal de la retenue peut être fixé à la cote 82,81 qui est sensiblement l'altitude moyenne de la crête du second déversoir. Reste à déterminer les dimensions des ouvrages régulateurs, d'après le débit des crues.

« Le débit des pleines rives, dit l'Ingénieur dans son rap-
« port, celui qui doit fixer les dimensions des ouvrages régu-
« lateurs, est assez difficile à établir..... Le véritable débit des
« pleines rives varie beaucoup suivant les points et dépend

« presque uniquement de la disposition des lieux, de l'encais-
« sement du lit, de la largeur de la vallée. En somme, vu l'é-
« tendue et la faible hauteur des prairies qui se trouvent par-
« ticulièrement sur la rive droite, en amont du moulin B.....,
« il paraît convenable d'évaluer ce débit à 40 mètres cubes, en
« admettant d'ailleurs (les berges dépassant beaucoup la cote
« 83,10) qu'il passe 0m,30 d'eau sur les ouvrages régulateurs
« arasés à la cote 82,81 au moment du débit des pleines rives,
« cotées alors 83,11. »

« La chute moyenne étant de 1m,00, on a, d'après les formu-
« les de Poncelet et Lesbros, et les tableaux de coefficients qu'ils
« ont donnés :

« 1° Pour la 2e vanne, la seule qui fonctionne régulièrement:

« $Q = 0{,}625 \times 2{,}05 \times 1{,}45 \times \sqrt{2g \times 0{,}50} =$ 5mc819

« 2° Pour le 1er déversoir, arasé à une cote
« moyenne de 82,64 :

« $Q = 0{,}36 \times 18{,}00 \times 0{,}47 \times \sqrt{2g \times 0{,}47} =$ 9mc247

« 3° Pour le 2e déversoir, arasé au niveau
« légal, 82,81 :

« $Q = 0{,}36 \times 18{,}00 \times 0{,}30 \times \sqrt{2g \times 0{,}30} =$ 4mc716

« Soit un débit total de 19mc782

« Ainsi, il s'en faut de plus de 20 mètres cubes, exactement
« 20mc218, que les ouvrages de décharge actuels puissent débiter
« le débit des pleines rives de la rivière. Il est donc bien certain
« que la présence de l'usine relève considérablement le niveau
« des crues en amont et hâte par suite le débordement, car la
« largeur et la profondeur du lit de la rivière sont tels que le
« chiffre de 40mc que j'ai admis est plutôt au-dessous de la vé-
« rité. La différence est malheureusement tellement grande
« que, malgré la réserve commandée à l'administration en de
« tels cas, il est impossible de ne pas prescrire la construction
« de vannage de décharge supplémentaires capables de débi-
« ter les 20mc218 pour lesquels les ouvrages actuels sont in-

« suffisants. Il faudra, pour cela, un vannage présentant, au-
« dessous de la cote 83,11 des eaux de pleines rives, un dé-
« bouché superficiel total de $\frac{20.218}{1.9575}$, le débit étant de
« $9,625 \times \sqrt{2g \times 0,50} = 1^{mc}9575$ par mètre carré, soit de
« $10^{mq}328$ ou, en nombre rond, de 10 mètres carrés.....

« Il résulte de ces calculs qu'il y a lieu de prescrire la cons-
« truction d'un vannage de décharge présentant une surface
« libre totale d'au moins 10^{mq} au-dessous de la cote des eaux
« de pleines rives supposées à 0,30 au-dessus du niveau légal.
« Si le permissionnaire voulait relever le premier déversoir à
« la hauteur du second, d'une façon définitive et fixe, il serait
« obligé d'accroître de $2^{mq}32$ la surface des vannes à construire,
« soit, en nombre rond, de la porter à $12^{mq}50$. »

Tout d'abord, il convient de remarquer que la rivière X..., sans être précisément torrentielle, présente des crues beaucoup plus rapides et plus brusques que celle où se trouve l'usine A..., dont il a été question auparavant; que ce caractère se trouve confirmé pour ainsi dire, ou tout au moins indiqué, par la présence de longs déversoirs (d'ensemble 36 mètres de développement) au barrage qu'il s'agit de réglementer et que, dans ces conditions, il y a à se demander, par application de ce qui a été dit plus haut, si l'augmentation du débouché, au lieu d'être obtenue par des vannes de décharge, n'aurait pas été plus utilement trouvée dans une modification ou un allongement des déversoirs. Si l'on suppose que, conformément au calcul ci-dessus, la vanne de décharge débite environ 6 mètres cubes, il reste 34 mètres cubes (le débit total étant de 40 m. c.), qui doivent trouver passage sur les déversoirs de 36 mètres de longueur totale. C'est donc environ 950 litres par mètre courant que ces ouvrages doivent débiter. Il faut, pour cela, une lame d'eau de 0 m. 66 environ d'épaisseur. Or la crête de l'un des déversoirs se trouve arasée à 0 m. 17 au-dessous du niveau de la retenue, et l'usinier rachète, en été, cette différence par des hausses mobiles qu'il enlève pendant l'hiver. Si l'on

suppose que la crête des deux déversoirs soit réglé à 0 m. 40 au-dessous du niveau de la retenue, les hausses mobiles ayant ainsi 0,40 de hauteur au lieu de 0,17 et s'étendant sur les deux déversoirs au lieu de s'appliquer à l'un d'eux seulement, l'écoulement des crues aurait été parfaitement assuré, sans que le niveau s'élevât jamais à plus de 0 m. 26 au-dessus du niveau légal.

Cette solution aurait été probablement d'une réalisation plus facile et plus simple que celle qui a été proposée par l'ingénieur, qui consiste à augmenter le vannage de décharge et qui a donné lieu, de la part du propriétaire de l'usine, à des réclamations et à des objections sérieuses. Il a prétendu, en effet, que les ouvrages existants suffisaient largement à débiter les eaux de la rivière et que le nouveau vannage pourrait, en cas de crue, causer un notable préjudice aux propriétés riveraines (probablement par la production de courants rapides). Le maire de la commune a constaté que depuis un grand nombre d'années les prairies situées en amont du moulin B... n'ont pas été inondées pendant la saison des foins, et que dès lors il ne paraît pas y avoir lieu d'apporter, aux ouvrages de décharge de cette usine, des modifications essentielles pour l'écoulement des eaux.

Il reste à examiner, en effet, si ces modifications étaient réellement utiles.

On vient de voir que le débit de 40 mètres cubes, qui paraît être celui des grandes crues, est assuré à la condition que le niveau de l'eau s'élève à 0,66 au-dessus de la crête des déversoirs, c'est-à-dire en moyenne à 0,58 au-dessus du niveau légal de la retenue (puisque l'un des déversoirs est arasé à ce niveau et l'autre à 0,17 au-dessous). Il est évident que si les crues de 40 mètres cubes ne se produisent qu'en hiver, une submersion momentanée des prairies, qui se trouveraient ainsi recouvertes d'une couche d'environ 0,25 d'épaisseur d'eau, n'aurait aucun inconvénient; bien souvent, au contraire, ces submersions hivernales sont considérées comme favorables aux prairies.

Indépendamment du colmatage qu'elles produisent par le limon que déposent les eaux, lequel est souvent fertilisant, elles ont pour effet de détruire, ou au moins d'empêcher la multiplication excessive des taupes et autres animaux nuisibles.

Il est probable que, dans cet exemple, l'ingénieur s'est cru obligé de se conformer exactement à la *lettre* du règlement qui prescrit que « le débouché des vannes de décharge doit être calculé de telle sorte que, la rivière coulant à pleins bords et étant prête à déborder, toutes les eaux s'écoulent comme si l'usine n'existait pas. »

S'il est utile et même indispensable de pouvoir écouler les crues d'été sans que le niveau s'élève au-dessus des berges de la rivière, il n'en est pas de même pour les crues d'hiver, lorsque le cours d'eau est bordé de prairies ; et c'est à tort, à mon sens, que l'on appliquerait uniformément les règles précédentes à toutes les crues et à toutes les rivières. Il serait à désirer que, dans chaque cas particulier, les ingénieurs ne craignissent pas de laisser de côté ce que ces règles ont de trop étroit, en motivant sérieusement les dérogations qu'ils y proposeraient. L'administration est d'ailleurs disposée, malgré le caractère impératif de la prescription qui vient d'être rappelée, à autoriser ces exceptions, car, dans la circulaire de 1884, M. le ministre de l'Agriculture insiste pour que toute dérogation à cette règle générale soit justifiée avec le plus grand soin, et il demande aux Préfets d'en faire l'objet, dans leurs arrêtés, d'un considérant spécial et motivé.

La circulaire du 23 octobre 1851 recommande aussi de ménager avec soin les intérêts des propriétaires, de tenir compte des ouvrages existants, de s'efforcer de les conserver, de rechercher les moyens de n'imposer aucune construction trop dispendieuse. Ces sages recommandations ne devraient jamais être perdues de vue.

EXEMPLES D'OUVRAGES CONCERNANT LES IRRIGATIONS

Les problèmes auxquels peut donner lieu l'établissement et l'usage de canaux d'irrigation sont très divers.

Celui de l'ouverture proprement dite du canal, de la pente à lui donner, des dimensions à adopter pour sa section transversale, etc., a été traité dans le § 3 du chapitre V relatif aux canaux découverts, il n'y a rien de particulier à y ajouter ici.

Un autre problème est celui de la répartition des eaux entre les divers intéressés.

Cette répartition peut se faire en attribuant, à chacun d'eux, la jouissance de toutes les eaux du canal pendant un temps déterminé. Voici par exemple comment est distribuée l'eau du canal de Thuir, ou canal royal, créé en 1427 et qui arrose 1346 hectares dans la plaine de Perpignan [1].

Les communes d'Ill et de Neffiach jouissent de l'eau pendant 24 heures à partir du dimanche à 5 heures du matin.

Millias, pendant 24 heures à partir du lundi, 5 heures du matin.

Saint-Filin d'amont, pendant 31 heures à partir du mardi, 5 heures du matin.

Soler, pendant 24 heures à partir du mercredi, à midi.

Thuir, pendant 17 heures à partir du jeudi, à midi.

Canohès et Toulougas, pendant 24 heures à partir du vendredi, à 5 heures du matin.

1. *La petite culture,* par Gustave Heuzé. Paris, 1891. Dans l'Encyclopédie agricole et horticole de M.-C. Lechalas.

Perpignan, pendant 24 heures à partir du samedi, à 5 heures du matin.

Mais ce mode de répartition ne s'applique ordinairement qu'aux canaux secondaires ; il est souvent nécessaire de partager d'une façon permanente le volume d'eau suivant des proportions déterminées.

Partout où l'on peut disposer d'une petite chute, l'appareil partiteur le plus exact est le déversoir. Si, sur le contour d'un bassin, on place deux déversoirs dont les crêtes sont exactement arasées à la même hauteur, les débits seront à très peu près proportionnels aux longueurs de ces ouvrages (en négligeant la petite correction due à la contraction latérale), et ils resteront proportionnels quelle que soit la variation du niveau.

Souvent le problème n'est pas aussi simple et se complique de conditions particulières. Il peut arriver, par exemple, que l'un des deux participants doive recevoir un volume d'eau déterminé. On règle alors quelquefois le débit au moyen d'une vanne de prise d'eau placée à l'entrée du canal; souvent aussi le débit se mesure par des orifices d'une section déterminée auxquels on donne le nom de *modules* et qui sont différents dans les diverses régions.

Ces modules, ou orifices de dimensions constantes, ne donnent le débit en vue duquel ils sont établis qu'autant qu'ils fonctionnent sous une charge d'eau déterminée. Si la charge augmente ou diminue, le débit de l'orifice varie dans le même sens. Cependant, dans bien des régions, le débit se règle par modules, c'est-à-dire par la grandeur seule des orifices et l'on ne semble tenir aucun compte de la charge.

Dans le Roussillon, par exemple, d'après M. Heuzé, on évalue le volume d'eau par *meule* ou *œil*. Un œil est une ouverture circulaire faite dans une dalle que l'on place dans la berge du canal. D'après les renseignements qui m'ont été donnés par M. Sorel, ingénieur à Perpignan, l'œil a rarement moins de $0^m,20$ et rarement plus de $0^m,30$ de diamètre. Un œil de 9 pouces $0^m,25$ de diamètre est réputé fournir le volume d'eau désigné,

dans les anciens titres, sous le nom de meule. D'après M. Heuzé, un œil d'une meule, c'est-à-dire fournissant le volume d'eau nécessaire à mouvoir une meule de moulin, suffit à l'irrigation de 32 à 33 hectares.

On comprend combien peut être différent le débit d'un pareil orifice suivant qu'il est placé plus ou moins au-dessous du niveau d'amont. Ce mode de mesurage ne peut donc être recommandé lorsque le niveau est variable ; mais il peut, au contraire donner des résultats satisfaisants si, d'une manière quelconque, par un déversoir régulateur, par exemple, le niveau se trouve maintenu à très peu près constant.

Je vais donner deux exemples d'ouvrages partiteurs ainsi établis, dont je dois la communication à l'obligeance de M. Sorel.

Parmi les usagers de l'eau de la rivière du Tech se trouve le moulin Vilar, qui, d'après ses titres, a droit à un volume de 600 litres d'eau. Sur la berge du canal qui l'alimente, on a construit un déversoir A (fig. 126) dont la crête est arasée à 0m60 au-dessus du plafond BC et qui sert à régulariser le niveau. Le canal est barré, un peu en aval du déversoir régulateur A par un autre déversoir DEFH, dont la crête EF se trouve à 0m47 au-dessous du niveau de celle A du premier et dont la largeur EF est de 1m00. Dans ces conditions, lorsque le niveau, dans le canal, atteint la crête A du déversoir régulateur, le déversoir alimentaire EF débite les 600 litres par seconde auxquels a droit le moulin Vilar. Le niveau ne peut d'ailleurs s'élever beaucoup au-dessus de la crête du déversoir régulateur, car le canal d'amenée a des dimensions et une pente telles qu'il ne peut guère débiter plus des 600 litres dont il s'agit, et dans ces conditions, la longueur du déversoir régulateur, qui est de 20 mètres, aurait pu être beaucoup réduite sans inconvénient. D'une manière générale, la longueur du déversoir régulateur doit être calculée de manière qu'il puisse

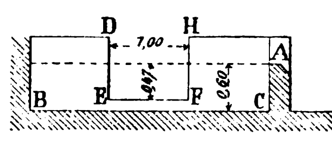


Fig. 126.

livrer passage à l'excédent possible du débit sans surélévation notable.

Si, par exemple, les dimensions du canal d'amenée étaient telles que, dans les conditions ordinaires, il pût débiter un mètre cube, il faudrait que le déversoir régulateur livrât passage à 1000 — 600 = 400 litres par seconde et, pour cela, une longueur de 10 mètres aurait pu être motivée, puisqu'un déversoir débite environ 20 litres par seconde avec une tranche d'eau de 0,05 d'épaisseur. La dimension du déversoir alimentaire aurait pu être diminuée, ou le niveau de sa crête exhaussé en conséquence de cette surélévation de 0,05, considérée comme normale.

Voici un autre exemple un peu plus compliqué, et qui peut servir de type dans beaucoup de circonstances; c'est l'ouvrage régulateur du canal des Albères, dérivé aussi de la rivière du Tech.

Ce canal doit laisser aux arrosants inférieurs un volume d'eau de 1509 litres (y compris les 600 litres pris et rendus par le moulin Vilar) avant de recevoir l'eau de la rivière.

Voici les dispositions adoptées dans ce but (fig. 127).

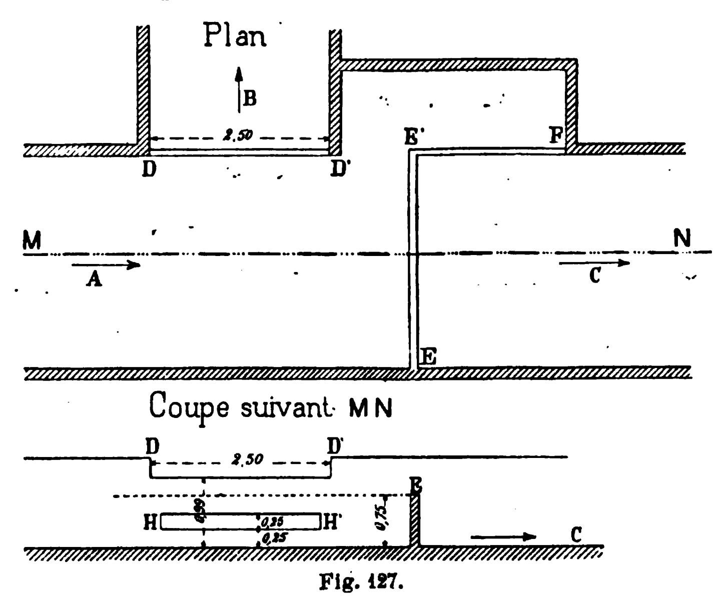


Fig. 127.

A est le canal d'amenée des eaux, B est le canal des arrosants inférieurs ou canal de fuite et C est l'origine du canal des Albères : à l'origine du canal B des arrosants inférieurs se trouve un déversoir DD′ de 2m50 de longueur et dont la crête est à 0,99 au-dessus du fond du canal, et, au-dessous de la crête de ce déversoir, un orifice de jauge rectangulaire HH′ de 0,25 de hauteur et 2m23 de longueur, placé à 0,25 au-dessus du fond. Le canal des Albères ne peut recevoir que l'eau qui passe au-dessus d'un déversoir EE′F, de 6,75 de longueur, dont la crête est à 0,75 au-dessus du fond du canal d'amenée. Dans ces conditions, si le niveau de l'eau affleure la crête E du déversoir alimentaire, le canal des Albères ne reçoit rien, et les arrosants inférieurs reçoivent, par l'orifice de jauge HH′, un volume de $0{,}62 \times 2.23 \times 0{,}25 \times \sqrt{2g \times 0{,}375} = 936$ litres environ qui, ajoutés aux 600 litres environ rendus par le moulin Vilar, leur donnent largement les 1509 litres auxquels ils ont droit avant que le canal des Albères reçoive rien.

Lorsque le niveau du canal d'amenée atteint celui de la crête du déversoir régulateur DD′, le canal des Albères reçoit par une tranche de 0,24 d'épaisseur et de 6m75 de longueur un volume de 1405 litres environ. Il a droit à 1200 litres.

Alors, le débit de l'orifice de jauge HH′, au lieu de 936 litres, devient 1199 litres. Les arrosants inférieurs reçoivent donc en trop $1199 + 600 - 1509 = 290$ litres, soit 19 p. °/₀, tandis que le canal des Albères reçoit en trop seulement $1405 - 1200 = 205$ litres, ou 17 p. °/₀. Il se trouve donc un peu moins bien partagé que les arrosants inférieurs dans la répartition de l'excédant de débit del a rivière.

Il serait d'ailleurs très difficile de réaliser exactement le partage des excédants proportionnellement aux dotations. Par exemple lorsque le niveau, dans le canal d'amenée, s'élève à 0,05 au-dessus du déversoir régulateur DD′, le canal des Albères reçoit une tranche d'eau de 0,29, soit environ 1863 litres, ou 663 litres en trop, ou encore une proportion de 1,55 de sa dotation normale 1200 litres.

Les arrosants inférieurs reçoivent alors par l'orifice de jauge :

$$0,62 \times 2,23 \times 0,25 \times \sqrt{2g \times 0,665} = \quad 1248 \text{ litres}$$

par le déversoir régulateur :

$$0,40 \times 2,50 \times 0,05 \times \sqrt{2g \times 0,05} = \quad 49$$

par le moulin Vilar : 600 litres

ou en totalité : 1897 litres

au lieu de 1509 qui constituent leur dotation normale ; la proportion n'est que 1,26 environ. Ils se trouvent donc bien moins avantagés que le canal des Albères.

On arriverait à une répartition plus équitable, ou plus proportionnelle aux dotations, en allongeant le déversoir régulateur DD'. En réalité les différences ou inégalités théoriques qui viennent d'être signalées se trouvent atténuées dans une forte proportion par les pertes à travers les barrages. C'est sans doute la raison pour laquelle le projet d'allongement du déversoir n'a pas été exécuté.

On aurait pu aussi régulariser le débit de l'orifice de jauge HH' en le plaçant à un niveau plus bas. Si, par exemple, il était abaissé de 0^m50, la charge sur le centre de cet orifice serait de 0,875 lorsque l'eau commence à entrer dans le canal des Albères ; elle deviendrait 1^m115 lorsque l'eau affleure le déversoir régulateur : le débit ne varierait donc que dans le rapport de $\sqrt{\frac{1,115}{0,875}} = 1,11$, tandis qu'avec le dispositif adopté, la variation des débits est dans le rapport de $\sqrt{\frac{0,615}{0,375}} = 1,28$. Sur un débit normal de 909 litres, la variation ne serait que de $909 \times 0,11 = 100$ litres au lieu de $909 \times 0,28 = 254$ litres.

Le fonctionnement de ces appareils suppose que l'orifice débouche à l'air libre et n'est jamais noyé. Il faut pour cela que le canal inférieur soit toujours convenablement entretenu, et il faut surtout que la chute ou perte de charge que nécessitent ces ouvrages régulateurs ait été prévue dans les projets de canaux, ce qui souvent est omis. On se trouve alors extrê-

mement gêné pour les établir ; la chute qu'ils exigent ne peut se trouver que par une réduction de la pente des canaux inférieurs, et cette réduction peut être la cause d'envasements qui les obstruent et maintiennent l'eau d'aval à un niveau supérieur à celui de l'orifice.

Les déversoirs exigent beaucoup moins de chute que les orifices de jauge, car un orifice ne peut guère avoir moins de 0^m20 de hauteur et il faut que son bord supérieur soit au moins à une profondeur de 0^m20 au-dessous du niveau d'amont. Il est même bien préférable, au point de vue de la régularité du débit, que cette profondeur soit plus grande. Pour qu'un orifice de jauge puisse être établi, il est donc nécessaire de disposer d'une chute d'au moins $0^m,40$ et il vaut mieux avoir beaucoup plus. Tandis que pour établir un déversoir, et pour que sa crête ne soit pas noyée, il suffit d'une différence de niveau égale à l'épaisseur de la lame déversante, qui peut être réduite à 0^m20 ou 0^m25, et même au-dessous.

Je donnerai encore comme exemple l'ouvrage construit pour le partage des eaux attribuées au canal de Rondole, dans la vallée de l'Eyne. Le volume de ces eaux est fixé par l'article 1er du décret du 28 décembre 1879 ainsi conçu : « Les eaux de « la rivière d'Eyne seront partagées entre cette rivière et le « canal de Rondole dans la proportion de 1/3 pour la rivière « et 2/3 pour le canal. Toutefois le volume attribué au canal « ne pourra, dans aucun cas, dépasser le chiffre de 300 litres « par seconde ».

L'eau est amenée dans un bassin de partage A (fig. 128) dont elle sort par deux déversoirs BB' et CC' placés en face l'un de l'autre sur le même axe, ayant l'un dix mètres et l'autre cinq mètres de longueur. Une vanne V sert à vider le bassin, qui a un mètre de profondeur au dessous des crêtes des déversoirs. Sur le canal HH' est établi, en EF un orifice de jauge précédé d'un déversoir KK' de 5 mètres de longueur, dont la crête est à $0^m,70$ au dessus du fond du canal. L'orifice de forme rectangulaire EE'F'F a $0^m,37$ de largeur et $0^m,50$ de

hauteur, son arête supérieure est à 0m,10 au dessous du déversoir K.

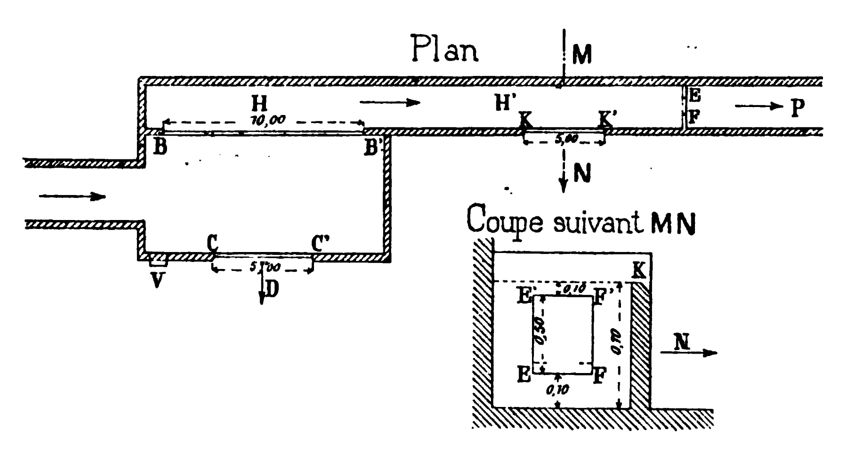


Fig. 128.

Lorsque l'eau affleure ce déversoir, l'orifice débite $0,62 \times 0,37 \times 0,50 \times \sqrt{2g \times 0,35} = 300$ litres environ. Si le niveau de l'eau s'élève à 0m,05 plus haut, le débit s'élève à la vérité à 320 litres au lieu de 300, mais le déversoir KK' donne alors 100 litres environ, et le déversoir CC' donne $\frac{1}{2}(320+100) = 210$ litres. La rivière d'Eyne où se réunissent les eaux de ces deux déversoirs reçoit donc en totalité 310 litres. Avec une alimentation aussi abondante, il importe peu que le canal de Rondole reçoive 20 litres de plus que sa dotation ; tous les besoins sont largement pourvus.

On aurait pu arriver, si cela avait été utile, à un débit un peu plus constant pour ce canal, en donnant à l'orifice EE'F'F une forme rectangulaire plus large et moins haute, et en laissant toujours son arête inférieure à 0m,60 au-dessous de la crête du déversoir K. Si, par exemple, on ne lui avait donné qu'une hauteur de 0m,20, au lieu de 0m,50, la charge sur son centre aurait été de 0m,50. Il aurait fallu que sa largeur fût portée à 0m,77 au lieu de 0m,37, mais alors une surélévation

de $0^m,05$ du niveau aurait augmenté la charge sur le centre de $\frac{1}{10}$ seulement. Le débit se serait trouvé être de $300\sqrt{\frac{55}{50}}$, soit 312 litres environs tandis que, avec la disposition adoptée, la même surélevation porte la charge de $0^m,35$ à $0^m,40$ et augmente le débit dans le rapport de $\sqrt{\frac{40}{35}}$ ce qui le porte à 320 litres environ.

La variation n'a, dans l'espèce, aucune importance, et ce qui vient d'être dit n'est destiné qu'à servir d'exemple.

On indique quelquefois, comme appareil destiné à régulariser le débit d'un orifice, la disposition suivante usitée dant le module milanais. L'eau à débiter s'écoule par un premier orifice O (fig. 129) percé dans une paroi verticale BC ; elle est reçue dans un bassin rectangulaire dans la paroi DE duquel, en face de la la première ouverture O, se trouve percé un autre orifice plus petit, O′. L'eau se maintient, dans le bassin, à un niveau MM′ intermédiaire entre celui d'amont AA′ et celui du centre des orifices O et O′.

Désignons par H la chute nette dont on dispose, c'est-à-dire la hauteur à laquelle le niveau d'amont peut être placé au-dessus du centre O′ de l'orifice d'écoulement, par h la hauteur, au-dessus de ce même orifice, du niveau de l'eau dans le

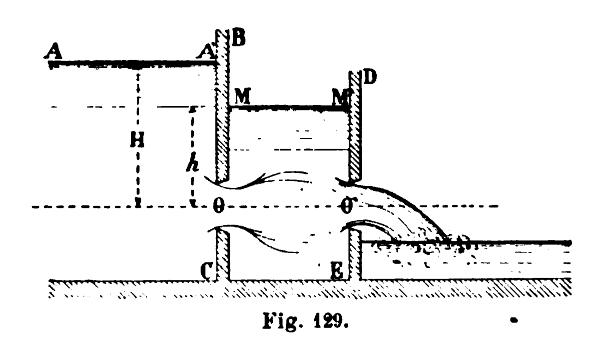


Fig. 129.

bassin intermédiaire, par ω et ω' les superficies des deux orifices et par m le coefficient de contraction, supposé le même

pour les deux. Le régime permanent étant établi, le volume Q écoulé dans l'unité de temps par l'orifice O sera:

$$Q = m\omega \sqrt{2g(H - h)}.$$

Le même volume devra passer en même temps par l'orifice O', on devra donc avoir aussi :

$$Q = m\omega' \sqrt{2gh}.$$

D'où, en éliminant h :

$$Q = m \frac{\omega\omega'}{\sqrt{\omega^2 + \omega'^2}} \sqrt{2gH} = m\omega_1 \sqrt{2gH}.$$

Le débit est le même que si, sous la charge donnée H, l'écoulement s'effectuait par un orifice ayant une superficie ω_1 égale à $\frac{\omega\omega'}{\sqrt{\omega^2 + \omega'^2}}$; et cela quelle que soit la hauteur totale H. Il ne se trouve donc en aucune façon régularisé, lorsque le niveau d'amont varie. La véritable manière de régulariser le débit consiste à donner à la charge H sur l'orifice, la plus grande valeur possible : pour une même variation ΔH de charge, la variation proportionnelle du débit sera :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \Delta H . \frac{1}{2H}$$

c'est-à-dire qu'elle sera inversement proportionnelle à la charge H. Dans chaque cas particulier on obtient pour H la plus grande valeur possible en plaçant le centre de l'orifice le plus près possible du niveau d'aval, ce qui conduit à adopter des orifices très larges, mais d'une faible hauteur.

Lorsqu'on ne peut disposer d'aucune chute, le problème de la division du débit d'un canal en deux ou plusieurs parties devient beaucoup plus difficile, et voici comment on peut le résoudre lorsque ces parties doivent être égales entre elles.

Alors, à la suite d'un élargissement A (fig. 130) du canal d'amenée formant bassin d'une forme régulière et rectiligne, on ouvre des canaux parallèles, BC, BC..., en nombre égal à celui

des parts à obtenir, aussi exactement que possible égaux entre eux dans toutes leurs parties et que l'on prolonge en ligné droite aussi loin qu'on le peut. L'égalité du volume débité par chacun

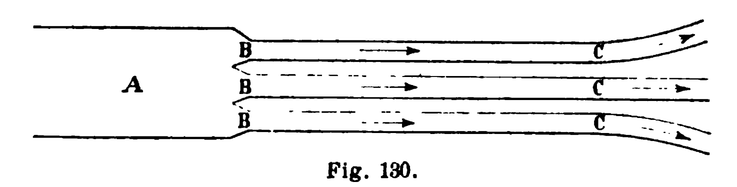


Fig. 130.

de ces canaux sera d'autant plus exactement obtenue que leur longueur commune BC sera plus grande. La vitesse de l'eau dans chacun d'eux est influencée par l'état de la partie située en aval, lequel se traduit, au point de vue de l'écoulement, par une hauteur déterminée du niveau à l'extrémité C ; ce niveau étant d'autant plus bas que les conditions de l'écoulement en aval sont plus faciles. Toutefois si, comme nous le supposons, la forme de ces canaux au point C est rendue invariable, de telle sorte que leurs sections transversales s'y retrouvent toujours égales, la différence de niveau d'un canal à l'autre ne pourra y être très grande, et si les canaux BC sont assez longs, la pente superficielle restera sensiblement la même dans chacun d'eux, quelles que soient ces différences de niveau au point C; les différences de pentes seront d'autant plus faibles que la longueur BC sera plus grande.

Lorsque les parts doivent être inégales, on se contente souvent, comme approximation, d'opérer de la même manière et de donner aux canaux partiteurs, avec une profondeur commune, des largeurs proportionnelles aux volumes qu'ils doivent débiter. Ce n'est évidemment qu'une solution imparfaite, car la vitesse de l'eau, qui dépend du rayon moyen, n'est pas la même dans ces canaux de largeur différente.

On obtiendrait un résultat plus approché en tenant compte de cette variation du rayon moyen, ce qui peut se faire simplement comme il suit. Appelons Q et Q′ les débits des deux canaux et soit donné le rapport $\frac{Q}{Q'}$. Supposons que les deux

canaux à ouvrir doivent avoir des sections transversales rectangulaires de largeurs l, l' et de même profondeur h ; soit I leur pente commune. Nous pouvons adopter, comme première approximation, la proportionnalité de la largeur aux débits, écrire $\frac{l'}{l} = \frac{Q'}{Q}$, et, avec les largeurs approximatives ainsi calculées, déterminer, d'après la nature des parois des canaux et leurs rayons moyens $\frac{lh}{l+2h}$ et $\frac{l'h}{l'+2h}$, les valeurs des coefficients d'écoulement. Appelons b et b' ces deux valeurs qui seront fournies par les tables. Les équations du mouvement seront :

$$\frac{lh}{l+2h}\,\mathrm{I} = b\,\frac{Q^2}{l^2h^2} \quad \text{et} \quad \frac{l'h}{l'+2h}\,\mathrm{I} = b'\,\frac{Q'^2}{l'^2h^2}.$$

Divisons ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{l'^3}{l^3} = \frac{b'Q'^2}{bQ^2}\,\frac{l'+2h}{l+2h};$$

équation du troisième degré en l' qui servira à trouver la valeur de cette inconnue, si l'on y suppose données l et h. Pour la résoudre, on peut, avec une approximation suffisante, remplacer, dans le second membre, l'inconnue l' par la valeur approchée $l' = \frac{Q'l}{Q}$. On trouve alors :

$$\frac{l'}{l} = \frac{Q'}{Q}\sqrt{\frac{b'\left(l + 2h\,\frac{Q}{Q'}\right)}{b\,(l+2h)}}.$$

Pour que la largeur ainsi trouvée donne le débit Q' désiré, il faut que les canaux de largeur l et l' soient assez longs, comme il a été dit pour le cas du partage en parties égales.

On établirait facilement une formule analogue pour le cas où les canaux partiteurs, au lieu d'être rectangulaires, auraient une section en forme de trapèze.

TABLES NUMÉRIQUES

TABLE I

Hauteurs *h* correspondant aux vitesses *v*

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

v	*h*	*v*	*h*
0m,10	0m,0005	4m,10	0m,86
0 20	0 002	4 20	0 90
0 30	0 005	4 30	0 94
0 40	0 008	4 40	0 99
0 50	0 013	4 50	1 03
0 60	0 018	4 60	1 08
0 70	0 025	4 70	1 13
0 80	0 033	4 80	1 17
0 90	0 041	4 90	1 22
1 00	0 051	5 00	1 27
1 10	0 062	5 10	1 33
1 20	0 073	5 20	1 38
1 30	0 086	5 30	1 43
1 40	0 100	5 40	1 49
1 50	0 115	5 50	1 54
1 60	0 130	5 60	1 60
1 70	0 147	5 70	1 66
1 80	0 165	5 80	1 71
1 90	0 184	5 90	1 77
2 00	0 204	6 00	1 84
2 10	0 225	6 10	1 90
2 20	0 247	6 20	1 96
2 30	0 270	6 30	2 02
2 40	0 294	6 40	2 09
2 50	0 319	6 50	2 15
2 60	0 345	6 60	2 22
2 70	0 372	6 70	2 29
2 80	0 400	6 80	2 36
2 90	0 429	6 90	2 43
3 00	0 459	7 00	2 50
3 10	0 490	7 10	2 57
3 20	0 522	7 20	2 64
3 30	0 555	7 30	2 72
3 40	0 589	7 40	2 79
3 50	0 624	7 50	2 87
3 60	0 661	7 60	2 94
3 70	0 698	7 70	3 02
3 80	0 736	7 80	3 10
3 90	0 775	7 90	3 18
4 00	0 816	8 00	3 26

TABLE I bis

Vitesses *v* dues à une hauteur donnée *h*

$$v = \sqrt{2gh}$$

h	*v*	*h*	*v*
0m,0001	0m,044	0m,045	0m,940
0 0002	0 063	0 050	0 990
0 0003	0 077	0 055	1 039
0 0004	0 089	0 060	1 085
0 0005	0 099	0 065	1 129
0 0006	0 108	0 070	1 172
0 0007	0 117	0 075	1 213
0 0008	0 125	0 080	1 253
0 0009	0 133	0 090	1 329
0 0010	0 140	0 100	1 401
0 0012	0 153	0 11	1 468
0 0015	0 171	0 12	1 534
0 0020	0 198	0 13	1 597
0 0025	0 221	0 14	1 657
0 0030	0 243	0 15	1 715
0 0035	0 262	0 16	1 77
0 0040	0 280	0 18	1 88
0 0045	0 297	0 20	1 98
0 0050	0 313	0 22	2 08
0 0060	0 343	0 24	2 17
0 007	0 370	0 26	2 26
0 008	0 395	0 28	2 34
0 009	0 420	0 30	2 43
0 010	0 443	0 35	2 62
0 011	0 464	0 40	2 80
0 012	0 485	0 45	2 97
0 013	0 505	0 50	3 13
0 014	0 524	0 55	3 28
0 015	0 542	0 60	3 43
0 016	0 560	0 65	3 57
0 018	0 594	0 70	3 71
0 020	0 626	0 75	3 84
0 022	0 657	0 80	3 96
0 024	0 686	0 90	4 20
0 026	0 714	1 00	4 43
0 028	0 741	1 20	4 85
0 030	0 767	1 50	5 42
0 032	0 792	2 00	6 26
0 035	0 829	3 00	7 67
0 040	0 886	4 00	8 86

TABLE II

Débits approximatifs Q d'un déversoir par mètre de longueur
(calculés par la formule $Q = 1{,}77\,H\,\sqrt{H}$)

H	Q	H	Q
0m01	1lit8	0m41	465 lit
0,02	5 0	0,42	481
0,03	9 2	0,43	499
0,04	14 3	0,44	517
0,05	19 8	0,45	534
0,06	26 0	0,46	552
0,07	32 8	0,47	570
0,08	40	0,48	589
0,09	48	0,49	607
0,10	56	0,50	626
0,11	65	0,52	665
0,12	74	0,54	702
0,13	83	0,56	742
0,14	93	0,58	782
0,15	103	0,60	823
0,16	113	0,62	864
0,17	124	0,64	908
0,18	135	0,66	949
0,19	146	0,68	992
0,20	158	0,70	1.040
0,21	170	0,72	1.080
0,22	183	0,74	1.130
0,23	195	0,76	1.170
0,24	208	0,78	1.220
0,25	221	0,80	1.270
0,26	235	0,85	1.390
0,27	248	0,90	1.510
0,28	262	0,95	1.640
0,29	276	1,00	1.770
0,30	291	1,05	1.900
0,31	306	1,10	2.040
0,32	320	1,15	2.180
0,33	335	1,20	2.330
0,34	351	1,25	2.470
0,35	366	1,30	2.620
0,36	382	1,40	2.930
0,37	398	1,50	3.250
0,38	415	1,70	3.920
0,39	431	1,80	4.270
0,40	447	2,00	5.010

TABLE III

Valeurs du rapport $\frac{J}{Q^2}$ de la perte de charge J au carré du débit Q d'un tuyau de conduite :

1° d'après les coefficients de Darcy pour les tuyaux en fonte avec dépôts;
2° d'après la formule de M. Robert Manning n° 80).

DARCY				ROBERT MANNING			
D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$
0,01	116.790.000	0,29	1,744	0,01	61.730.000	0,29	0,979
0,015	11.696.000	0,30	1,468	0,015	7.100.000	0,30	0,818
0,02	2.333.500	0,31	1,243	0,02	1.531.300	0,31	0,686
0,025	680.350	0,32	1,058	0,025	466.000	0,32	0,580
0,03	250.400	0,33	0,905	0,03	176.130	0,33	0,492
0,04	52.592	0,34	0,778	0,04	37.950	0,34	0,419
0,05	15.891	0,35	0,672	0,05	11.550	0,35	0,359
0.06	6.026	0,36	0,582	0,06	4.367	0,36	0,309
0,07	2.669	0,37	0,507	0,07	1.920	0,37	0,267
0,08	1.323	0,38	0,443	0,08	942	0,38	0,232
0,09	714,7	0,39	0,388	0,09	503	0,39	0,201
0,10	412,7	0,40	0,341	0,10	286,50	0,40	0,1762
0,11	251,5	0,42	0,267	0,11	172,30	0,42	0,1360
0,12	160,2	0,45	0,188	0,12	108,30	0,45	0,0941
0,13	105,9	0,48	0,136	0,13	70,70	0,48	0,0662
0,14	72,3	0,50	0,1106	0,14	47,60	0,50	0,0536
0,15	50,7	0,52	0,0907	0.15	33,00	0,52	0,0435
0,16	36,4	0,55	0,0684	0,16	23,40	0,55	0,0322
0,17	26,6	0,60	0,0441	0,17	16,92	0,60	0,0203
0,18	19,9	0,65	0,0294	0,18	12,46	0,65	0,01323
0,19	15,06	0,70	0,0203	0,19	9,34	0,70	0,00891
0,20	11,59	0,75	0,01433	0,20	7,11	0,75	0,00616
0,21	9,03	0,80	0,01035	0,21	5,48	0,80	0,00437
0,22	7,12	0,85	0,00763	0,22	4,28	0,85	0,00316
0,23	5,67	0,90	0,00573	0,23	3,37	0,90	0,00233
0,24	4,57	0,95	0,00436	0,24	2,69	0,95	0,00175
0,25	3,71	1,00	0,00337	0,25	2,16	1,00	0,00133
0,26	3,04	1,05	0,00264	0,26	1,75	1,05	0,00102
0,27	2,51	1,10	0,00209	0.27	1,43	1,10	0,00080
0,28	2,08	1,20	0,00135	0,28	1,18	1,20	0,00040

TABLE IV

Vitesses en mètres par seconde	Débits en litres par seconde dans une conduite d'un diamètre de :					
	Petits diamètres					
	0^{m},06	0^{m},08	0^{m},10	0^{m},12	0^{m},15	0^{m},20
0^{m},10	0^{lit}2827	0^{lit}5027	0^{lit}7854	1^{lit}1310	1^{lit}7671	3^{lit}1416
0 20	0 5655	1 0053	1 5708	2 2620	3 5343	6 2832
0 30	0 8482	1 5080	2 3562	3 3929	5 3014	9 4248
0 40	1 1310	2 0106	3 1416	4 5239	7 0686	12 5664
0 50	1 4137	2 5133	3 9270	5 6549	8 8357	15 7080
0 60	1 6965	3 0159	4 7124	6 7859	10 6029	18 8495
0 70	1 9792	3 5186	5 4978	7 9168	12 3700	21 9911
0 80	2 2620	4 0212	6 2832	9 0478	14 1372	25 1327
0 90	2 5447	4 5239	7 0686	10 1788	15 9043	28 2743

	Diamètres moyens					
	0^{m},25	0^{m},30	0^{m},35	0^{m},40	0^{m},50	0^{m},60
0^{m},10	4^{lit}909	7^{lit}069	9^{lit}621	12^{lit}566	19^{lit}635	28^{lit}274
0 20	9 817	14 137	19 242	25 133	39 270	56 549
0 30	14 726	21 206	28 863	37 699	58 905	84 823
0 40	19 635	28 274	38 484	50 265	78 540	113 098
0 50	24 544	35 343	48 105	62 832	98 175	141 372
0 60	29 452	42 412	57 727	75 398	117 810	169 646
0 70	34 361	49 480	67 348	87 965	137 444	197 921
0 80	39 270	56 549	76 969	100 531	157 079	226 195
0 90	44 178	63 617	86 590	113 097	176 814	254 470

	Grands diamètres					
	0^{m},70	0^{m},80	0^{m},90	1^{m},00	1^{m},10	1^{m},20
0^{m},10	38^{lit}48	50^{lit}27	63^{lit}62	78^{lit}54	95^{lit}03	113^{lit}10
0 20	76 97	100 53	127 23	157 08	190 07	226 20
0 30	115 45	150 80	190 85	235 62	285 10	339 29
0 40	153 94	201 06	254 47	314 16	380 13	452 39
0 50	192 42	251 33	318 09	392 70	475 17	565 49
0 60	230 91	301 59	381 70	471 24	570 20	678 59
0 70	269 39	351 86	445 32	549 78	665 23	791 68
0 80	307 88	402 12	508 94	628 32	760 27	904 78
0 90	346 36	452 39	572 56	706 86	855 30	1017 88

TABLE IV bis

Débits en litres par seconde	Vitesses moyennes en mètres par seconde dans une conduite d'un diamètre de :					
	Petits diamètres					
	$0^m,06$	$0^m,08$	$0^m,10$	$0^m,12$	$0^m,15$	$0^m,20$
1 lit	0,35368	0,19894	0,12732	0,08842	0,05659	0,03183
2	0,70735	0,39789	0,25465	0,17684	0,11318	0,06366
3	1,06103	0,59683	0,38197	0,26526	0,16976	0,09549
4	1,41471	0,79577	0,50930	0,35368	0,22635	0,12732
5	1,76838	0,99471	0,63662	0,44210	0,28294	0,15916
6	2,12206	1,19366	0,76394	0,53051	0,33953	0,19099
7	2,47574	1,39260	0,89127	0,61893	0,39612	0,22282
8	2,82942	1,59154	1,01859	0,70735	0,45270	0,25465
9	3,18309	1,79049	1,14592	0,79577	0,50929	0,28648
	Diamètres moyens					
	$0^m,25$	$0^m,30$	$0^m,35$	$0^m,40$	$0^m,50$	$0^m,60$
10 lit	0,20372	0,14147	0,10394	0,07958	0,05093	0,03537
20	0,40744	0,28294	0,20788	0,15915	0,10186	0,07073
30	0,61115	0,42441	0,31181	0,23873	0,15279	0,10610
40	0,81487	0,56588	0,41575	0,31831	0,20372	0,14147
50	1,01859	0,70735	0,51969	0,39789	0,25465	0,17684
60	1,22231	0,84882	0,62363	0,47746	0,30558	0,21221
70	1,42603	0,99029	0,72757	0,55704	0,35651	0,24757
80	1,62974	1,13176	0,83150	0,63662	0,40744	0,28294
90	1,83346	1,27323	0,93544	0,71619	0,45836	0,31831
	Grands diamètres					
	$0^m,70$	$0^m,80$	$0^m,90$	$1^m,00$	$1^m,10$	$1^m,20$
100 lit	0,25984	0,19894	0,15719	0,12732	0,10523	0,08842
200	0,51969	0,39789	0,31438	0,25465	0,21045	0,17684
300	0,77953	0,59683	0,47157	0,38197	0,31568	0,26526
400	1,03938	0,79577	0,62876	0,50930	0,42090	0,35368
500	1,29922	0,99471	0,78595	0,63662	0,52613	0,44210
600	1,55906	1,19366	0,94314	0,76394	0,63136	0,53051
700	1,81891	1,39260	1,10033	0,89127	0,73658	0,61893
800	2,07875	1,59154	1,25752	1,01859	0,84181	0,70735
900	2,33870	1,79049	1,41471	1,14592	0,94703	0,79577

TABLE V

Valeurs du coefficient γ pour le calcul des tuyaux de conduite.

(Voir page 153)

D	γ	D	γ
0m,01	4.427.000	0m,33	0,271
0 015	645.000	0 34	0,235
0 02	164.500	0 35	0,205
0 025	57.100	0 36	0,179
0 03	24.000	0 37	0,157
0 04	6.100	0 38	0,139
0 05	2.100	0 39	0,123
0 06	890	0 40	0,107
0 07	430	0 41	0,097
0 08	227	0 42	0,086
0 09	130	0 43	0,077
0 10	79	0 44	0,069
0 11	50	0 45	0,062
0 12	33	0 46	0,056
0 13	22,6	0 47	0,051
0 14	15,9	0 48	0,046
0 15	11,5	0 49	0,041
0 16	8,44	0 50	0,0377
0 17	6,33	0 52	0,0313
0 18	4,83	0 55	0,0240
0 19	3,73	0 60	0,0158
0 20	2,93	0 65	0,0108
0 21	2,32	0 70	0,0076
0 22	1,86	0 75	0,0055
0 23	1,51	0 80	0,0040
0 24	1,23	0 85	0,0030
0 25	1,01	0 90	0,0023
0 26	0,84	0 95	0,0018
0 27	0,70	1 00	0,0014
0 28	0,59	1 05	0,00110
0 29	0,50	1 10	0,00089
0 30	0,43	1 20	0,00059
0 31	0,36	1 30	0,00040
0 32	0,314	1 40	0,00028

TABLE VI

Valeurs du rapport $\frac{J}{\gamma}$ et de son inverse $\frac{\gamma}{J}$ pour le calcul des tuyaux de conduite

(Voir page 153)

Q	$\frac{\gamma}{J}$	$\frac{J}{\gamma}$	Q	$\frac{\gamma}{J}$	$\frac{J}{\gamma}$	Q	$\frac{\gamma}{J}$	$\frac{J}{\gamma}$
mc. lit.			mc. lit.			mc. lit.		
0.000.10	10.000.000	0,00000 0100	0,002.00	53.000	0,00001 89	0m,040	280	0,00358
11	8.464.000	0,00000 0118	2.10	49.000	0,00002 06	45	227	0,00440
12	7.268.000	0,00000 0138	2.20	45.000	0,00002 24	50	189	0,00529
13	6.318.000	0,00000 0158	2.30	41.000	0,00002 42	55	160	0,00625
14	5.550.000	0,00000 0180	2.40	38.000	0,00002 61	60	137	0,00727
15	4.919.000	0,00000 0203	2.50	36.000	0,00002 80	65	120	0,00837
16	4.393.000	0,00000 0228	2.60	33.400	0,00002 99	70	105	0,00953
17	3.951.000	0,00000 0253	2.80	29.300	0,00003 41	75	93	0,0107
18	3.575.000	0,00000 0280	3.00	26.000	0,00003 85	80	83	0,0120
19	3.252.000	0,00000 0308	3.50	19.900	0,00005 05	90	68	0,0148
20	2.973.000	0,00000 0337	4.00	15.700	0,00006 37	0,100	56	0,0178
21	2.730.000	0,00000 0367	4.50	12.800	0,00007 81	110	48	0,0210
22	2.516.000	0,00000 0398	5.00	10.600	0,00009 43	120	41	0,0245
23	2.328.000	0,00000 0429	5.50	9.000	0,00011 1	130	36	0,0281
24	2.161.000	0,00000 0463	6.00	7.700	0,00012 9	140	31	0,0320
25	2.012.000	0,00000 0497	6.50	6.700	0,00014 9	150	28	0,0361
26	1.878.000	0,00000 0532	7.00	5.900	0,00017 0	160	24,7	0,0405
28	1.650.000	0,00000 0606	7.50	5.230	0,00019 1	170	22,2	0,0450
30	1.462.000	0,00000 0685	8.00	4.670	0,00021 4	180	20,1	0,0497
35	1.117.000	0,00000 0900	9.00	3.810	0,00026 3	190	18,3	0,0546
40	884.000	0,00000 113	0.010	3.160	0,00031 6	200	16,7	0,0599
45	719.000	0,00000 139	11	2.680	0,00037 4	210	15,35	0,0652
50	598.000	0,00000 167	12	2.300	0,00043 5	220	14,15	0,0707
55	506.000	0,00000 197	13	2.000	0,00050 0	230	13,09	0,0764
60	435.000	0,00000 230	14	1.750	0,00057 0	240	12,15	0,0822
65	378.000	0,00000 265	15	1.560	0,00064 3	250	11,31	0,0884
70	332.000	0,0000 0301	16	1.390	0,00072 0	260	10,56	0,0947
75	294.000	0,00000 340	17	1.250	0,00080 0	280	9,28	0,108
80	263.000	0,00000 380	18	1.130	0,00088 5	300	8,22	0,122
90	214.000	0,00000 469	19	1.030	0,00097 2	350	6,28	0,159
0.001.00	178.000	0,00000 562	20	940	0,00106	400	4,97	0,201
1.10	151.000	0,00000 665	21	860	0,00116	450	4,04	0,247
1.20	129.000	0,00000 775	22	796	0,00126	500	3,36	0,297
1.30	112.000	0,00000 892	23	736	0,00136	550	2,85	0.351
1.40	99.000	0,00001 01	24	683	0,00147	600	2,44	0,409
1.50	87.000	0,00001 14	25	636	0,00157	650	2,12	0,470
1.60	78.000	0,00001 28	26	594	0,00168	700	1,87	0,535
1.70	70.000	0,00001 42	28	522	0,00192	750	1,65	0,605
1.80	64.000	0,00001 57	30	462	0,00216	800	1,48	0,677
1.90	58.000	0,00001 73	35	353	0,00283	900	1,20	0,832
						1m,000	1,00	1,000

TABLE VII

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites.

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0m,06	0m,08	0m,10	0m,12	0m,15	0m,20
0mc 000lit 040	0,0000179	0,0000045	0,0000016	0,0000007	0,0000002	»
045	0,0000220	0,0000056	0,0000019	0,0000008	0,0000003	0,0000001
050	0,0000264	0,0000067	0,0000023	0,0000010	0,0000003	0,0000001
055	0,0000313	0,0000079	0,0000027	0,0000011	0,0000004	0,0000001
060	0,0000364	0,0000092	0,0000032	0,0000013	0,0000005	0,0000001
065	0,000042	0,0000106	0,0000037	0,0000015	0,0000005	0,0000001
070	0,000048	0,0000122	0,0000042	0,0000018	0,0000006	0,0000001
075	0,000054	0,0000137	0,0000048	0,0000020	0,0000007	0,0000002
080	0,000060	0,0000154	0,0000054	0,0000022	0,0000008	0,0000002
090	0,000074	0,0000189	0,0000066	0,0000027	0,0000009	0,0000002
0mc 000lit 10	0,000089	0,0000227	0,0000079	0,0000033	0,0000011	0,0000003
11	0,000105	0,0000268	0,0000094	0,0000039	0,0000014	0,0000003
12	0,000123	0,0000313	0,0000109	0,0000045	0,0000016	0,0000004
13	0,000141	0,0000359	0,0000124	0,0000052	0,0000019	0,0000005
14	0,000160	0,0000409	0,0000142	0,0000059	0,0000021	0,0000005
15	0,000181	0,000046	0,0000160	0,0000067	0,0000023	0,0000006
16	0,000203	0,000052	0,0000179	0,0000075	0,0000026	0,0000007
17	0,000225	0,000057	0,0000199	0,0000083	0,0000029	0,0000007
18	0,000249	0,000064	0,0000220	0,0000092	0,0000032	0,0000008
19	0,000274	0,000070	0,0000242	0,0000102	0,0000035	0,0000009
20	0,000300	0,000077	0,0000265	0,0000111	0,0000038	0,0000009
21	0,000327	0,000083	0,0000289	0,0000121	0,0000041	0,0000010
22	0,000356	0,000090	0,0000313	0,0000131	0,0000045	0,0000011
23	0,000382	0,000097	0,0000338	0,0000142	0,0000049	0,0000012
24	0,000412	0,000105	0,0000364	0,0000153	0,0000053	0,0000013
25	0,00044	0,000113	0,000039	0,0000164	0,0000057	0,0000014
26	0,00047	0,000121	0,000042	0,0000176	0,0000061	0,0000015
28	0,00054	0,000138	0,000048	0,0000201	0,0000069	0,0000017
30	0,00061	0,000156	0,000054	0,0000227	0,0000079	0,0000020
35	0,00080	0,000204	0,000071	0,0000298	0,0000103	0,0000026
0mc 000lit 40	0,00100	0,000257	0,000087	0,000037	0,0000130	0,0000033
0 45	0,00124	0,000316	0,000109	0,000046	0,0000160	0,0000041
0 50	0,00149	0,000379	0,000131	0,000055	0,0000192	0,0000049
0 55	0,00176	0,000447	0,000155	0,000065	0,0000226	0,0000058
0 60	0,00205	0,000522	0,000181	0,000076	0,0000263	0,0000067
0 65	0,00237	0,00060	0,000211	0,000088	0,000030	0,0000077
0 70	0,00276	0,00068	0,000244	0,000099	0,000034	0,0000088
0 75	0,00303	0,00077	0,000268	0,000112	0,000039	0,0000099
0 80	0,00339	0,00086	0,000299	0,000125	0,000044	0,0000111
0 90	0,00418	0,00107	0,000369	0,000155	0,000054	0,0000137
0mc 001lit 00	0,0050	0,00128	0,00044	0,000186	0,000064	0,0000164
1 10	0,0059	0,00151	0,00052	0,000221	0,000076	0,0000194
1 20	0,0069	0,00176	0,00061	0,000257	0,000089	0,0000227
1 30	0,0079	0,00203	0,00070	0,000295	0,000102	0,0000261
1 40	0,0090	0,00229	0,00079	0,000333	0,000116	0,0000295
1 50	0,0102	0,00259	0,00090	0,00038	0,000131	0,0000334
1 60	0,0114	0,00291	0,00101	0,00042	0,000147	0,0000375
1 70	0,0127	0,00322	0,00112	0,00047	0,000163	0,0000416
1 80	0,0140	0,00357	0,00124	0,00052	0,000180	0,0000460
1 90	0,0154	0,00393	0,00136	0,00057	0,000199	0,0000507

TABLE VII (*Suite*)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites :

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de : 0m,06	0m,08	0m,10	0m,12	0m,15	0m,20
0mc002lit 00	0,0168	0,0043	0,00149	0,00062	0,000217	0 000055
2 10	0,0184	0,0047	0,00162	0,00068	0,000236	0,000060
2 20	0,0199	0,0051	0,00176	0,00074	0,000256	0,000065
2 30	0,0215	0,0055	0,00190	0,00080	0,000277	0,000071
2 40	0,0232	0,0059	0,00205	0,00086	0,000299	0,000076
2 50	0,0249	0,0064	0 00220	0,00092	0,00032	0,000082
2 60	0,0266	0,0068	0,00235	0,00099	0,00034	0,000087
2 80	0,0304	0,0077	0,00268	0,00112	0,00039	0,000100
3 00	0,0343	0,0087	0,00303	0,00127	0,00044	0,000113
3 50	0,0450	0,0115	0,00397	0,00168	0,00058	0,000148
4 00	0,057	0,0145	0,0050	0,00211	0,00073	0,000186
4 50	0,070	0,0177	0,0061	0,00259	0,00090	0.000228
5 00	0,084	0,0214	0.0074	0,00312	0,00108	0,000276
5 50	0,099	0,0252	0,0087	0,00366	0,00128	0,000325
6 00	0,115	0,0293	0,0101	0 00426	0,00148	0,000378
6 50	0,126	0,0338	0,0117	0,0049	0,00171	0.00044
7 00	0,151	0,0386	0,0134	0,0056	0,00195	0,00050
7 50	0,170	0,0434	0,0150	0.0063	0,00219	0,00056
8 00	0,191	0,0486	0,0168	0,0071	0,00245	0.00063
9 00	»	0,0597	0,0207	0,0087	0,00301	0,00077
0mc010lit	»	0,072	0,0249	0,0104	0,0036	0.00092
11	»	0,085	0,0294	0,0124	0,0043	0,00109
12	»	0.099	0,0342	0,0143	0,0050	0,00127
13	»	0,114	0,0394	0,0166	0,0057	0,00146
14	»	0,129	0,0449	0,0189	0,0065	0,00167
15	»	0,146	0,051	0,0213	0,0074	0,00188
16	»	»	0,057	0,0238	0,0083	0,00211
17	»	»	0,063	0,0265	0,0092	0,00234
18	»	»	0,070	0,0293	0,0102	0,00259
19	»	»	0,076	0.0322	0,0112	0,00284
20	»	»	0,083	0,0350	0,0122	0,00310
21	»	»	0,091	0,0383	0,0133	0,00340
22	»	»	0,099	0,0416	0,0145	0,00369
23	»	»	0,107	0,0449	0,0157	0,00398
24	»	»	»	0,0485	0,0169	0,00430
25	»	»	»	0,052	0,0181	0,0046
26	»	»	»	0,056	0,0193	0,0049
28	»	»	»	0,063	0,0220	0,0056
30	»	»	»	0,071	0,0247	0,0063
35	»	»	»	»	0,0324	0,0083
0mc040lit	»	»	»	»	0,041	0,0105
45	»	»	»	»	0,051	0,0129
50	»	»	»	»	0,061	0,0155
55	»	»	»	»	»	0,0183
60	»	»	»	»	»	0,0213
65	»	»	»	»	»	0,0245
70	»	»	»	»	»	0,0279
75	»	»	»	«	»	0,0313
80	»	»	»	»	»	0,0351
90	»	»	»	»	»	0,0433

TABLE VII (*Suite*)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites.

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0m,25	0m,30	0m,35	0m,40	0m,50	0m,60
0mc000lit 40	0,00000114	0,00000047	0,00000023	0,00000012	0,00000004	0,00000002
0 45	0,00000140	0,00000060	0,00000028	0,00000015	0,00000005	0,00000002
0 50	0,00000169	0,00000071	0,00000034	0,00000018	0,00000006	0,00000002
0 55	0,00000199	0,00000084	0,00000040	0,00000021	0,00000007	0,00000003
0 60	0,00000232	0,00000098	0,00000047	0,00000025	0,00000008	0,00000003
0 65	0,00000268	0.00000113	0,00000054	0,00000028	0,00000010	0,00000004
0 70	0,00000304	0,00000132	0,00000062	0,00000032	0,00000011	0,00000005
0 75	0,00000343	0,00000145	0,00000070	0,00000036	0,00000013	0,00000005
0 80	0,00000384	0,00000162	0,00000078	0,00000041	0,00000014	0,00000006
0 90	0,00000474	0,00000200	0,00000096	0,00000050	0,00000017	0,00000007
1lit 00	0,0000057	0,00000240	0,00000115	0,00000060	0,00000021	0,00000009
1 10	0,0000067	0,00000283	0,00000136	0,00000071	0,00000024	0,00000010
1 20	0,0000078	0,00000330	0,00000159	0,00000083	0,00000028	0,00000012
1 30	0,0000090	0,00000380	0,00000183	0,00000095	0,00000033	0,00000014
1 40	0,0000102	0,00000430	0,00000207	0,00000108	0,00000038	0,00000016
1 50	0,0000115	0,0000049	0,00000234	0,00000122	0,00000043	0,00000018
1 60	0,0000129	0,0000054	0,00000262	0,00000137	0,00000048	0,00000020
1 70	0,0000144	0,0000061	0,00000291	0,00000152	0,00000053	0,00000022
1 80	0,0000159	0,0000067	0,00000322	0,00000168	0,00000059	0,00000024
1 90	0.0000175	0,0000073	0,00000355	0,00000185	0,00000065	0,00000027
0mc002lit 00	0,0000191	0,0000081	0,0000039	0,00000203	0,00000071	0,00000030
2 10	0,0000208	0,0000088	0,0000042	0,00000221	0,00000077	0,00000033
2 20	0,0000226	0,0000095	0,0000046	0,00000[illegible]40	0,00000084	0,00000035
2 30	0,0000247	0,0000103	0,0000049	0,00000260	0,00000091	0,00000038
2 40	0,0000264	0,0000111	0,0000053	0,00000280	0,00000098	0,00000041
2 50	0,0000283	0,0000119	0,0000057	0,0000030	0,00000105	0,00000044
2 60	0,0000302	0,0000127	0,0000061	0,0000032	0,00000113	0,00000047
2 80	0,0000345	0,0000145	0,0000070	0,0000037	0,00000128	0,00000054
3 00	0,0000389	0,0000164	0,0000079	0,0000041	0,00000145	0,00000061
3 50	0,0000510	0,0000215	0,0000103	0,0000054	0,00000190	0,00000080
4 00	0,000064	0,0000272	0,0000131	0,0000068	0,0000024	0,00000101
4 50	0,000079	0,0000337	0,0000160	0,0000084	0,0000029	0,00000123
5 00	0,000095	0,0000402	0,0000193	0,0000101	0,0000035	0,00000149
5 50	0,000112	0,0000473	0,0000228	0,0000119	0,0000042	0,00000175
6 00	0,000130	0,0000550	0,0000264	0,0000138	0,0000049	0,00000204
6 50	0,000151	0,000063	0,000030	0,0000160	0,0000056	0,00000236
7 00	0,000172	0,000072	0,000035	0,0000182	0,0000064	0,00000269
7 50	0,000193	0,000081	0,000039	0,0000205	0,0000072	0,00000303
8 00	0,000216	0,000091	0,000044	0,0000230	0,0000081	0,00000339
9 00	0,000266	0,000112	0,000054	0,0000283	0,0000099	0,00000416
0mc010lit	0,00032	0,000135	0,000065	0,000034	0,0000119	0,0000050
11	0,00038	0,000159	0,000077	0,000040	0,0000141	0,0000059
12	0,00044	0,000185	0,000089	0,000047	0,0000164	0,0000069
13	0,00051	0,000213	0,000103	0,000054	0,0000188	0,0000079
14	0,00058	0,000243	0,000117	0,000061	0,0000214	0,0000090
15	0,00065	0,000274	0,000132	0,000069	0,0000242	0,0000102
16	0,00073	0,000307	0,000148	0,000077	0,0000271	0,0000114
17	0,00081	0,000341	0,000164	0,000086	0,0000301	0,0000127
18	0,00090	0,000377	0,000181	0,000095	0,0000333	0,0000140
19	0,00099	0,000414	0,000199	0,000104	0,0000366	0,0000154

TABLE VII (*Suite*)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour des diamètres de :					
	0m,25	0m,30	0m,35	0m,40	0m,50	0m,60
0mc 020lit	0,00107	0,00045	0,000217	0,000113	0,000040	0,0000168
21	0,00117	0,00049	0,000238	0,000124	0,000044	0,0000184
22	0,00127	0,00054	0,000258	0,000135	0,000047	0,0000200
23	0,00138	0,00058	0,000279	0,000146	0,000051	0,0000216
24	0,00149	0,00063	0,000301	0,000157	0,000055	0,0000233
25	0,00159	0,00067	0,00032	0,000168	0,000059	0,0000249
26	0,00170	0,00072	0,00034	0,000179	0,000063	0,0000266
28	0,00195	0,00082	0,00039	0,000206	0,000072	0.0000304
30	0,00219	0,00092	0,00044	0,000232	0,000081	0,0000342
35	0,00287	0,00121	0,00058	0,000304	0,000106	0,0000448
40	0,0036	0,00153	0,00073	0,00038	0,000135	0,000057
45	0,0044	0,00188	0,00090	0,00047	0,000166	0,000070
50	0,0054	0,00226	0,00108	0,00057	0,000199	0,000084
55	0,0063	0,00266	0,00128	0,00067	0,000235	0,000099
60	0,0074	0,00310	0,00149	0,00078	0,000274	0,000115
65	0,0085	0,0036	0,00171	0,00090	0,00031	0,000133
70	0,0096	0,0041	0,00195	0,00102	0,00036	0,000151
75	0,0108	0,0046	0,00219	0,00115	0,00040	0,000169
80	0,0121	0,0051	0,00246	0,00128	0,00045	0,000190
90	0,0150	0,0063	0,00303	0,00158	0,00056	0,000234
100	0,0180	0,0076	0,0036	0,00191	0.00067	0,000282
110	0,0213	0,0089	0,0043	0,00226	0,00079	0,000333
120	0,0248	0,0104	0,0050	0,00263	0,00092	0,000388
130	0,0284	0,0120	0,0058	0,00302	0,00105	0,000445
140	0,0324	0,0136	0,0066	0,00343	0,00120	0,000507
150	»	0,0154	0,0074	0,0039	0,00136	0,00057
160	»	0,0173	0,0083	0,0043	0,00153	0,00064
170	»	0,0192	0,0092	0,0048	0,00170	0,00071
180	»	0,0212	0,0102	0,0053	0,00187	0,00079
190	»	0,0233	0,0112	0,0058	0,00206	0,00086
200	»	0,0255	0,0123	0,0064	0,00226	0,00095
210	»	0,0278	0,0134	0,0070	0,00245	0,00103
220	»	»	0,0145	0,0076	0,00266	0,00112
230	»	»	0,0157	0,0082	0,00288	0,00121
240	»	»	0,0169	0,0088	0,00309	0,00130
250	»	»	0,0181	0,0095	0,0033	0,00140
260	»	»	0,0194	0,0102	0,0036	0,00150
280	»	»	0,0221	0,0115	0.0041	0,00171
300	»	»	»	0,0131	0,0046	0,00193
350	»	»	»	0,0170	0,0060	0,00252
400	»	»	»	»	0,0076	0,0032
450	»	»	»	»	0,0093	0,0039
500	»	»	»	»	0,0112	0,0047
550	»	»	»	»	0,0132	0,0056
600	»	»	»	»	»	0,0065
650	»	»	»	»	»	0,0074
700	»	»	»	»	»	0,0085
750	»	»	»	»	»	0,0096
800	»	»	»	»	»	0,0131
900	»	»	»	»	»	»

TABLE VII (*Suite*)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0^{m},70	0^{m},80	0^{m},90	1^{m},00	1^{m},10	1^{m},20
0^{mc} 002^{lit} 0	0,00000014	0,00000008	0,00000004	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 1	0,00000016	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 2	0,00000017	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 3	0,00000019	0,00000010	0,00000006	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 4	0,00000020	0,00000011	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000001
2 5	0,00000021	0,00000011	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000002
2 6	0,00000023	0,00000012	0,00000007	0,00000004	0,00000003	0,00000002
2 8	0,00000026	0,00000014	0,00000008	0,00000004	0,00000003	0,00000002
3 0	0,00000029	0,00000015	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002
3 5	0,00000038	0,00000020	0,00000011	0,00000007	0,00000004	0,00000003
4 0	0,00000048	0,00000025	0,00000014	0,00000009	0,00000006	0,00000004
4 5	0,00000059	0,00000031	0,00000018	0,00000011	0,00000007	0,00000005
5 0	0,00000072	0,00000038	0,00000021	0,00000013	0,00000008	0,00000005
5 5	0,00000084	0,00000045	0,00000025	0,00000015	0,00000010	0,00000007
6 0	0,00000098	0,00000052	0,00000030	0,00000018	0,00000012	0,00000008
6 5	0,00000114	0,00000060	0,00000034	0,00000021	0,00000013	0,00000009
7 0	0,00000129	0,00000068	0,00000039	0,00000024	0,00000015	0,00000010
7 5	0,00000145	0,00000077	0,00000044	0,00000027	0,00000017	0,00000011
8 0	0,00000163	0,00000086	0,00000049	0,00000030	0,00000019	0,00000013
9 0	0,00000200	0,00000106	0,00000060	0,00000037	0,00000024	0,00000016
0^{mc} 010^{lit}	0,00000241	0,00000127	0,00000073	0,00000044	0,00000028	0,00000019
11	0,00000285	0,00000151	0,00000087	0,00000052	0,00000033	0,00000022
12	0,00000332	0,00000176	0,00000101	0,00000061	0,00000039	0,00000026
13	0,00000381	0,00000202	0,00000115	0,00000070	0,00000045	0,00000030
14	0,00000434	0,00000230	0,00000131	0,00000080	0,00000051	0,00000034
15	0,0000049	0,00000260	0,00000148	0,00000090	0,00000058	0,00000039
16	0,0000055	0,00000291	0,00000166	0,00000101	0,00000065	0,00000044
17	0,0000061	0,00000323	0,00000185	0,00000112	0,00000072	0,00000048
18	0,0000067	0,00000357	0,00000204	0,00000124	0,00000079	0,00000053
19	0,0000074	0,00000392	0,00000224	0,00000136	0,00000087	0,00000058
20	0,0000081	0,0000043	0,00000245	0,00000148	0,00000095	0,00000063
21	0,0000088	0,0000047	0,00000268	0,00000162	0,00000104	0,00000069
22	0,0000096	0,0000051	0,00000291	0,00000176	0,00000113	0,00000075
23	0,0000104	0,0000055	0,00000315	0,00000191	0,00000123	0,00000082
24	0,0000112	0,0000059	0,00000339	0,00000206	0,00000132	0,00000088
25	0,0000120	0,0000064	0,0000036	0,00000220	0,00000142	0,00000095
26	0,0000128	0,0000068	0,0000039	0,00000235	0,00000152	0,00000101
28	0,0000146	0,0000077	0,0000044	0,00000269	0,00000173	0,00000115
30	0,0000166	0,0000088	0,0000050	0,00000302	0,00000196	0,00000131
35	0,0000216	0,0000114	0,0000065	0,00000396	0,00000255	0,00000170
40	0,000027	0,0000144	0,0000083	0,0000050	0,0000032	0,00000211
45	0,000033	0,0000177	0,0000102	0,0000062	0,0000039	0,00000259
50	0,000040	0,0000214	0,0000122	0,0000074	0,0000047	0,00000312
55	0,000048	0,0000252	0,0000144	0,0000087	0,0000056	0,00000368
60	0,000055	0,0000293	0,0000168	0,0000102	0,0000065	0,00000428
65	0,000064	0,0000338	0,0000193	0,0000117	0,0000074	0,00000493
70	0,000073	0,0000385	0,0000220	0,0000133	0,0000085	0,00000561
75	0,000081	0,0000432	0,0000248	0,0000150	0,0000095	0,00000630
80	0,000091	0,0000485	0,0000277	0,0000168	0,0000107	0,00000707
90	0,000113	0,0000599	0,0000341	0,0000207	0,0000132	0,00000872

TABLE VII *(Suite)*

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour des diamètres de :					
	0m,70	0m,80	0m,90	1m,00	1m,10	1m,20
0mc100lit	0,000136	0,000072	0,000041	0,0000249	0,0000159	0,0000105
110	0,000160	0,000082	0,000048	0,0000294	0,0000187	0,0000123
120	0,000186	0,000099	0,000057	0,0000343	0,0000218	0,0000144
130	0,000214	0,000113	0,000065	0,0000393	0,0000250	0,0000165
140	0,000244	0,000129	0,000074	0,0000448	0,0000285	0,0000188
150	0,000275	0,000146	0,000083	0,000051	0,0000321	0,0000213
160	0,000309	0,000164	0,000093	0,000057	0,0000360	0,0000238
170	0,000343	0,000182	0,000104	0,000063	0,0000400	0,0000265
180	0,000379	0,000201	0,000115	0,000070	0,0000442	0,0000292
190	0,000416	0,000220	0,000126	0,000076	0,0000486	0,0000322
0mc200lit	0,00046	0,000242	0,000138	0,000084	0,000053	0,0000353
210	0,00050	0,000263	0,000150	0,000091	0,000058	0,0000384
220	0,00054	0,000285	0,000163	0,000099	0,000063	0,0000416
230	0,00058	0,000308	0,000176	0,000107	0,000068	0,0000450
240	0,00062	0,000331	0,000189	0,000115	0,000073	0,0000484
250	0,00067	0,00036	0,000204	0,000124	0,000079	0,000052
260	0,00072	0,00038	0,000219	0,000132	0,000084	0,000056
280	0,00082	0,00044	0,000249	0,000151	0,000096	0,000064
300	0,00093	0,00049	0,000281	0,000171	0,000108	0,000072
350	0,00121	0,00064	0,000367	0,000223	0,000141	0,000094
400	0,00153	0,00081	0,00046	0,00028	0,000179	0,000118
450	0,00188	0,00100	0,00057	0,00035	0,000220	0,000145
500	0,00226	0,00120	0,00069	0,00042	0,000264	0,000175
550	0,00267	0,00141	0,00081	0,00049	0,000312	0,000207
600	0,00312	0,00165	0,00094	0,00057	0,000364	0,000241
650	0,00358	0,00190	0,00108	0,00066	0,00042	0,000277
700	0,00408	0,00216	0,00124	0,00075	0,00048	0,000315
750	0,00461	0,00244	0,00140	0,00085	0,00054	0,000356
800	0,00515	0,00273	0,00156	0,00095	0,00060	0,000399
900	0,00633	0,00335	0,00192	0,00116	0,00074	0,000490
1mc000lit	0,00762	0,00404	0,00231	0,00140	0,00089	0,00059
1 100	0,00899	0,00475	0,00256	0,00165	0,00105	0,00070
1 200	»	0,00557	0,00302	0,00193	0,00123	0,00081
1 300	»	0,00638	0,00348	0,00221	0,00141	0,00093
1 400	»	0,00727	0,00416	0,00252	0,00160	0,00106
1 500	»	0,00818	0,00469	0,00284	0,00181	0,00120
1 600	»	»	0,00510	0,00319	0,00203	0,00134
1 700	»	»	0,00578	0,00354	0,00225	0,00149
1 800	»	»	0,00647	0,00392	0,00249	0,00165
1 900	»	»	0,00711	0,00431	0,00274	0,00181
2 000	»	»	»	0,00472	0,00300	0,00199
2 100	»	»	»	0,00514	0,00327	0,00216
2 200	»	»	»	0,00557	0,00354	0,00234
2 300	»	»	»	0,00601	0,00382	0,00252
2 400	»	»	»	»	0,00412	0,00272
2 500	»	»	»	»	0,00442	0,00292
2 600	»	»	»	»	0,00473	0,00313
2 800	»	»	»	»	0,00539	0,00357
3 000	»	»	»	»	»	0,00403
3 500	»	»	»	»	»	»

TABLE VIII

Valeurs du coefficient *b* correspondant aux valeurs du coefficient

$$C = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot$$

C	b	C	b
15	0,0044	55	0,00033
16	0,0039	56	0,00032
17	0,0035	57	0,00031
18	0,0031	58	0,00030
19	0,0028	59	0,00029
20	0,0025	60	0,00028
21	0,0023	61	0,00027
22	0,0021	62	0,00026
23	0,0019	63	0,00025
24	0,0017	64	0,00024
25	0,00160	65	0,000240
26	0,00148	66	0,000230
27	0,00137	67	0,000223
28	0,00128	68	0,000216
29	0,00119	69	0,000209
30	0,00111	70	0,000204
31	0,00104	72	0,000193
32	0,00098	74	0,000182
33	0,00092	76	0,000172
34	0,00086	78	0,000163
35	0,00081	80	0,000156
36	0,00077	82	0,000149
37	0,00073	84	0,000142
38	0,00069	86	0,000135
39	0,00066	88	0,000129
40	0,00062	90	0,000123
41	0,00059	92	0,000118
42	0,00057	94	0,000113
43	0,00054	96	0,000108
44	0,00051	98	0,000104
45	0,00049	100	0,000100
46	0,00047	105	0,000091
47	0,00045	110	0,000083
48	0,00043	115	0,000075
49	0,00042	120	0,000069
50	0,00040	125	0,000064
51	0,00039	130	0,000059
52	0,00037	140	0,000051
53	0,00036	150	0,000044
54	0,00034		

TABLE IX

Valeurs de coefficient C de la formule $U = C\sqrt{RI}$, d'après M. Bazin.

Rayon moyen R	Parois très unies	Parois unies	Parois peu unies	Parois en terre	Parois en gravier
0m.05	65	47	26	»	»
0 10	72	56	35	16	12
0 15	75	60	40	20	15
0 20	76	62	43	22	17
0 25	77	64	46	24	19
0 30	78	65	48	26	20
0 35	78	66	49	28	21
0 40	79	67	51	29	22
0 50	79	68	53	32	24
0 60	80	69	54	34	25
0 70	80	69	55	36	27
0 80	80	70	56	37	28
1 00	80	70	58	40	30
1 50	81	71	60	44	34
2 00	81	71	61	47	37
2 50	81	72	61	49	39
3 00	81	72	62	50	40
4 00	81	72	63	52	42
5 00	81	72	63	54	43
10 00	81	72	64	56	46
15 00	81	72	64	57	47

TABLE X

Valeurs du coefficient C de la formule $U = C\sqrt{RI}$, d'après M. Robert Manning.

Rayon moyen	Parois très unies	Parois unies	Parois peu unies	Parois rugueuses	Parois en terre	Parois en gravier	Parois irrégulières	Parois très irrégulières
0m.05	61	47	36	30	24	20	17	15
0 10	68	52	40	34	27	23	19	17
0 20	76	59	45	38	31	25	22	19
0 30	82	63	48	41	33	27	23	20
0 50	89	69	52	45	36	30	25	22
1 00	100	77	59	50	40	33	29	25
2 00	112	86	66	56	45	37	32	28
3 00	120	92	71	60	48	40	34	30
5 00	131	101	77	65	52	44	37	33
15 00	157	121	92	79	63	52	45	39

TABLE XI

Valeurs du coefficient C de la formule $U = C\sqrt{RI}$, d'après Ganguillet et Kutter.

	Rayon moyen	Pentes I =						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,0010	0,0100
Parois très unies $n = 0{,}010$	0m,05	38	44	51	54	56	57	58
	0 10	49	56	61	65	68	70	71
	0 20	63	70	74	77	78	79	80
	0 30	72	77	81	84	85	86	86
	0 50	83	86	88	90	91	91	91
	1 00	100	100	100	100	100	100	100
	2 00	115	111	109	107	106	105	105
	3 00	124	117	113	111	110	109	108
	5 00	134	123	118	115	113	112	111
	15 00	151	135	125	121	118	117	116
Parois unies $n = 0{,}013$	0m,05	28	31	35	38	40	41	42
	0 10	36	40	44	47	49	50	51
	0 20	46	50	53	56	58	59	59
	0 30	53	57	60	63	64	64	65
	0 50	62	65	67	69	69	70	70
	1 00	77	77	77	77	77	77	77
	2 00	90	87	85	84	83	82	82
	3 00	99	94	89	88	87	86	85
	5 00	108	100	93	91	90	89	88
	15 00	125	114	102	98	96	94	92
Parois peu unies $n = 0{,}017$	0m,05	19	22	24	26	28	29	29
	0 10	25	29	32	34	35	36	36
	0 20	34	37	39	41	42	42	43
	0 30	40	43	45	46	47	47	48
	0 50	47	49	50	51	51	52	52
	1 00	68	58	58	58	58	58	58
	2 00	71	69	67	66	65	64	64
	3 00	78	74	71	70	69	68	68
	5 00	87	79	75	73	72	71	70
	15 00	105	90	83	79	77	76	75
Parois rugueuses $n = 0{,}020$	0m,05	15	18	20	21	23	23	24
	0 10	21	23	25	28	29	29	30
	0 20	28	30	32	34	35	36	36
	0 30	33	35	37	38	39	40	40
	0 50	40	41	42	43	43	44	44
	1 00	50	50	50	50	50	50	50
	2 00	61	59	57	56	56	55	55
	3 00	69	64	61	59	59	58	58
	5 00	76	70	66	63	62	61	61
	15 00	94	81	74	70	68	67	66

TABLE XI *(Suite)*

Valeurs du coefficient C de la formule $U = C\sqrt{RI}$, d'après Ganguillet et Kutter.

	Rayon moyen	Pentes I =						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,0010	0,0100
Parois en terre $n = 0{,}025$	0m,05	12	13	15	16	17	18	18
	0 10	17	18	19	20	21	22	22
	0 20	22	23	24	25	26	27	27
	0 30	26	28	29	30	30	31	31
	0 50	31	32	33	34	34	35	35
	1 00	40	40	40	40	40	40	40
	2 00	50	48	47	46	45	45	45
	3 00	56	53	51	49	48	48	47
	5 00	64	59	54	53	52	51	50
	15 00	81	71	63	59	57	56	55
Parois en gravier $n = 0{,}030$	0m,05	10	11	12	13	13	14	14
	0 10	13	14	15	16	17	18	18
	0 20	18	19	19	20	21	22	22
	0 30	21	22	23	24	24	25	25
	0 50	25	26	27	27	28	29	29
	1 00	33	33	33	33	33	33	33
	2 00	42	41	40	40	39	38	38
	3 00	48	45	43	42	42	41	41
	5 00	56	51	47	45	44	43	43
	15 00	72	62	55	52	51	49	48
Parois irrégulières $n = 0{,}035$	0m,05	8	9	9	10	10	11	11
	0 10	11	12	12	13	13	14	14
	0 20	15	16	16	17	17	18	18
	0 30	18	19	19	20	20	21	21
	0 50	22	23	23	23	24	24	24
	1 00	29	29	29	29	29	29	29
	2 00	36	35	34	34	33	33	33
	3 00	42	40	38	37	36	36	36
	5 00	49	45	43	42	41	40	39
	15 00	65	56	51	47	45	44	43
Parois très irrégulières $n = 0{,}040$	0m,05	6	7	7	8	8	9	9
	0 10	9	10	11	11	12	12	12
	0 20	13	14	14	15	15	16	16
	0 30	15	16	17	18	18	18	18
	0 50	19	19	20	20	21	21	21
	1 00	25	25	25	25	25	25	25
	2 00	32	31	31	30	30	29	29
	3 00	37	35	34	33	33	32	32
	5 00	44	41	39	38	37	36	35
	15 00	59	52	46	43	42	41	40

TABLE XII

Surfaces ω et rayons moyens R des sections transversales en forme de trapèze.

Rapport de la largeur au plafond l à la profondeur h	Rapport de la profondeur h à la largeur au plafond l	Parois verticales	TALUS : à 1 de base pour 2 de hauteur	TALUS : à 45 degrés	TALUS : à 3 de base pour 2 de hauteur	TALUS : à 2 de base pour 1 de hauteur	TALUS : à 3 de base pour 1 de hauteur
$\frac{l}{h}$	$\frac{h}{l}$	Rapports des surfaces au carré de la profondeur : $\frac{\omega}{h^2}$					
0.25	4.00	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	3.25
0.50	2.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.50
0.75	1.33	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.75
1.00	1.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00
1.25	0.80	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	4.25
1.50	0.67	1.50	2 00	2.50	3.00	3.50	4.50
1.75	0.57	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.75
2.00	0.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	5.00
2.50	0.40	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.50
3.00	0.33	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00
4.00	0 25	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	7.00
5.00	0.20	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	8.00
6.00	0.17	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	9.00
8.00	0.125	8.00	8.50	9.00	9.50	10.00	11.00
10.00	0.10	10.00	10.50	11.00	11.50	12.00	13.00
15.00	0.07	15.00	15.50	16.00	16.50	17.00	18.00
20.00	0.05	20.00	20.50	21.00	21.50	22.00	23.00
		Rapports des rayons moyens à la profondeur : $\frac{R}{h}$					
0.25	4.00	0.11	0.30	0.41	0.45	0.48	0.49
0.50	2.00	0.20	0.36	0.45	0.49	0.50	0.51
0.75	1.33	0.27	0.42	0.49	0.52	0.52	0.53
1.00	1.00	0.33	0.46	0.52	0.54	0.55	0.55
1.25	0.80	0.38	0.50	0.55	0.56	0.57	0.56
1.50	0.67	0.43	0.53	0.58	0.59	0.59	0.58
1.75	0.57	0.47	0.56	0.60	0.61	0.60	0.59
2.00	0.50	0.50	0.59	0.62	0.62	0.62	0.60
2.50	0.40	0.56	0.63	0.66	0.66	0.65	0.62
3.00	0.33	0.60	0.67	0.69	0.68	0.67	0.64
4.00	0.25	0.67	0.72	0.73	0.72	0.71	0.68
5.00	0.20	0.70	0.76	0.77	0.76	0.74	0.71
6.00	0.17	0.75	0.79	0.79	0.78	0.76	0.73
8.00	0.125	0.80	0.83	0.83	0.82	0.80	0.77
10.00	0.10	0.83	0.86	0.86	0.85	0.83	0.80
15.00	0.07	0.88	0.90	0.90	0.89	0.87	0.84
20.00	0.05	0.91	0.92	0.92	0.91	0.90	0.87

TABLE XIII

Valeurs de la fonction $\psi(x)$ de Bresse pour les canaux découverts

(page 240)

$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$
10.0	0.10	—0.505	0.99	1.01	1.416
5.00	0.20	—0.404	0.98	1.02	1.191
3.33	0.30	—0.302	0.97	1.03	1.060
2.50	0.40	—0.198	0.96	1.04	0.970
2.22	0.45	—0.144	0.95	1.05	0.895
2.00	0.50	—0.088	0.94	1.06	0.838
1.82	0.55	—0.029	0.93	1.07	0.783
1.67	0.60	+0.032	0.93	1.08	0.749
1.54	0.65	0.099	0.92	1.09	0.712
1.43	0.70	0.171	0.91	1.10	0.676
1.39	0.72	0.202	0.90	1.11	0.651
1.35	0.74	0.235	0.89	1.12	0.626
1.33	0.75	0.252	0.88	1.13	0.602
1.32	0.76	0.270	0.88	1.14	0.580
1.30	0.77	0.288	0.87	1.15	0.561
1.28	0.78	0.306	0.86	1.16	0.541
1.27	0.79	0.326	0.85	1.17	0.525
1.25	0.80	0.346	0.85	1.18	0.509
1.23	0.81	0.367	0.84	1.19	0.493
1.22	0.82	0.387	0.83	1.20	0.479
1.20	0.83	0.411	0.82	1.22	0.454
1.19	0.84	0.435	0.80	1.25	0.420
1.18	0.85	0.460	0.77	1.30	0.373
1.16	0.86	0.487	0.74	1.35	0.335
1.15	0.87	0.516	0.71	1.40	0.304
1.14	0.88	0.546	0.69	1.45	0.277
1.12	0.89	0.578	0.67	1.50	0.257
1.11	0.90	0.614	0.62	1.60	0.218
1.10	0.91	0.652	0.59	1.70	0.190
1.09	0.92	0.695	0.56	1.80	0.166
1.08	0.93	0.743	0.53	1.90	0.146
1.06	0.94	0.798	0.50	2.00	0.132
1.05	0.95	0.862	0.44	2.25	0.102
1.04	0.96	0.940	0.40	2.50	0.082
1.03	0.97	1.040	0.33	3.00	0.055
1.02	0.98	1.178	0.29	3.50	0.041
1.01	0.99	1.412	0.25	4.00	0.031
1.00	1.00	∞	0.20	5.00	0.020

TABLE XIV

Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson.

Volumes écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, pour 1000 mètres de longueur					
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Diamètre $0^{m},05$		Diamètre $0^{m},081$		Diamètre $0^{m},10$	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
1^{lit}	$3^{cm}6$	0.053	0,022	0,008	0,003	0,004	0,002
2	7 2	0.137	0,056	0,019	0,008	0,009	0,004
3	10 8	0.254	0,104	0,032	0,013	0,014	0,006
4	14 4	0,402	0,165	0,048	0.020	0,021	0,009
5	18 0	0,582	0,239	0,066	0,027	0,028	0,011
6	21 6	0,794	0,326	0,086	0,035	0,036	0,015
7	25 2	1,038	0,426	0,108	0,044	0,045	0,018
8	28 8	1,314	0,539	0,134	0,055	0,054	0,022
9	32 4	1,622	0,665	0,161	0,066	0.065	0,026
10	36 0	1,961	0,804	0,190	0,078	0,076	0,031
11	39 6	2,332	0,956	0,222	0.091	0,088	0,036
12	43 2	2,734	1,121	0,257	0,105	0.100	0,041
13	46 8	3,169	1,299	0,293	0.120	0,114	0,047
14	50 4	3.636	1,491	0,332	0,136	0,128	0,053
15	54 0	4,134	1,695	0,374	0,153	0,144	0,059
16	57 6	»	»	0,419	0,172	0,159	0,065
18	64 8	»	»	0.512	0,210	0,194	0,079
20	72 0	»	»	0,616	0,252	0,231	0,095
22	79 2	»	»	0,729	0,299	0,272	0,111
25	90 0	»	»	0,917	0,376	0.339	0,139
30	108	»	»	1,276	0,523	0,466	0,191
35	126	»	»	1.695	0,695	0,613	0,251
40	144	»	»	2,172	0,890	0.780	0,320
45	162	»	»	»	»	0,966	0,396
50	180	»	»	»	»	1,174	0,481

TABLE XIV (*Suite*)

Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson.

Volumes écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, pour 1000 mètres de longueur					
		Diamètre $0^m,15$		Diamètre $0^m,20$		Diamètre $0^m,25$	
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
5^{lit}	18^{mc}	0,005	0,002	0,0015	0,0006	0,0005	0,0002
10	36	0,013	0,005	0,0037	0,0015	0,0013	0,0005
15	54	0,023	0,010	0,0063	0,0026	0,0022	0,0009
20	72	0,036	0,015	0,0094	0,0038	0,0032	0,0013
25	90	0,051	0,021	0,0130	0,0053	0,0044	0,0018
30	108	0,068	0,028	0,0172	0,0076	0,0057	0,0023
35	126	0,080	0,033	0,022	0,009	0,0073	0,0030
40	144	0,111	0,045	0,027	0,011	0,0089	0,0036
45	162	0,135	0,056	0,033	0,013	0,0108	0,0044
50	180	0,162	0,066	0,039	0,016	0,0127	0,0052
60	216	0,224	0,092	0,053	0,022	0,0171	0,0070
70	252	0,295	0,121	0,068	0,028	0,022	0,009
80	288	0,375	0,154	0,086	0,035	0,028	0,011
90	324	0,466	0,191	0,106	0,044	0,034	0,014
100	360	0,565	0,232	0,128	0,053	0,041	0,017
110	396	0.674	0,276	0,152	0,062	0,048	0,020
120	432	0,793	0,325	0,179	0,073	0,056	0,023
130	468	0,922	0,378	0.206	0,085	0,065	0,027
140	504	»	»	0,236	0,097	0,074	0,031
150	540	»	»	0,268	0,110	0,085	0,035
160	576	»	»	0,303	0,124	0,095	0,039
180	648	»	»	0,377	0.155	0,118	0,048
200	720	»	»	0,459	0.188	0,143	0,059
220	792	»	»	0,550	0,225	0,171	0,070
250	900	»	»	0,701	0,287	0,217	0,089

TABLE XIV (*Suite*)

Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson.

Volumes écoulés		Pertes de charges, en mètres d'eau, pour 1000 mètres de longueur					
		Diamètre 0m,30		Diamètre 0m,35		Diamètre 0m,40	
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
20 lit	72mc	0,0013	0,0005	0,0005	0,0002	0,0002	0.0001
40	144	0,0036	0,0015	0,0015	0,0006	0,0007	0,0003
60	216	0,0067	0,0027	0,0029	0,0012	0,0013	0,0005
80	288	0,0108	0,0044	0,0046	0,0019	0,0020	0,0008
100	360	0,0157	0,0064	0,0068	0,0028	0,0030	0,0012
120	432	0,0216	0,0088	0,0094	0,0038	0,0042	0,0017
140	504	0,0285	0,0117	0,0123	0,0051	0,0055	0,0022
160	576	0,0362	0,0148	0,0157	0,0064	0,0069	0,0028
180	648	0,045	0,018	0,0194	0,0080	0,0086	0,0035
200	720	0,054	0,022	0,0235	0,0096	0,0104	0,0042
220	792	0,065	0,026	0,0281	0,0115	0,0124	0,0051
240	864	0,076	0,031	0,0330	0.0135	0,0148	0,0060
250	900	0,082	0,033	0,0357	0,0147	0,0159	0,0065
260	936	0,088	0,036	0,0384	0,0158	0,0171	0,0070
280	1008	0,102	0.042	0,044	0,0180	0,0198	0,0081
300	1080	0,116	0,047	0.050	0,021	0,0227	0,0093
320	1152	0,130	0,053	0,057	0,023	0,0257	0,0105
360	1296	0,164	0,067	0,071	0,029	0,0322	0,0132
400	1440	0,200	0,082	0,087	0,036	0,0391	0,0160
450	1620	0,250	0,102	0,109	0,045	0.0490	0,0202
500	1800	»	»	0,133	0,055	0,061	0,025
600	2160	»	»	0,189	0,078	0,087	0,035
700	2520	»	»	0,256	0,105	0,117	0,048
800	2880	»	»	»	»	0,152	0,062
900	3240	»	»	»	»	0,191	0,078

TABLE XIV (*Suite*)

Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson.

Volumes écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, par 1000 mètres de longueur					
		Diamètre $0^m,50$		Diamètre $0^m,60$		Diamètre $0^m,70$	
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
50^lit	180^mc	0,0002	0,0001	0,00006	0,00002	0,00002	0,00001
100	360	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001	0,00009	0,00004
150	540	0,0016	0,0006	0,0005	0,0002	0,00022	0,00009
200	720	0,0028	0,0011	0,0009	0,0004	0,0004	0,00016
250	900	0,0043	0,0018	0,0014	0,0006	0,0006	0,00025
300	1080	0,0062	0,0025	0,0021	0,0009	0,0009	0,00036
350	1260	0,0084	0,0034	0,0029	0,0012	0,0012	0,0005
400	1440	0,0109	0,0045	0,0038	0,0015	0,0016	0,0006
450	1620	0,0138	0,0056	0,0048	0,0019	0,0020	0,0003
500	1800	0,0169	0,0069	0,0059	0,0024	0,0025	0,0010
600	2160	0,0243	0,0099	0,0085	0,0035	0,0035	0,0014
700	2520	0,0330	0,0135	0,0115	0,0047	0,0049	0,0020
800	2880	0,0429	0,0176	0,0151	0,0062	0,0063	0,0026
900	3240	0,054	0,022	0,0191	0,0078	0,0081	0,0033
1000	3600	0,067	0,027	0,0235	0,0096	0,0100	0,0041
1100	3960	0,081	0,033	0,028	0,0116	0,0120	0,0049
1200	4320	0,096	0,039	0,034	0,014	0,0143	0,0058
1300	4680	0,112	0,046	0,040	0,016	0,0168	0,0069
1400	5040	0,130	0,053	0,046	0,019	0,0194	0,0080
1500	5400	»	»	0,053	0,022	0,0022	0,0091
1600	5760	»	»	0,060	0,025	0,025	0,0104
1800	6480	»	»	0,076	0,031	0,032	0,0133
2000	7200	»	»	»	»	0,040	0,0163
2200	7920	»	»	»	»	0,048	0,020
2500	9000	»	»	»	»	0,062	0,025

TABLE XV

Logarithmes naturels ou népériens

1° *de centième en centième, pour les nombres compris entre* 1 *et* 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,039	0,049	0,058	0,068	0,077	0,086	9
1,1	095	104	113	122	131	140	148	157	165	174	8
1,2	182	191	199	207	215	223	231	239	247	255	7
1,3	262	270	278	285	293	300	307	315	322	329	7
1,4	336	344	351	358	365	372	378	385	392	399	6
1,5	405	412	419	425	432	438	445	451	457	464	6
1,6	470	476	482	487	495	501	507	513	519	525	6
1,7	531	536	542	548	554	560	565	571	577	582	6
1,8	588	593	599	604	610	615	621	626	631	637	5
1,9	642	647	652	657	663	668	673	678	683	688	5
2,0	693	698	703	708	713	718	723	727	732	737	5
2,1	742	747	751	756	761	765	770	775	779	784	4
2,2	788	793	797	802	806	811	815	820	824	829	4
2,3	833	837	842	846	850	854	859	863	867	871	4
2,4	875	880	884	888	892	896	900	904	908	912	4
2,5	916	920	924	928	932	936	940	944	948	952	4
2,6	956	959	963	967	971	975	978	982	986	989	4
2,7	993	997	1,001	1,004	1,008	1,012	1,015	1,019	1,022	1,026	4
2,8	1,030	1,033	1,037	1,040	1,044	1,047	1,051	1,054	1,058	1,061	4
2,9	1,065	1,068	1,072	1,075	1,078	1,082	1,085	1,089	1,092	1,095	4

2° *de dixième en dixième, pour les nombres compris entre* 1 *et* 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642	51
2,	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,955	0,993	1,030	1,065	34
3,	1,099	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361	25
4,	386	411	435	459	482	504	526	548	569	589	20
5,	609	629	649	668	686	705	723	740	758	775	17
6,	792	808	824	840	856	872	887	902	917	931	15
7,	946	960	974	988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067	12
8,	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,175	2,186	11
9,	2,197	2,208	2,219	2,230	241	251	262	272	282	292	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

TABLE XVI

Inverses $\frac{1}{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174	83
11	9091	9009	8928	8849	8772	8696	8621	8547	8474	8403	70
12	8333	8264	8197	8130	8064	8000	7937	7874	7812	7752	60
13	7692	7633	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7247	7194	51
14	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	44
15	6667	6622	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	39
16	6250	6211	6173	6135	6097	6061	6024	5988	5952	5917	35
17	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5586	30
18	5556	5525	5405	5465	5434	5405	5376	5347	5319	5291	28
19	5263	5235	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	25
20	5000	4975	4950	4926	4902	4978	4854	4831	4808	4784	22
21	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	21
22	4545	4524	4504	4484	4464	4444	4424	4405	4386	4367	19
23	4348	4329	4310	4292	4273	4255	4237	4219	4201	4184	17
24	4167	4149	4132	4115	4098	4081	4065	4048	4032	4016	16
25	4000	3984	3968	3952	3937	3921	3906	3891	3876	3861	15
26	3846	3831	3816	3802	3788	3774	3760	3746	3732	3718	14
27	3704	3690	3676	3662	3649	3636	3623	3610	3597	3584	13
28	3571	3558	3546	3533	3521	3509	3497	3484	3472	3460	12
29	3448	3436	3425	3413	3401	3389	3378	3367	3356	3344	11
30	3333	3322	3311	3300	3289	3278	3268	3257	3247	3236	10
31	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

TABLE XVII

Valeurs des fonctions hyperboliques

x	sih x	coh x	tah x	x	sih x	coh x	tah x
0,00	0,000	1.000	0,000	0,75	0,822	1.295	0,635
0,02	0,020	1,000	0,020	0,80	0,888	1,337	0,664
0,04	0,040	1,001	0,040	0,85	0,956	1,383	0,691
0,06	0,060	1,002	0,060	0,90	1,027	1,433	0,716
0,08	0,080	1,003	0,080	0,95	1,099	1,486	0,740
0,10	0,100	1,005	0,100	1,00	1,175	1,543	0,762
0,12	0,120	1,007	0,119	1,05	1,254	1,604	0,782
0,14	0,140	1,010	0,139	1,10	1.336	1,669	0,800
0,16	0,161	1,013	0,159	1,15	1,420	1,737	0,818
0,18	0,181	1,016	0,178	1,20	1,509	1,811	0,834
0,20	0,201	1,020	0,197	1,25	1,602	1,889	0.848
0,25	0,253	1,031	0,245	1,50	2,129	2,353	0,905
0,30	0,305	1,045	0,291	2,00	3,627	3,762	0,964
0,35	0,357	1,062	0,336	2,50	6,050	6,132	0,987
0,40	0,411	1,081	0,380	3,00	10,02	10,07	0,995
0,45	0,465	1,103	0,422	4,00	27,29	27,31	0,999
0,50	0,521	1.128	0,462	5,00	74,20	74,21	1,000
0,55	0,578	1,155	0,500	6,00	201,5	201,5	1,000
0,60	0,637	1,186	0,537	8,00	1490	1490	1,000
0,65	0,696	1,219	0,572	10,00	11013	11013	1,000
0,70	0,759	1,255	0,604	∞	∞	∞	1,000

TABLE XVIII

Valeurs des puissances $\frac{k-1}{k} = 0{,}29\ldots$ des nombres consécutifs

(*k* étant la constante spécifique des gaz, rapport des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant)

1° *de centième en centième, pour les nombres compris entre* 0 *et* 1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0,0	0,000	0,262	0,321	0,361	0,392	0,418	0,441	0,462	0,481	0,497	15
0,1	512	526	540	553	565	576	587	597	607	617	9
0,2	626	636	645	653	660	668	676	683	691	698	6
0,3	704	711	718	724	731	737	743	749	755	760	6
0,4	766	772	777	782	788	793	798	803	808	813	4
0,5	817	822	827	831	836	840	845	850	854	858	4
0,6	862	866	870	874	878	882	886	890	894	898	4
0,7	902	906	909	913	917	920	924	928	931	934	3
0,8	937	941	944	948	951	954	958	961	964	967	3
0,9	970	973	976	979	982	985	988	991	994	997	3

2° *de dixième en dixième, pour les nombres compris entre* 0 *et* 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0,	0,000	0,512	0,626	0,704	0,766	0,817	0,862	0,902	0,937	0,970	30
1,	1,000	1,028	1,054	1,079	1,103	1,125	1,146	1,166	1,186	1,205	18
2,	1,223	1,240	1,257	1,274	1,290	1,305	1,321	1,335	1,349	1,363	13
3,	1,376	1,390	1,403	1,415	1,427	1,439	1,451	1,463	1,475	1,486	11
4,	1,497	1,507	1,518	1,528	1,538	1,548	1,558	1,568	1,577	1,587	9
5,	1,596	1,606	1,615	1,624	1,633	1,642	1,651	1,659	1,668	1,676	8
6,	1,684	1,692	1,700	1,708	1,716	1,723	1,731	1,738	1,746	1,754	7
7,	1,761	1,769	1,776	1,783	1,790	1,797	1,804	1,811	1,817	1,824	6
8,	1,830	1,837	1,844	1,850	1,857	1,863	1,870	1,876	1,882	1,888	6
9,	1,894	1,900	1,906	1,912	1,918	1,924	1,930	1,936	1,942	1,947	6

3° *d'unité en unité, pour les nombres compris entre* 0 *et* 100.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0	0,000	1,000	1,223	1,376	1,497	1,596	1,684	1,761	1,830	1,894	59
10	1,953	2,008	2,060	2,108	2,154	2,197	2,240	2,280	2,318	2,354	36
20	2,390	2,424	2,457	2,489	2,520	2,550	2,580	2,608	2,635	2,662	26
30	2,688	2,714	2,739	2,764	2,788	2,812	2,835	2,857	2,880	2,902	21
40	2,923	2,945	2,965	3,985	3,005	3,025	3,045	3,064	3,083	3,101	18
50	3,119	3,137	3,155	3,172	3,190	3,207	3,224	3,241	3,258	3,274	15
60	3,289	3,305	3,321	3,336	3,352	3,367	3,382	3,397	3,412	3,426	14
70	3,440	3,455	3,469	3,483	3,497	3,510	3,524	3,537	3,550	3,563	13
80	3,576	3,589	3,602	3,615	3,628	3,640	3,653	3,665	3,677	3,689	12
90	3,701	3,713	3,725	3,737	3,749	3,761	3,773	3,784	3,795	3,805	11

INDEX ALPHABÉTIQUE

ERRATA

Page 127, ligne 17, *au lieu de* : cos I ; *lire* : cos i.

— 147, ligne 17, *au lieu de* : 0,013 ou 0,014 ; *lire* : 0,011 ou 0,012.

— — 18, *au lieu de* : 72 ; *lire* : 88.

— — 22, *au lieu de* : 72 ; *lire* : 88.

— — 23, *au lieu de* : 18 ; *lire* : 22.

— — 24, *au lieu de* : 18 ; *lire* : 22.

— — 24, *au lieu de* : 0,00078 ; *lire* : 0,00052.

Page 152, après la 7e ligne, *ajouter* : La même table fournit les valeurs de $\frac{J}{Q^2}$ calculées d'après la formule ci-dessus de M. Rob. Manning avec la valeur C = 88.

Page 166, dernière ligne, *au lieu de* : $\frac{Q_1L_1}{D^5}$; *lire* : $\frac{Q_1^2L_1}{D_1^5}$.

— 167, ligne 5, *au lieu de* : D^5 ; *lire* : D_2^5.

— — 6, *au lieu de* : $\frac{L^2}{D^5}$; *lire* : $\frac{L_2}{D_2^5}$.

— — 18, *au lieu de* : D^5 ; *lire* : D_2^5.

— 247, ligne 8, *au lieu de* : $\left(+n-\frac{9}{4}\right)$; *lire* : $+\left(n-\frac{9}{4}\right)$.

— 367, ligne 1, *au lieu de* : $2\sqrt{g(H+h)}$; *lire* : $3\sqrt{g(H+h)}$.

— 381, ligne 2, *au lieu de* : durand ; *lire* : durant.

— 401, ligne 1, après n'exhaussent, *ajouter* : en amont ils creusent, en aval ils exhaussent.

— 493, lignes 10 et 11, *au lieu de* : pour tenir compte de l'influence des espaces nuisibles ; *lire* : pour tenir compte de l'injection forcée d'eau nécessaire au refroidissement de l'air pendant la compression.

Laval. — Imp. et Stér. E. JAMIN, 41, rue de la Paix.

